

# Was ist die Wurzel aus 36?

Meike Akveld, Alexander Caspar  
akveld@math.ethz.ch, caspar@math.ethz.ch

3. Februar 2014

## Einleitung

Seit dem Herbstsemester 2009 können ETHZ-Studienanfänger/innen auf freiwilliger Basis ihr mathematisches Schulwissen überprüfen.

Im Rahmen einer mathematischen Grundlagenvorlesung am Departement Mathematik erhalten sie in der ersten Semesterwoche eine Einladung zu einem Online-Selbsteinschätzungstest mit 28 oder 29 Multiple-Choice-Fragen. Der Test unterliegt dabei keinen wissenschaftlichen Standards der Testkonstruktion. Die Zusammenstellung der Fragen orientiert sich an vorgängigen Tests am Departement Mathematik, Erfahrungen am Lehrstuhl Mathematik und Ausbildung und weiteren Studien (HSGYM). Die Fragen verteilen sich auf Algebra, Trigonometrie, Funktionen, Folgen & Reihen, Differential- und Integralrechnung, Analytische Geometrie in Ebene und Raum sowie Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

In den fünf Durchläufen lag die Teilnahme jeweils über 50%, im HS 2013 bei ca. 64% (1893 von 2945 Einladungen). Für die Bearbeitung empfehlen wir 50 bis 60 Minuten – mit Papier und Stift als einzige Hilfsmittel.

Die Evaluationen zeigen, dass der Test als Selbsteinschätzungsinstrument bei den Studierenden sehr gut ankommt. Nach der Eingabe erhalten sie Rückmeldungen via Lösungen und eine Einordnung der eigenen Leistung im Vergleich zur Gesamtheit der Teilnehmenden.

Daneben gibt die Teststatistik den Mathematikdozierenden Auskunft, was die Studierenden mitbringen und was nicht.

In diesem Bericht stellen wir Beobachtungen an ausgewählten Aufgaben vor. Teile dieser Aussagen sind allenfalls länger bekannt, andere sind unter Umständen neu und können eine Diskussion anregen.

Um den Test weiter unvoreingenommen anbieten zu können, bitten wir Sie, die Fragen nicht zu streuen.

## Eine Auswahl von Fragen

Über die Jahre zeigen die Studierenden ein ähnliches Antwortverhalten bei den einzelnen Aufgaben. Die Rangfolge der Erfolgsquoten variiert kaum. Jeder Jahrgang hat mit den gleichen Fragen und Themen mehr oder weniger Schwierigkeiten.

Bei jeder Frage ist genau eine Antwort korrekt, mit drei oder vier falschen Alternativen. Dieses Jahr gab es zum ersten Mal die Auswahl “Weiss ich nicht.” Wir können aber nicht unterscheiden, ob dieses “Weiss ich nicht.” als “Nie gesehen.” oder “Wieder vergessen.” zu interpretieren ist.

**Aufg.1:** Die Schnittmenge eines Würfels mit einer Ebene sei ein Vieleck. Bestimmen Sie die maximale Anzahl von Ecken dieses Vielecks.

- a) 3      b) 4      c) 6      d) 8  
e) Keine der anderen Antworten ist korrekt.

Diese elementare Aufgabe, die das Raumvorstellungsvermögen prüft, wird nur von 30% korrekt beantwortet, am beliebtesten ist die Antwort 4.

Dieses schlechte Resultat wirft die Fragen auf, ob wir in der Mittelschule nicht wieder vermehrt das Raumvorstellungsvermögen schulen sollten: Nicht nur für Ingenieure aber auch zum Beispiel für angehende Ärzte ist das Raumvorstellungsvermögen von grosser Bedeutung.

