

V S M P
S S P M P
S S I M F

Bulletin

Mai 2026 – Mai 2026 – Maio 2026

N° 161



V S M P
S S P M P
S S I M F

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica



Kräfte in zwei Dimensionen



Messen Sie die beim Gehen, Springen und anderen Bewegungen wirkenden Kräfte.

Vermitteln Sie Ihren Schüler:innen mithilfe der Kraftplattform Go Direct® Force Plate ein tieferes Verständnis für Kräftesysteme. Dieses vielseitige Messinstrument erfasst laterale und normale Kräfte und ermöglicht somit Experimente mit Kräften in zwei Dimensionen.

Go Direct® 2-Axis Force Plate

Messen von normalen und lateralen Kräften gleichzeitig – ideal für den Physik- oder Technikunterricht.



12%

**Frühlingsrabatt
bis 31. Mai 2026**

Go Direct® Force Plate

Messen der Kräfte, die beim Auftreten, Springen und anderen Bewegungen im menschlichen Grössenmassstab entstehen.



[Zum Produkt](#)

Lateral Force Accessory

In Kombination mit der Go Direct- oder einer Standard-Kraftmessplatte entsteht ein vielseitiges Werkzeug zur Messung von seitlichen und normalen Kräften.



[Zum Produkt](#)

Activities using the Go Direct Force Plate



- Hangtime-Analyse zur Bestimmung der Sprunghöhe
- Untersuchung des Gleichgewichtssinns
- Untersuchung des Übergangs von statischer zu kinetischer Reibung
- Untersuchung der Kräfte an einer Leiter
- Untersuchung der Kraftkomponenten bei einer Neigung



[Kit herunterladen \(auf Englisch\)](#)



[Zum Produkt](#)

Besuchen Sie unseren Webshop | educatec-systems.ch

Bulletin N° 161

Inhaltsverzeichnis

VISIONSCIENCE	4
Klemens Koch	
Bericht über eine gelungene fachübergreifende Weiterbildung mit schweizweiter Teilnahme	4
Lola Hostettler	
Bilan d'une formation continue interdisciplinaire réussie à l'échelle nationale	5
Arno Gropengiesser	
Un successo la formazione interdisciplinare per docenti a livello svizzero	6
DEUTSCHSCHWEIZERISCHE MATHEMATIKKOMMISSION	8
Georg Keller	
Formel von Faà di Bruno: Eine alternative Herleitung	8
DMK	
Kurs: Einführung in die Nichtstandardanalysis	13
ETH Zürich	
Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht	14
ETH Zürich	
Der goMATH Girls' Circle an der ETH	15
SMG/DMK/ETH	
Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht	16
Herbert Bruderer	
Taschenrechner: vom Abakus zur Curta	18
Schweizerische Mathematische Gesellschaft/Société Mathématique Suisse	
Matura Awards 2026	21
COMMISSION ROMANDE DE MATHÉMATIQUE	24
Yves Roisin	
Initiation à la modélisation mathématique d'un phénomène	24
CRM	
Colloque annuel: Les problèmes du prix du millénaire	31
DEUTSCHSCHWEIZERISCHE PHYSIKKOMMISSION	32
Martin Lieberherr	
Abstandsgesetz mit Photodiode	32
Hans Peter Dreyer	
Vom Spin der theoretischen Physik zum MRI im Spital	34
ETH Zürich / IYPT 2026	
Teachers Day at the IYPT 2026	37

Internet-Adressen – *Adresses Internet*

www.vsmf.ch – www.sspmp.ch – www.ssimf.ch

Titelseite – *Page de Titre*

Organisationskomitee des Kongresses visionScience. Artikel auf Seite 4 in dieser Ausgabe.

Klemens Koch

Gymnasium Biel-Seeland (BE), Gesamtverantwortlicher OK visionScience, Klemens.Koch@gbsl.ch

Bericht über eine gelungene fachübergreifende Weiterbildung mit schweizweiter Teilnahme

Um lernförderlich und zeitgemäss zu unterrichten, vertiefen wir Lehrpersonen uns regelmässig in unser Fach und blicken aber auch seitwärts und vorwärts. Wenn das im Austausch unter 170 Lehrpersonen, Atelieranbietenden und Referierenden aus der Mathematik, Physik, Chemie, Biologie, Informatik und Geografie möglich ist, können wir neue Ideen mitnehmen und uns weiterentwickeln. Dazu bot der Kongress visionScience vom 22. – 24. Januar 2026 Gelegenheit an der ETH Zürich auf dem Hänggerberg. Er steht in einer Reihe von Kongressen wie «MuFiMa», (Musica-Fisica-Matematica), 1999, Locarno, «Science Cuisine», 2013, Sion und «scientiæ & robotica» 2018, EPFL.

