

POPULATIONSMODELLE

H.R. SCHNEEBELI, WETTINGEN

1. BEOBACHTUNGEN UND FRAGEN

1.1. **Raben.** In der Nähe meines Wohnortes versammeln sich am Abend jeweils zwischen 2000 und 3000 Raben. Es sind die unverpaarten ‘singles’ einer Population, die Nichtbrüter. Sie stellen die grosse Mehrheit der lokalen Rabenpopulation. Eine wichtige und kleine Minderheit sind die Brüter. Das sind Rabenpaare, die ein Territorium in Besitz genommen haben und es verteidigen. Die Rabenpaare leben bis zum Tod eines Partners in stabilen Partnerschaften und versuchen jedes Jahr, Nachwuchs aufzuziehen und auf ein Rabenleben vorzubereiten. Es lohnt sich, Raben genau zu beobachten. Sie sind beeindruckend intelligent und sie sind in der Lage, über Artgrenzen hinweg Beziehungen einzugehen. Raben, die in der Verteidigung gegen Raubvögel mit Elstern zusammenarbeiten, sind keine Seltenheit. Die ‘Freundschaft’ wird auch hier mit gemeinsamen Mahlzeiten gefestigt. Die Langzeitbeobachtung der Raben bringt unerwartete, ja unglaubliche Begebenheiten ans Licht.

Meine Faszination für Raben begründet sich auf einer zwanzigjährigen Erfahrung und Beziehung zum Rabenpaar, in dessen Territorium ich wohne. Sie hat mich motiviert, mich mit einem Populationsmodell für Raben zu befassen. Kann es mit Mitteln der gymnasialen Mathematik gelingen, die Entwicklung der Rabenpopulation nachzubilden? Wie müsste man es anstellen, dass zu dieser Frage eine sinnvolle Maturaarbeit gemacht werden könnte?

1.2. **Forellen.** Ich kann mich stundenlang beim Beobachten an einem Bergsee vergnügen. Beobachten führt mich auf ungewöhnliche Fragen. Stimmt es, dass sich die jungen Forellen bevorzugt im warmen Wasser ganz nahe am Ufer aufhalten? Ist es da nicht zu gefährlich? Gilt die RGT-Regel auch für die Entwicklung der Forellen? Entwickeln sie sich schneller im warmen Wasser, müssen sie vielleicht sogar das gefährvolle lichtdurchflutete Ufergebiet aufsuchen, um in der kurzen Sommerperiode genug zu wachsen, damit sie den Winter überstehen? Ganz unerwartet wurde ich bei solchen Gedanken von einem Angriff einer grösseren Forelle auf Jungtiere der eigenen Art überrascht. Nachdem ich das unerwartete Ereignis zweifelsfrei gesehen hatte, bemerkte ich, dass es sich öfter ereignet. Es ist nicht einfach eine Freveltat einer fehlgeleiteten einzelnen Forelle, es scheint sich um ein systematisches Verhalten zu handeln. Ist vielleicht Kannibalismus eine lohnende Überlebensstrategie für Forellen im Bergsee? Ist die Population der Forellen im Bergsee insgesamt als Superorganismus zu verstehen, bei dem die einzelnen Tiere nur ‘Körperteile’ darstellen? Wie würde ein Populationsmodell aussehen, das einen Fischschwarm als Organismus auffasst und bei dem

Date: 23. Januar 2012.

Kannibalismus ein Mittel ist, um die in Überzahl wachsenden Jungfische so abzuernten, dass die Biomasse der eigenen Art zugute kommt, statt dass sie andere Räuber stärkt? Wir können diese Frage durch Beobachten nicht schlüssig beantworten, aber vielleicht könnte uns ein plausibles mathematisches Modell weiterhelfen.

2. MODELLE

Populationsmodelle lassen sich mit Kenntnissen aus der elementaren Analysis und linearen Algebra schon im Gymnasium angemessen entwickeln. Biologie ist in der Schule weit weniger formalisierbar als Physik. Die meisten Experimente, auf denen Populationsmodelle beruhen, sind qualitativ beschreibend oder quantitativ auf Zählung abgestützt. Daher reichen Kenntnisse und Methoden aus der diskreten Mathematik und elementare Statistik. Die vorbereitende Einarbeitung in Populationsdynamik lässt sich auf lineares, exponentielles und logistisches Wachstum beschränken. Die Beschreibung einer durch Klassen strukturierten Population mit Leslie-Matrizen passt ins Schwerpunktfach PAM.

Wer beabsichtigt, Populationsmodelle als Thema für *Maturarbeiten* vorzuschlagen, muss diese Absicht durch gut geplante Vorbereitung im Mathematikunterricht unterstützen. Im Vergleich zur Physik ist die Einarbeitung in Differential- und Integralrechnung aber nicht zwingend, also können entsprechende Schritte im 10. oder 11. Schuljahr zum Beispiel im Zusammenhang mit diskreter Mathematik eingeflochten werden, also *bevor* die Maturarbeiten in der Regel beginnen. Auch dazu gibt es umfangreiches Übungsmaterial auf www.swisseduc.ch/mathematik, Wachstum und Zerfall (Schülerversion).

Das Forellenthema ist meines Wissens noch unbearbeitet.

Quellen Es gibt zwei verschiedene Populationsmodelle auf swisseduc.ch/mathematik.

- Das *Kormoranmodell* simuliert Fortpflanzung und Einwanderung mit affinen Abbildungen und zeigt, dass man mit Jagen die Kormoranpopulation stabilisieren könnte.
- Das Modell der *Rabenpopulation* mit linearen oder quadratischen Funktionen und Matrizen. Es kommt zum Schluss, dass Jagen die Raben nicht fernhalten kann.

Es ist nur fair, diese Texte Schülern nicht abzugeben, schon gar nicht als ‘Muster’. Sonst werden sie der Unbefangenheit und Narrenfreiheit beraubt, die Anfänger dringend zum Sammeln von Erfahrungen und zum Lernen benötigen.

Methodik und Werkzeuge Die Bearbeitung der Beispiele wird enorm erleichtert, wenn technische Teilaufgaben (zB Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren, Aufzeichnen der Graphen) an eine geeignete Software delegiert werden können. Dabei genügen schon bescheidene Hilfsmittel: ein CAS-Taschenrechner oder die entsprechende Software für den Laptop oder PC, zum Beispiel TI-voyage, TI-Nspire oder die Freeware wxMaxima oder Octave. Der Einsatz solcher Hilfsmittel ohne gute begriffliche Vorbereitung ist natürlich zwecklos. Er ist für die Verwirklichung der skizzierten Vorhaben aber unumgänglich, weil sonst die oft wiederholte Beschäftigung mit automatisierbaren Rechnungen bei der Diskussion der Modelle viele Kräfte binden und von der Hauptsache nur ablenken würde.