**Aufg.2:** Welcher der folgenden Ausdrücke ist für  $a, b > 0$  gleich

$$\ln(a^4b^2) - \ln(a^2b^{-2})$$

- a)  $6 \ln(a)$       b)  $2 \ln(a) - 4 \ln(b)$   
c)  $\frac{\ln(a^2b)}{\ln(ab^{-1})}$       d)  $\ln(a^2b^4)$   
e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Jede Mathematiklehrperson weiss, dass die Logarithmengesetze immer wieder zu Problemen führen, und auch unbeliebt sind.

Hier sind die 23% “Weiss ich nicht.” wohl als “Wieder vergessen.” zu interpretieren. Von den übrigen Antworten sind 72% korrekt das heisst, unter dem Strich beantwortet doch 55% die Frage korrekt.

**Aufg.3:** Bestimmen Sie  $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ .

- a) 0      b)  $\frac{1}{2}$       c)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       d)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       e) 1  
f) Das geht nur mit einem Taschenrechner.

Hier wählen 12% “Weiss ich nicht.,” was ebenfalls als “Wieder vergessen.” zu interpretieren ist. Von den übrigen Teilnehmenden beantworten 67% die Aufgabe korrekt – aber 18% wählen die Option “Das geht nur mit einem Taschenrechner”.

Bei der Evaluation bemerken viele Studierende, dass sie nicht gewöhnt sind, ohne Taschenrechner oder Formelsammlung ihr Wissen abzurufen.

**Aufg.4:** Gegeben sei die Ebene  $E$  mit  $E : x + 2y - z = 4$ .

Welche der folgenden Ebenen ist parallel zu  $E$  aber nicht identisch?

a)  $F : 2x + 4y - 2z = 8$

b)  $G : \begin{cases} x = 2 + 2s + t \\ y = 2 - s \\ z = 2 + t \end{cases}$

c)  $H : \begin{cases} x = 2 + 2s + t \\ y = 2 + s \\ z = 2 + t \end{cases}$

d)  $L : \begin{cases} x = 2 + 4s - t \\ y = -2s \\ z = -t \end{cases}$

Diese Aufgabe ist sicher schwieriger als die bisherigen, und 32% wählen die Möglichkeit “Weiss ich nicht.”. In diesem Fall bedeuten diese wahrscheinlich tatsächlich “Nie gesehen.,” weil diese Probleme nicht (mehr) oder nur sehr knapp behandelt wurden. Die Vektorgeometrie kommt meistens erst am Ende der Gymnasialzeit, und aus Zeitmangel wird unter Umständen auf die Ebenen oder zumindest die Parameterdarstellung der Ebene verzichtet. Erschwert wird die Aufgabe, indem die Variante a) zwar parallel aber auch identisch, und damit falsch ist. Dass unter dem Strich nur 27% der Anfänger an der ETH die Aufgabe korrekt beantworten, ist bedauerlich, da Vektorgeometrie in vielen Ingenieurvorlesungen eine grosse Bedeutung hat.

**Aufg.5:** Welchen geometrischen Ort beschreibt die Gleichung:

$$x^2 + 6x + y^2 - 7 = 0$$

- a) Einen Kreis mit Mittelpunkt  $(3, 0)$  und Radius  $r = 4$
- b) Einen Kreis mit Mittelpunkt  $(-3, 0)$  und Radius  $r = 4$
- c) Einen Kreis mit Mittelpunkt  $(-3, 0)$  und Radius  $r = 16$
- d) Einen Kreis mit Mittelpunkt  $(3, 0)$  und Radius  $r = \sqrt{7}$
- e) Eine nach unten geöffnete Normalparabel mit Scheitel bei  $(-3, 16)$

Diese bislang klassische Aufgabe aus der analytischen Geometrie wird heutzutage noch von knapp 40% der Studierenden richtig beantwortet.

Interessant ist, dass etwa 15% die Variante d) mit Radius  $r = \sqrt{7}$  wählen.

**Aufg.6:** Der Grenzwert  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h}$  ist gleich ...

- a) 0.
- b)  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ .
- c)  $\frac{1}{2}$ .
- d)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .
- e)  $\infty$ .