Die Erwartungen an die Bildung ändern schnell, die Weiterentwicklung der Gymnasialen Maturität fördert und fordert eine öffentliche Diskussion. Nur wenn die Lehrpersonen die Ideen selber aufnehmen und sich Visionen zu eigen machen, ändert sich der Unterricht. Mit dieser Überzeugung begann das OK aus den Fachverbänden der obengenannten Fächer (SVIA, VSGg, VSMP und VSN) vor mehr als zweieinhalb Jahren Themen zu suchen, welche die Bildung prägen werden, und fokussierte schliesslich auf die generationenübergreifende Aufgabe der Nachhaltigkeit in ihrer ganzen Breite.

Dabei entstand ein zweieinhalbtägiges Programm mit Vorträgen zum Klimawandel (Reto Knutti, ETHZ), zur Müdigkeit, sich damit zu beschäftigen (Michael Hermann, Sotomo), zur Nachhaltigkeit und Data Science (Antoinetta Mira, USI), zur Energiewende und Photovoltaik (Christophe Ballif, EPFL), zur Transportoptimierung (Alessio Figalli, ETHZ) und über den irdischen Horizont hinaus zur Planetenforschung (Simon Stähler, ETHZ).

Über 50 Ateliers ergänzten die Vorträge, vor allem mit fachübergreifenden Themen aber auch mit fachbezogenen. So wurden viele Fragen zur Nutzung und Anwendung von KI diskutiert, Chancen der Digitalisierung aufgezeigt und hinterfragt. Und viele Ateliers zeigten fachspezifische Möglichkeiten, neue Ansprüche an die gymnasiale Bildung aufzunehmen. Mit der Chance, in der Schweiz mit fachlich sehr gut ausgebildeten Lehrpersonen den Unterricht bestreiten zu können, sind auch Wege zu suchen, wie neue und nicht fachgebundene Themen von uns Lehrpersonen angepackt werden. Das genaue Programm finden Sie auf der Webseite www.visionsscience26.ch.

In der Rückschau können wir Vieles an diesem Kongress als gelungen bezeichnen, so hat auch die Evaluation fast durchgehend positive Rückmeldungen gebracht. Die Zusammenarbeit unter so vielen Fächern wurde als sehr bereichernd erlebt, aber etwas mehr Raum für den freien Austausch zwischen den Teilnehmenden mit der Möglichkeit zur Verarbeitung des Gehörten wurde gewünscht. Die Terminierung Ende Januar mitten in der Zeit des Semesterabschlusses an vielen Schulen kann sicher diskutiert werden, wobei für einen Anlass an einer Hochschule durch andere Termine viele Rahmenbedingungen gegeben sind und jeder andere Termin auch Nachteile gehabt hätte. Die ehrenamtliche Arbeit des Organisationskomitees war sicher eine grosse Belastung, die Erfahrungen der Zusammenarbeit aber auch eine grosse Bereicherung. Es fehlt leider in der Schweiz eine Unterstützung der öffentlichen Hand für solche nationale Weiterbildungsanlässe und vorhandene Mittel werden anders verwendet. Es wird auch in Zukunft wichtig sein, dass die Lehrpersonen und ihre Verbände Initiativen zur Weiterbildung ergreifen, intrinsische Motivation verbessert das Lernen nicht nur bei Schülerinnen und Schülern. Ebenso unersetzlich sind das soziale Rahmenprogramm und das Anliegen, Lehrpersonen miteinander ins Gespräch zu bringen. In diesem Sinne werden nun Wege gesucht, diese Kongresse zu verstetigen und den Keim für künftige Kongresse zu legen.

Lola Hostettler

Collège de Gambach (FR), membre du comité d'organisation, Lola.Hostettler@edufr.ch

Bilan d'une formation continue interdisciplinaire réussie à l'échelle nationale

Le congrès VisionScience, organisé du 22 au 24 janvier 2026 à l'ETH Zurich, s'est inscrit dans une dynamique de formation continue interdisciplinaire réunissant plus de 170 enseignant-es, animateur-trices d'ateliers et intervenant-es, issus des domaines des mathématiques, de la physique, de la chimie, de la biologie, de l'informatique et de la géographie.

