

La suite de Stern

Alexandre Junod, Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), alexandre.junod@rpn.ch

1 Problématique

Moins connue que celle de Fibonacci, la suite de Stern¹ n'en est pas moins intéressante. Elle est définie par les valeurs initiales $s_0 = 0, s_1 = 1$ et des relations de récurrence différentes selon la parité de l'indice : $s_{2n} = s_n$ et $s_{2n+1} = s_n + s_{n+1}$ pour $n \geq 1$. Les premières valeurs sont présentées dans le tableau suivant.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
s_n	0	1	1	<u>2</u>	1	<u>3</u>	2	<u>3</u>	1	4	3	<u>5</u>	2	<u>5</u>	3	4	1

Dans cet article, nous expliquons le lien entre la valeur de s_n et le développement binaire de n par le biais d'une fraction continue, nous déduisons une bijection explicite entre \mathbb{N} et \mathbb{Q}_+ , puis nous démontrons que deux "1" consécutifs dans la suite de Stern délimitent une sous-suite palindromique (en gris dans le tableau) dont le plus grand élément est un nombre de Fibonacci (souligné).

2 Approche matricielle

Posons $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} s_n \\ s_{n+1} \end{pmatrix}$. Ce vecteur est envoyé sur \vec{v}_{2n} par la matrice $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et sur \vec{v}_{2n+1} par la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, autrement dit $G\vec{v}_n = \vec{v}_{2n}$ et $D\vec{v}_n = \vec{v}_{2n+1}$. Si on ne s'intéresse qu'à l'indice, on voit que la matrice G a pour effet de rajouter un "0" à droite dans le développement binaire de n alors que la matrice D a pour effet d'y rajouter un "1". On peut construire facilement les antécédants successifs d'un indice donné, disons $n = 200$:

$$200 \xleftarrow{G} 100 \xleftarrow{G} 50 \xleftarrow{G} 25 \xleftarrow{D} 12 \xleftarrow{G} 6 \xleftarrow{G} 3 \xleftarrow{D} 1 \xleftarrow{D} 0.$$

L'antécédant d'un indice n est $\lfloor n/2 \rfloor$ en notant "G" si n est pair et "D" si n est impair. En lisant cette chaîne d'antécédants de droite à gauche, on peut en déduire aussi bien le développement binaire $200 = [11001000]_2$ que la relation vectorielle $\vec{v}_{200} = GGGDGGDD\vec{v}_0 = G^3D^1G^2D^2\vec{v}_0$. On passe d'une information à l'autre en faisant les remplacements $G \leftrightarrow 0, D \leftrightarrow 1$ et en inversant le mot.

De manière générale, pour un indice donné par son développement binaire

$$n = \underbrace{[1 \dots 1 0 \dots 0]}_{a_k} \dots \underbrace{[1 \dots 1 0 \dots 0]}_{a_1} \underbrace{[0]}_{a_0}]_2$$

avec des entiers $a_0 \geq 0, a_1, \dots, a_k \geq 1$ et k impair, on a $\vec{v}_n = G^{a_0} D^{a_1} \dots G^{a_{k-1}} D^{a_k} \vec{v}_0$. On peut encore remarquer que

$$D^m G^n = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+mn & m \\ n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

autrement dit $D^m G^n = \mathcal{M}(m)\mathcal{M}(n)$ avec $\mathcal{M}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Moritz Abraham Stern (1807 – 1894) est un mathématicien allemand, il fit son doctorat à Göttingen sous la direction de Gauss (1777 – 1855).

En intercalant judicieusement la matrice identité $I = G^0 = D^0$ dans l'expression de \vec{v}_n trouvée précédemment, on obtient

$$\begin{aligned} \vec{v}_n &= D^0 G^{a_0} D^{a_1} \dots G^{a_{k-1}} D^{a_k} G^0 \vec{v}_0 \\ &= \mathcal{M}(0) \mathcal{M}(a_0) \mathcal{M}(a_1) \dots \mathcal{M}(a_{k-1}) \mathcal{M}(a_k) \mathcal{M}(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{M}(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, il s'ensuit que le vecteur \vec{v}_n est la première colonne du produit matriciel $M_n = \mathcal{M}(0) \mathcal{M}(a_0) \mathcal{M}(a_1) \dots \mathcal{M}(a_{k-1}) \mathcal{M}(a_k)$ qui comporte un nombre impair de facteurs $\mathcal{M}(\cdot)$. En particulier, le déterminant de $M_n = \begin{pmatrix} s_n & a \\ s_{n+1} & b \end{pmatrix}$ est $bs_n - as_{n+1} = -1$. Cette combinaison est divisible par le plus grand diviseur commun de s_n et s_{n+1} , donc ce dernier vaut 1.