Nicht gewusst haben diese Aufgabe 20%, und unter dem Strich antworten nur 22% korrekt. Plausibel erscheinen den Studierenden die Optionen 0 und  $\infty$ . Dies leuchtet vielleicht ein, unter Betrachtung des Grenzverhaltens im Nenner oder nur im Zähler.

Jedoch sollte jede/r Schüler/in mit profunden Kenntnissen des Differenzen- und Differentialquotienten diesen Term als Ableitung der Wurzelfunktion an der Stelle  $x_0 = 2$  erkennen. Daneben gibt es auch Alternativberechnungen mit einer geschickten Ergänzung oder im Schwerpunktfach PAM mit der Regel von Bernoulli - de l'Hôpital.

In zwei weiteren Aufgaben müssen die Schüler / Studierenden jeweils den Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 1}{10n^3 + n + 21}$  und  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$  berechnen, und sind dabei wesentlich erfolgreicher. Die Erfolgsquote dieser Aufgaben liegt über die Jahre im oberen Bereich der Erfolgsquoten aller Aufgaben.

**Aufg.7:**

1. Das Integral  $\int_0^2 3x^2 dx$  ist gleich ...

- a)  $\frac{4}{3}$     b) 2    c)  $\frac{8}{3}$     d) 4    e) 8

2. Das Integral  $\int_0^1 e^{-2t} dt$  ist gleich ...

- a)  $1 - \frac{1}{e^2}$     b)  $\frac{1}{2e^2}$     c)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{e^2}$   
d)  $1 - \frac{1}{2e^2}$     e)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2}$

3. Das Integral  $\int_{-1}^1 |t| dt$  ist gleich ...

- a) 0    b) 1    c) 2    d) 4  
e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Bei Fragen zur Integralrechnung hatten die Studierenden wenig Erfolg. Daher haben wir im Herbst 2013 die Frage 1 oben zur Kontrolle ergänzt. Nur 10% geben an, die Antwort nicht zu wissen, und die übrigen Teilnehmenden antworten zu 94% korrekt – dies ist sehr erfreulich! Dagegen beantworten nur 37% die anderen beiden Aufgaben korrekt.

**Aufg.8:** Die Wurzel aus 36 ...

- a) Gibt es nicht.  
b) Ist gleich  $\pm 6$ .  
c) Ist gleich 6.  
d) Ist gleich  $-6$ .  
e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Diese Frage hatten wir nur im Herbst 2009 gestellt. Sie scheint einfach, aber nur 34% antworteten richtig. Dagegen wählten 65% die zweite Variante, und glauben offenbar, dass die (Quadrat-)Wurzel nicht eindeutig definiert ist. Unsere Vermutung ist, dass die Schüler/innen das Lösen der Gleichung  $x^2 = 36$  mit dem Wurzelziehen durcheinanderbringen. Die Lösungen der

Gleichung sind  $x_{1,2} = \pm\sqrt{36}$ , aber das  $\pm$ -Zeichen ist nicht in der Wurzel inbegriffen.

Aufgrund des erraticen Antwortverhaltens der Studierenden haben wir diese Aufgabe in den folgenden Jahren nicht mehr gestellt. Es war zu auffällig, dass die Erfolgsquote bei dieser Frage nicht mit den Gesamtergebnis korrelierte. Auch insgesamt erfolgreiche Teilnehmende wussten die Antwort nicht, und vice versa.

Die anderen Fragen korrelieren insgesamt gut mit dem Gesamtergebnis und sind bezüglich Schwierigkeit heterogen.

## **Zusammenfassung**

Diese Auswahl an Aufgaben gibt Ihnen ein erstes Bild des Tests, welchen wir Ihren Schüler/innen anbieten. Jede Form von Rückmeldung ist willkommen. Genauere Analysen der Fragen folgen.