Cet événement visait à favoriser l'échange de pratiques pédagogiques et à soutenir le développement professionnel des enseignant-es dans un contexte éducatif en mutation. Suite à l'avènement de la réforme de la maturité gymnasiale, le comité d'organisation — composé de membres des associations professionnelles disciplinaires ASEG, SSIE, SSPMP et SSPSN — a orienté la réflexion vers des thématiques d'avenir, en particulier la durabilité envisagée comme un enjeu intergénérationnel majeur.

Le congrès a proposé plusieurs conférences animées par des scientifiques de renom aussi pointus qu'engagés. Reto Knutti (ETH Zurich) a ainsi proposé une analyse approfondie des dynamiques du changement climatique, tandis que Michael Hermann (Sotomo) a examiné le phénomène croissant de lassitude sociétale face à ces enjeux, apportant un éclairage complémentaire sur les dimensions sociales de cette problématique.

Dans une perspective interdisciplinaire, Antoinetta Mira (USI) a mis en évidence le rôle central de la science des données dans l'analyse et la gestion des questions liées à la durabilité, soulignant l'importance des approches quantitatives dans la compréhension de systèmes complexes.

Les enjeux énergétiques ont été abordés par Christophe Ballif (EPFL), qui a présenté des solutions concrètes de transition énergétique, notamment à travers le développement du photovoltaïque. Son intervention a également permis d'interroger la question de l'indépendance énergétique dans un contexte géopolitique global marqué par de fortes incertitudes.

Alessio Figalli (ETH Zurich) s'est distingué par une remarquable capacité de vulgarisation en exposant le cadre théorique du transport optimal. Il en a illustré les applications dans des domaines aussi variés que la météorologie, la chimie, la biologie ou encore les systèmes de transport, mettant en évidence la portée transversale de ce modèle mathématique.

Enfin, le congrès s'est ouvert à des perspectives extraterrestres grâce à l'intervention de Simon Stähler (ETH Zurich), dont la présentation a exploré la question fascinante de la vie au-delà de la Terre, en particulier sur Mars.

Ces interventions ont été complétées par plus de cinquante ateliers disciplinaires et interdisciplinaires, théoriques ou pratiques tous pensés spécifiquement pour l'enseignement gymnasial. Une attention particulière a été accordée aux enjeux liés à la numérisation et à l'intelligence artificielle, tant du point de vue de leurs opportunités pédagogiques que de leurs limites. Vous trouverez le programme complet sur le site web www.visionsscience26.ch ; vous pourrez également y télécharger les documents.

Si les participants ont exprimé le souhait de disposer de davantage de temps pour les discussions informelles et l'appropriation des contenus lors d'événements futurs, l'évaluation du congrès est unanimement positive soulignant la richesse des contenus et des échanges interdisciplinaires.

Peu de fonds publics sont alloués à ce genre de manifestation. Pendant deux ans, c'est bénévolement que le comité d'organisation s'est consacré à l'élaboration du congrès, un travail passionnant mais très exigeant. Les associations de branches souhaitent donc à présent trouver des moyens de pérenniser cette pratique devenue rituelle à l'échelle nationale «MuFiMa», (Musica-Fisica-Matematica), 1999, Locarno, « Science Cuisine », 2013, Sion, « scientiae & robotica » 2018, EPFL.

La motivation intrinsèque est un facteur majeur de réussite académique. Le comité d'organisation de Vision Science en est convaincu, ce principe s'applique tout autant aux élèves qu'à leurs enseignant-es. C'est un élan scientifique rigoureux, créatif et engagé que le congrès espère avoir transmis à tous ses participant-es.

Arno Gropengiesser

Liceo cantonale di Locarno (TI), membro del comitato d'organizzazione, groppi@bluewin.ch

Un successo la formazione interdisciplinare per docenti a livello svizzero

Come restare aggiornati in un mondo della scuola in costante evoluzione? Confrontandosi, discutendo, e guardando oltre i confini della propria disciplina. È ciò che hanno fatto i 170 partecipanti al congresso visionScience, svoltosi dal 22 al 24 gennaio 2026 all'ETH di Zurigo, riunendo insegnanti, formatori e relatori di matematica, fisica, chimica, biologia, informatica e geografia da tutta la Svizzera.