3 Lien avec les fractions continues

Pour une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et un nombre x , on pose $M * x = \frac{ax + b}{cx + d}$ et on vérifie facilement que $M_1 * (M_2 * x) = (M_1 M_2) * x$. On a $\mathcal{M}(\alpha) * x = \alpha + \frac{1}{x}$ et plus généralement

$$\mathcal{M}(\alpha_1) \mathcal{M}(\alpha_2) \dots \mathcal{M}(\alpha_n) * x = \alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{\alpha_n + \frac{1}{x}}}}$$

Cette structure de fractions imbriquées les unes dans les autres s'appelle une *fraction continue* et on la note $[\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n; x]$. La fraction continue d'un nombre rationnel s'obtient par divisions euclidiennes successives. On a par exemple $\frac{19}{14} = 1 + \frac{5}{14} = [1; \frac{14}{5}]$ et comme $\frac{14}{5} = 2 + \frac{4}{5} = [2; \frac{5}{4}]$, on en déduit que $\frac{19}{14} = [1; 2; \frac{5}{4}]$. Comme $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4} = [1; 4]$, on a finalement $\frac{19}{14} = [1; 2; 1; 4]$ et l'algorithme est terminé car tous les nombres α_i sont entiers. Remarquons que l'on peut aussi écrire $\frac{19}{14} = [1; 2; 1; 3; 1]$ et on retiendra que pour un nombre rationnel, on peut choisir une fraction continue de longueur paire ou impaire.

Comme $\begin{pmatrix} s_n \\ s_{n+1} \end{pmatrix} = \mathcal{M}(0) \mathcal{M}(a_0) \mathcal{M}(a_1) \dots \mathcal{M}(a_{k-1}) \mathcal{M}(a_k) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a

$$\frac{s_n}{s_{n+1}} = \mathcal{M}(0) \mathcal{M}(a_0) \mathcal{M}(a_1) \dots \mathcal{M}(a_{k-1}) \mathcal{M}(a_k) * \infty = [0; a_0; a_1; \dots; a_{k-1}; a_k],$$

ce qui permet de trouver s_n et s_{n+1} puisque ces deux entiers sont premiers entre eux. Par exemple, comme $200 = [11001000]_2$, on a $\frac{s_{200}}{s_{201}} = [0; 3; 1; 2; 2] = \frac{7}{26}$ donc $s_{200} = 7$ et $s_{201} = 26$. Remarquons que si $a_0 = 0$, la fraction continue devient simplement $\frac{s_n}{s_{n+1}} = [a_1; \dots; a_{k-1}; a_k]$ mais dans tous les cas, elle admet une longueur impaire. Pour la suite, lorsque nous considérerons une fraction continue $[a_1; \dots; a_{k-1}; a_k]$ de longueur impaire, on gardera à l'esprit qu'elle pourrait être de la forme $[0; a_0; a_1; \dots; a_{k-1}; a_k]$ grâce à un décalage d'indice.

4 Dénombrabilité de \mathbb{Q}_+

Toute fraction $\frac{a}{b}$ avec $a \geq 0$ et $b > 0$ peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b} = \frac{s_n}{s_{n+1}}$ pour un certain entier n . Il suffit pour cela d'établir la fraction continue $\frac{a}{b} = [a_1; \dots; a_k]$ de longueur impaire et de considérer le nombre $n = \underbrace{[1 \dots 1]_{a_k}}_{a_k} \underbrace{[0 \dots 0]_{a_{k-1}}}_{a_{k-1}} \dots \underbrace{[0 \dots 0]_{a_2}}_{a_2} \underbrace{[0 \dots 1]_{a_1}}_{a_1}]_2$ exprimé en base 2.

Par exemple, $\frac{19}{14} = [1; 2; 1; 3; 1]$ implique $n = [10001001]_2 = 137$ donc $s_{137} = 19$ et $s_{138} = 14$.
 Pour la fraction inverse, on a la fraction continue $\frac{14}{19} = [0; 1; 2; 1; 4]$ et donc $n = [11110110]_2 = 246$ convient, autrement dit $s_{246} = 14$ et $s_{247} = 19$.