L'incontro si inserisce nella tradizione dei grandi congressi interdisciplinari ideati dalle associazioni professionali SSII, asig, SSIMF e ASISN) ha lavorato per definire un programma capace di stimolare una riflessione collettiva sul ruolo della scuola di fronte ai cambiamenti globali. Ne è nato un ricco calendario di due giorni e mezzo, con interventi che hanno spaziato dal cambiamento climatico (Reto Knutti, ETHZ) alla fatica di affrontarlo (Michael Hermann, Sotomo), dalla data science per la sostenibilità (Antonietta Mira, USI) all'energia fotovoltaica (Christophe Ballif, EPFL), dal trasporto sostenibile (Alessio Figalli, ETHZ) fino alla ricerca planetaria (Simon Stähler, ETHZ).

Per oltre due anni e mezzo il comitato d'organizzazione (in cui sedevano rappresentanti delle associazioni professionali SSII, asig, SSIMF e ASISN) ha lavorato per definire un programma capace di stimolare una riflessione collettiva sul ruolo della scuola di fronte ai cambiamenti globali. Ne è nato un ricco calendario di due giorni e mezzo, con interventi che hanno spaziato dal cambiamento climatico (Reto Knutti, ETHZ) alla fatica di affrontarlo (Michael Hermann, Sotomo), dalla data science per la sostenibilità (Antonietta Mira, USI) all'energia fotovoltaica (Christophe Ballif, EPFL), dal trasporto sostenibile (Alessio Figalli, ETHZ) fino alla ricerca planetaria (Simon Stähler, ETHZ).

A completare le conferenze, oltre 50 atelier tematici hanno affrontato questioni di grande attualità: l'uso dell'intelligenza artificiale nella didattica, le opportunità e i limiti della digitalizzazione, e le nuove competenze richieste dall'educazione liceale di domani. L'obiettivo: trovare modalità per integrare i temi trasversali nei piani di studio, valorizzando il sapere disciplinare degli insegnanti svizzeri, ma anche la loro capacità di rinnovarsi.

Il bilancio finale è ampiamente positivo: le valutazioni dei partecipanti parlano di un evento riuscito, capace di creare sinergie tra aree di sapere diverse e di alimentare un clima di collaborazione e curiosità. Alcuni docenti hanno espresso il desiderio di avere più spazi per lo scambio informale, ma l'entusiasmo generale ha superato ogni aspettativa.

Resta aperta la questione del sostegno istituzionale: in Svizzera mancano ancora fondi pubblici stabili per iniziative di formazione continua di respiro nazionale. Il congresso visionScience ha dimostrato però quanto la motivazione intrinseca e la passione degli insegnanti possano supplire a queste carenze — e quanto sia prezioso, anche socialmente, creare momenti d'incontro tra colleghi di discipline diverse.

Il gruppo di lavoro che ha condiviso questa esperienza sta già pensando a come dare continuità al progetto e immaginare le prossime tappe di un percorso che, come il nome stesso suggerisce, unisce visione e scienza per una scuola capace di guardare al futuro.



Organisationskomitee/comité/comitato v. l. n. r: Franz Meier, Klemens Koch, Hansjürg Stocker, Lola Hostettler, Ursula Zehnder, Arno Gropengiesser, Andreas Bartlome (es fehlen auf dem Foto: Philippe Hertig, Tanja Jäger, Andrea Leu, Marcel Pilloud, Anina Steinlin, Josef Züger)



Alessio Figalli



Arno Gropengiesser



Hans Peter Dreyer



Impressionen

Georg Keller
georg.keller@shinternet.ch

Formel von Faà di Bruno: Eine alternative Herleitung

1. Einleitung

Wenn $h_1(x), h_2(x)$ genügend reguläre Funktionen sind, besagt die Produktregel der Differentialrechnung, dass $(h_1 \cdot h_2)' = h_1' \cdot h_2 + h_1 \cdot h_2'$ ist. Und für höhere Ableitungen und/oder das Produkt von mehr als zwei Funktionen gilt die wohlbekannte verallgemeinerte Produktregel

$$\frac{d^n}{dx^n} (h_1 \cdot h_2 \cdot \dots \cdot h_m) = \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_m=n \\ i_k \geq 0}} \frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \dots \cdot i_m!} \cdot h_1^{(i_1)} \cdot h_2^{(i_2)} \cdot \dots \cdot h_m^{(i_m)}, \text{ für alle } n, m \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

welche im Spezialfall $h_1(x) = h_2(x) = \dots = h_m(x) =: h(x)$ zur Formel

$$\frac{d^n}{dx^n} (h(x))^m = \sum_{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n}^{m, n} \frac{n! \cdot m!}{\prod_{j=0}^n [(j!)^{\varepsilon_j} \cdot \varepsilon_j!]} \cdot (h^{(0)})^{\varepsilon_0} \cdot (h^{(1)})^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot (h^{(n)})^{\varepsilon_n}, \text{ für alle } n, m \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

führt, wobei in der Summe $\sum_{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n}^{m, n}$ über alle Folgen $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ mit $\sum_{j=0}^n \varepsilon_j = m$ und $\sum_{j=0}^n j \cdot \varepsilon_j = n$ summiert wird.

Vor einigen Wochen machte mich einer meiner Bekannten darauf aufmerksam, dass es nicht nur bei *Produkten* von Funktionen (vgl. (1)), sondern überraschenderweise auch bei der *Verkettung* $f(g(x))$ zweier Funktionen f und g eine bemerkenswerte, elegante Formel zur direkten Bestimmung der höheren Ableitungen gibt. Diese „Formel von Faà di Bruno“¹ könne aber nicht mehr so einfach wie (1) hergeleitet werden², sondern erfordere auch Ideen, die nicht wirklich naheliegend seien. - Obwohl ich diese Formel in meinen mathematisch/physikalischen Berufsjahrzehnten nie gebraucht oder vermisst hatte, war ich aus Strukturverständnisgründen doch neugierig geworden, und ich setzte mir zum Ziel, diese mir unbekannte Formel eigenständig herzuleiten. Und als dieses Ziel erreicht war, verglich ich meine Herleitung mit denjenigen, welche ich ohne grossen Aufwand in der mathematischen Literatur (vgl. z.B. [3]) fand. Es zeigte sich, dass sich meine Herleitung mindestens im vielleicht zentralsten Punkt meiner Argumentation³ von den anderen Herleitungen unterscheidet. Obwohl meine Herleitung weder die kürzeste noch die raffinierteste ist, ist es hoffentlich trotzdem sinnvoll, sie im nachfolgenden Kap. 2 vorzustellen, weil sie erstens ziemlich direkt ist und zweitens - wenigstens aus Sicht von Personen, denen das Thema „erzeugende Funktionen“ nicht fremd ist - nur auf eigentlich naheliegenden Ideen beruht, also ohne spezielle, glückliche Eingebungen auskommt⁴. Ausserdem scheint es mir denkbar zu sein, dass im Schwerpunkt- oder Ergänzungsfach und bei adäquater Vorbildung der SchülerInnen (wozu ich u.a. ein gewisses Verständnis für Induktionsbeweise zähle) sowohl die grundsätzliche Strategie als auch einige ausgewählte Detailspekte meiner Herleitung erörtert werden könnten.

¹ Francesco Faà di Bruno (1825 – 1888), italienischer Offizier, Mathematiker, Ingenieur, Erfinder, Erzieher, Komponist und Geistlicher [1]. 1855 publizierte er die nach ihm benannte Formel [2], jedoch noch ohne Beweis; einen solchen legte er 1859 vor [3]. Er war aber weder der erste, welcher „seine“ Formel aufstellte, noch der erste, welcher sie bewies; allerdings scheint es nicht klar zu sein, ob und (falls ja) wieviel Faà di Bruno von den z.T. Jahrzehnte früher erschienenen Arbeiten seiner Vorgänger wusste [3].

² Sofern im Mathematikunterricht (wohl am ehesten im Schwerpunkt- oder Ergänzungsfach „Anwendungen der Mathematik“) induktive Beweisverfahren thematisiert werden, könnte der Beweis von (1) ein lohnendes Betätigungsfeld sein.

³ Vgl. die (in Kap. 3 erläuterte) Motivation für (7) und den (in Kap. 2 geführten) Beweis von (7).

⁴ Dies im Gegensatz zu anderen Herleitungen, so z.B. zur gemäss [3] bekanntesten Herleitung.

2. Formel von Faà di Bruno: Formulierung, Beweis

- Satz (Formel von Faà di Bruno): Wenn $f(x)$ und $g(x)$ zwei hinreichend reguläre Funktionen sind, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{d^n}{dx^n} f(g(x)) = \sum_{m=1}^n f^{(m)}(g(x)) \cdot \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} \left[\frac{n!}{\prod_{j=1}^n (j!)^{\varepsilon_j} \varepsilon_j!} \cdot \prod_{k=1}^n (g^{(k)}(x))^{\varepsilon_k} \right] , \quad (3)$$

wobei in der Summe $\sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}^{m,n}$ über alle Folgen $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\sum_{j=1}^n \varepsilon_j = m$ und $\sum_{j=1}^n j \cdot \varepsilon_j = n$ summiert wird.