L'application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}_+$ qui envoie un entier $n = \overbrace{[1 \dots 1]_2}^{a_k} \overbrace{[0 \dots 0]_2}^{a_{k-1}} \dots \overbrace{[1 \dots 1]_2}^{a_1} \overbrace{[0 \dots 0]_2}^{a_0}$ sur la fraction $\frac{s_n}{s_{n+1}} = [0; a_0; a_1; \dots; a_k]$ est clairement bijective. Les nombres $\varphi(n)$ avec $n \in \mathbb{N}$ constituent la suite de *Calkin-Wilf* :

n		0		1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12		13		14		15		16
$\varphi(n)$		0		1		$\frac{1}{2}$		2		$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{2}{3}$		3		$\frac{1}{4}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{5}{2}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{5}{3}$		$\frac{3}{4}$		4		$\frac{1}{5}$

Nous voulons trouver maintenant une formule permettant de passer d'un nombre $x = s_n/s_{n+1}$ au suivant. On considère donc la fraction continue $x = [a_1; a_2; \dots; a_k]$ de longueur impaire de sorte que $n = \overbrace{[1 \dots 1]_2}^{a_k} \overbrace{[0 \dots 0]_2}^{a_{k-1}} \dots \overbrace{[0 \dots 0]_2}^{a_2} \overbrace{[1 \dots 1]_2}^{a_1}$. On a alors $n + 1 = \overbrace{[1 \dots 1]_2}^{a_k} \overbrace{[0 \dots 0]_2}^{a_{k-1}} \dots \overbrace{[0 \dots 0]_2}^{a_2} \overbrace{[1]_2}^{a_1} \overbrace{[0 \dots 0]_2}^{a_0}$, donc

$$\frac{s_{n+1}}{s_{n+2}} = \underbrace{[0; a_1; 1; a_2 - 1; a_3; \dots; a_k]}_{\text{longueur impaire}} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{-1 + [a_2; a_3; \dots; a_k]}}}$$

En remplaçant $[a_2; a_3; \dots; a_k]$ par $\frac{1}{x - a_1}$ et en remontant la fraction continue, on trouve

$$\frac{s_{n+1}}{s_{n+2}} = \frac{1}{2a_1 + 1 - x} = \frac{1}{2[x] + 1 - x}$$

Ainsi, on passe d'un nombre x au suivant grâce à l'expression $f(x) = \frac{1}{2[x] + 1 - x}$.

Le lecteur attentif aura remarqué que notre raisonnement pose problème si $a_2 = 0$. Dans ce cas, on a $n = \overbrace{[1 \dots 1]_2}^{a_1}$, $n + 1 = \overbrace{[1]_2}^{a_1} \overbrace{[0 \dots 0]_2}^{a_0}$, donc $x = \frac{s_n}{s_{n+1}} = a_1$ et $\frac{s_{n+1}}{s_{n+2}} = [0; a_1; 1] = \frac{1}{a_1 + 1} = f(x)$. Ainsi, la fonction f est toujours valable.

5 Sous-suites palindromiques

On démontre facilement que $s_k = 1$ si et seulement si k est une puissance de 2 et nous allons montrer que deux "1" consécutifs dans la suite de Stern délimitent une sous-suite palindromique², ce qui revient à montrer que $s_{2^n+m} = s_{2^{n+1}-m}$ pour tous les entiers $n \geq 1$ et $m \in \{1, 2, \dots, 2^n - 1\}$.

Considérons donc un nombre $m = \overbrace{[0 \dots 0]_2}^{b_k} \overbrace{[1 \dots 1]_2}^{b_{k-1}} \dots \overbrace{[1 \dots 1]_2}^{b_1} \overbrace{[0 \dots 0]_2}^{b_0}$ dont on a complété le développement binaire à gauche par des "0" pour avoir $n + 1$ digits. On peut remarquer que $b_k \geq 1$ et on a alors

$$2^n + m = \overbrace{[1 \dots 0]_2}^{b_{k-1}} \overbrace{[0 \dots 1]_2}^{b_{k-1}} \dots \overbrace{[1 \dots 1]_2}^{b_1} \overbrace{[0 \dots 0]_2}^{b_0} \quad \text{et} \quad 2^{n+1} - 1 - m = \overbrace{[1 \dots 1]_2}^{b_k} \overbrace{[0 \dots 0]_2}^{b_{k-1}} \dots \overbrace{[0 \dots 0]_2}^{b_1} \overbrace{[1 \dots 1]_2}^{b_0}$$

2. Ceci est assez évident car une sous-suite en gris dans notre tableau de valeurs s'obtient en intercalant dans la sous-suite précédente les sommes de toutes les paires de nombres consécutifs. Nous voulons donner ici une démonstration faisant appel aux développements binaires et aux fractions continues.