- Der Beweis dieses Satzes verläuft in drei Schritten:

1. Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ hat $\frac{d^n}{dx^n} f(g(x))$ die Form

$$\frac{d^n}{dx^n} f(g(x)) = \sum_{m=1}^n f^{(m)}(g(x)) \cdot a_{n,m} , \quad (4)$$

wobei die Koeffizienten $a_{n,m}$, $1 \leq m \leq n$, folgende Eigenschaften haben:

$$\square a_{n,m} \text{ ist ein Polynom m. Grades in } g^{(1)}(x), g^{(2)}(x), \dots, g^{(n)}(x) \quad (5)$$

$$\square \text{ genauer: } \begin{cases} a_{n,1} = g^{(n)}(x) \\ a_{n,m} = (a_{n-1,m})' + g'(x) \cdot a_{n-1,m-1} , \text{ für } 1 < m < n \\ a_{n,n} = (g^{(1)}(x))^n \end{cases} \quad (6)$$

Beweis: Via Induktion in n , wobei wir für den Induktionsschritt $((n-1) \rightarrow n)$ benützen, dass

$$\frac{d^n}{dx^n} f(g(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(g(x)) \right) \text{ ist. } \blacksquare$$

- Bemerkung:
- Anhand von (4)&(6) kann man in systematischer Weise alle höheren Ableitungen von $f(g(x))$ rekursiv berechnen; zur Illustration sind in Kap. 4 die Resultate für die Koeffizienten $a_{n,m}$, $1 \leq n \leq 6$, aufgelistet.
 - Die Formel (4) weist genau die in (3) behauptete Grundstruktur auf, und für eine Minderheit der Koeffizienten $a_{n,m}$ kennt man gemäss (6) ihre explizite Form. Um auch für die restlichen Koeffizienten $a_{n,m}$ eine explizite Darstellung zu finden, kann man sich z.B. durch einige beispielhaft berechnete $a_{n,m}$ (vgl. Kap. 4) inspirieren zu lassen. Dies klappte sehr gut für $a_{n,n-1}$, für die übrigen $a_{n,m}$ aber im Wesentlichen nicht. Als erfolgreich erwies sich hingegen die Idee, diejenigen Konsequenzen zu analysieren, welche die Rekursionsbeziehung (6) für die erzeugende Funktion der Koeffizienten $a_{n,m}$ nach sich zieht (vgl. Kap. 3). Dies ist eine Idee, welche nicht wirklich fern liegt, sofern man schon Bekanntschaft mit erzeugenden Funktionen geschlossen hat, und auf diese Weise gelangte ich zur Vermutung, dass die in (7) formulierte Aussage wahr sein könnte.

2. Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $1 \leq m \leq n$ kann $a_{n,m}$ wie folgt geschrieben werden:

$$a_{n,m} = \left(\frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} \left[\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{\lambda \cdot g(x)} \right) \cdot e^{-\lambda \cdot g(x)} \right] \right) \Big|_{\lambda=0} \quad (7)$$

Beweis: Via Induktion in n :

- Induktionsverankerung ($n=1$): Wenn $n=1$ ist, gibt es für m nur den Fall $m=1$; und für $n=m=1$ ergibt die rechte Seite von (7) $\left(\frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} e^{\lambda \cdot g(x)} \right) \cdot e^{-\lambda \cdot g(x)} \right] \right) \Big|_{\lambda=0} = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} [\lambda \cdot g'(x)] \right) \Big|_{\lambda=0} = g'(x)$, was gemäss (6) tatsächlich gleich $a_{1,1}$ ist.

- Induktionsschritt $((n-1) \rightarrow n$ für $n \geq 2$): Betreffend m müssen wir die drei Fälle $m = 1$ resp. $1 < m < n$ resp. $m = n$ untersuchen:

$\Rightarrow$ Der Fall $m = 1$: Die rechte Seite von (7) lautet $\left(\frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{\lambda \cdot g(x)} \right) \cdot e^{-\lambda \cdot g(x)} \right] \right) \Big|_{\lambda=0}$, was dank der Bedingung $\lambda = 0$ einfach $g^{(n)}(x)$ ergibt; gemäss (6) stimmt dies mit $a_{n,1}$ überein.

$\Rightarrow$ Der Fall $1 < m < n$: Sofern dieser Fall nichttrivial sein soll, muss $n \geq 3$ sein; im Folgenden wollen wir daher von $n \geq 3$ ausgehen. Mit Hilfe der Rekursionsbeziehung in (6) und der (nicht explizit formulierten) Induktionsvoraussetzung kann $a_{n,m}$ wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} a_{n,m} &\stackrel{(6)}{=} (a_{n-1,m})' + g'(x) \cdot a_{n-1,m-1} \\ &\stackrel{(7)}{=} \frac{d}{dx} \left(\left(\frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} \left[\left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} e^{\lambda \cdot g(x)} \right) \cdot e^{-\lambda \cdot g(x)} \right] \right) \Big|_{\lambda=0} \right) \\ &\quad + g'(x) \cdot \left(\frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial \lambda^{m-1}} \left[\left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} e^{\lambda \cdot g(x)} \right) \cdot e^{-\lambda \cdot g(x)} \right] \right) \Big|_{\lambda=0} \end{aligned} \quad (8)$$

Jetzt vertauschen wir in der Zeile (8) die zusätzliche Ableitung nach x mit denjenigen nach λ :

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} \left[\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{\lambda \cdot g(x)} \right) \cdot e^{-\lambda \cdot g(x)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} e^{\lambda \cdot g(x)} \right) \cdot e^{-\lambda \cdot g(x)} \cdot \lambda \cdot g'(x) \right] \right) \Big|_{\lambda=0} \\ &\quad + g'(x) \cdot \left(\frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial \lambda^{m-1}} \left[\left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} e^{\lambda \cdot g(x)} \right) \cdot e^{-\lambda \cdot g(x)} \right] \right) \Big|_{\lambda=0} . \end{aligned}$$

Mit $h_1(\lambda) := \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} e^{\lambda \cdot g(x)} \right) \cdot e^{-\lambda \cdot g(x)}$ und $h_2(\lambda) := \lambda \cdot g'(x)$ sehen wir via (1), dass $\left(\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} [h_1(\lambda) \cdot h_2(\lambda)] \right) \Big|_{\lambda=0} = g'(x) \cdot m \cdot \left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial \lambda^{m-1}} h_1(\lambda) \right) \Big|_{\lambda=0}$ ist; also gilt:

$$= \left(\frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} \left[\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{\lambda \cdot g(x)} \right) \cdot e^{-\lambda \cdot g(x)} \right] \right) \Big|_{\lambda=0} ,$$

womit (7) auch für $1 < m < n$ bewiesen ist.

$\Rightarrow$ Der Fall $m = n$: Weder die Induktionsvoraussetzung noch die Bedingung $\lambda = 0$ verwendend, aber die Tatsache, dass die n . Ableitung sowohl nach x als auch nach λ berechnet werden soll, ist die rechte Seite von (7) offenbar gleich $\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} [\lambda^n \cdot (g'(x))^n] = (g'(x))^n$, was gemäss (6) gleich $a_{n,n}$ ist. ■

3. Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $1 \leq m \leq n$ kann (7) deutlich einfacher, nämlich als

$$a_{n,m} = \left(\frac{1}{m!} \frac{d^m}{dx^m} (g(x))^m \right) \Big|_{g=0} \quad (9)$$

geschrieben werden, wobei die Bedingung " $g = 0$ " bedeutet, dass jeder Summand, in dem ein Faktor $g(x)$ auftritt, gleich Null gesetzt wird.

Beweis: Gemäss (7) ist $a_{n,m} = \left(\frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} \left[\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{\lambda \cdot g(x)} \right) \cdot e^{-\lambda \cdot g(x)} \right] \right) \Big|_{\lambda=0}$. Via (1), und die Reihenfolge der Ableitungen nach x resp. λ vertauschend, erhalten wir

$$a_{n,m} = \left(\frac{1}{m!} \left[\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} e^{\lambda \cdot g(x)} \right) \cdot \frac{\partial^{m-k}}{\partial \lambda^{m-k}} e^{-\lambda \cdot g(x)} \right] \right) \Big|_{\lambda=0}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{m!} \left[\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left((g(x))^k \cdot e^{\lambda \cdot g(x)} \cdot (-g(x))^{m-k} \cdot e^{-\lambda \cdot g(x)} \right) \right] \right) \Big|_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{m!} \left[\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{d^n}{dx^n} (g(x))^k \cdot (-g(x))^{m-k} \right] .
\end{aligned} \quad (10)$$