Si k est impair, ces développements binaires indiquent respectivement

$$\frac{s_{2^n+m}}{s_{2^n+m+1}} = [b_0; b_1; \dots; b_{k-1}; b_k - 1; 1] \quad \text{et} \quad \frac{s_{2^{n+1}-1-m}}{s_{2^{n+1}-m}} = [0; b_0; b_1; \dots; b_{k-1}; b_k].$$

On en déduit que $\frac{s_{2^{n+1}-m}}{s_{2^{n+1}-1-m}} = [b_0; b_1; \dots; b_{k-1}; b_k] = \frac{s_{2^n+m}}{s_{2^n+m+1}}$.

En comparant les fractions (irréductibles), on a bien $s_{2^{n+1}-m} = s_{2^n+m}$ (et $s_{2^{n+1}-m-1} = s_{2^n+m+1}$). Le raisonnement s'adapte facilement lorsque k est pair.

6 Lien avec les nombres de Fibonacci

Nous démontrons ici que la valeur maximale atteinte par la suite de Stern entre deux "1" consécutifs est un nombre de Fibonacci³. On montre d'abord par induction sur n que $s_m \leq F_{n+2}$ pour tout entier $m \in \{2^n, \dots, 2^{n+1}\}$. Ceci est facile à vérifier pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons que l'assertion est vérifiée pour deux indices consécutifs ($n - 1$ et n) et considérons un entier $m \in \{2^{n+1}, \dots, 2^{n+2}\}$.

- Si m est pair, disons $m = 2m'$ avec $m' \in \{2^n, \dots, 2^{n+1}\}$, alors $s_m = s_{m'} \leq F_{n+2} < F_{n+3}$.
- Si m est impair, on peut écrire $m = 2m' + 1$ avec $m' \in \{2^n, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ et on a alors $s_m = s_{m'} + s_{m'+1}$. Comme l'un des deux indices (m' ou $m' + 1$) est pair, on a par hypothèse d'induction et le raisonnement précédent $s_m = s_{m'} + s_{m'+1} \leq F_{n+1} + F_{n+2} = F_{n+3}$.

Ainsi l'assertion est vérifiée pour $n + 1$. Il reste à voir qu'il existe un entier $m \in \{2^n, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ tel que $s_m = F_{n+2}$. Le développement binaire de m admet $n + 1$ digits et on y considère une alternance de "0" et de "1".

- Si n est pair, on a $m = \overbrace{[1010 \dots 01]}^{n+1 \text{ digits}}_2$, donc $\frac{s_m}{s_{m+1}} = \overbrace{[1; 1; \dots; 1]}^{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$ et $s_m = F_{n+2}$.

On peut remarquer que $3m = m + 2m = \underbrace{[11 \dots 1]}_{n+2 \text{ digits}}_2 = 2^{n+2} - 1$, donc $m = \frac{2^{n+2} - 1}{3}$.

- Si n est impair, on a $m = \overbrace{[101 \dots 10]}^{n+1 \text{ digits}}_2$, donc $\frac{s_m}{s_{m+1}} = [0; \overbrace{1; \dots; 1}]^{n+1} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$ et $s_{m+1} = F_{n+2}$.

Remarquons que $m = 2 \cdot \underbrace{[1010 \dots 1]}_{n \text{ digits}}_2 = 2 \cdot \frac{2^{n+1} - 1}{3} = \frac{2^{n+2} - 2}{3}$, donc $m + 1 = \frac{2^{n+2} + 1}{3}$.

Pour résumer, on a $s_m = F_{n+2}$ pour $m = \frac{2^{n+2} + (-1)^{n+1}}{3} = 2^n + \frac{2^n - (-1)^n}{3}$. Par la propriété de palindromie, on peut également considérer $m = 2^{n+1} - \frac{2^n - (-1)^n}{3} = \frac{5 \cdot 2^n + (-1)^n}{3}$.

7 Conclusion

Fortement reliée aux développements binaires et aux fractions continues, la suite de Stern possède des propriétés étonnantes. Les personnes voulant approfondir le sujet peuvent consulter l'article de Jean-Paul Delahaye, "La suite de Stern-Brocot, soeur de Fibonacci", paru en octobre 2012 dans la revue "Pour la science".

3. Né à Pise, Leonardo Fibonacci ($\sim 1175 - 1250$) a importé en Occident le savoir mathématique arabe mais il est surtout connu pour sa suite de nombres définis par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ pour $n \geq 0$. On montre facilement par induction sur $n \geq 1$ que $\frac{F_{n+1}}{F_n} = \underbrace{[1; 1; \dots; 1]}_n$.