Für $k < m$ enthält der jeweilige Summand von (10) einen Faktor $g(x)$; weil wir aufgrund von (5) wissen, dass im Schlussresultat für $a_{n,m}$ *keine* Summanden mit einem Faktor $g(x)$ auftreten, können wir die Auswertung von (10) wie folgt vereinfachen: Erstens streichen wir alle Summanden mit $k < m$, d.h. das Resultat für $a_{n,m}$ scheint gleich dem Summanden mit $k = m$, d.h. gleich $\frac{1}{m!} \frac{d^n}{dx^n} (g(x))^m$, zu sein. Dieses Resultat weist allerdings noch einen Fehler auf: Beim Berechnen von $\frac{1}{m!} \frac{d^n}{dx^n} (g(x))^m$ entstehen für $m \geq 2$ u.a. Summanden, welche einen Faktor $g(x)$ enthalten, wobei (5) garantiert, dass sich diese Summanden mit ihren Pendanten aus dem Indexbereich $k < m$ zu Null addieren; weil bei uns diese Pendanten jetzt aber fehlen, ist nicht mehr automatisch garantiert, dass nach dem Berechnen von $\frac{1}{m!} \frac{d^n}{dx^n} (g(x))^m$ keine Summanden mit einem Faktor $g(x)$ auftreten. Diese Eigenschaft von $a_{n,m}$ müssen wir daher, zweitens, wohl oder übel von Hand erzwingen, was zu (9) führt. ■

Folgerung: Auf der rechten Seite von (9) die Ableitungen via (2) durchführend, bemerken wir, dass sich die Bedingung " $g = 0$ " elegant dadurch realisieren lässt, dass wir nur diejenigen Summanden mit $\varepsilon_0 = 0$ berücksichtigen:

$$\left(\frac{d^n}{dx^n} (g(x))^m \right) \Big|_{g=0} = \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}^{m,n} \left[\frac{n! \cdot m!}{\prod_{j=1}^n (j!)^{\varepsilon_j} \cdot \varepsilon_j!} \cdot \prod_{k=1}^n (g^{(k)}(x))^{\varepsilon_k} \right] . \quad (11)$$

Aus (4), (9) und (11) erhalten wir schliesslich (3). ■

3. Eine formale Begründung für die Formel (7)

- In diesem Kapitel werden wir der Einfachheit halber *formal* rechnen, d.h. mit den auftretenden Funktionen und Reihen so umgehen, als seien sie hinreichend regulär resp. konvergent. Ob sie es auch wirklich sind, werden wir aber nie abklären, denn es geht hier nicht um einen *Beweis*, sondern nur um ein hoffentlich plausibles *Erraten* von (7). Wie man die Richtigkeit von (7) dann tatsächlich beweisen kann, haben wir im Anschluss an (7) gesehen.
- Wir betrachten die erzeugende Funktion $G(z, w; x)$ der Koeffizienten $a_{n,m}$, d.h. die Potenzreihe

$$G(z, w; x) := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n a_{n,m}(x) z^n w^m , \quad (12)$$

wobei wir ausnahmsweise $a_{n,m}(x)$ statt nur $a_{n,m}$ geschrieben haben, um ausdrücklich auf die x -Abhängigkeit der $a_{n,m}$ aufmerksam zu machen und damit die Schreibweise $G(\cdot, \cdot; x)$ zu rechtfertigen. Wir setzen (6) auf der rechten Seite von (12) ein und erkennen nach kurzer Rechnung, dass $G(z, w; x)$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial x} G(z, w; x) = \left(\frac{1}{z} - g'(x) w \right) \cdot G(z, w; x) - g'(x) w \quad (13)$$

gehört. Daher kann $G(z, w; x)$ geschrieben werden als Summe der (aufgrund von Randbedingungen noch geeignet zu justierenden) allgemeinen Lösung $G_{\text{hom}}(z, w; x)$ des homogenen Teils von (13) und irgendeiner partikulären Lösung $G_{\text{part}}(z, w; x)$ von (13). $G_{\text{hom}}(z, w; x)$ hat die Form $G_{\text{hom}}(z, w; x) = C(z, w) \cdot e^{\frac{x}{z} - g(x) w}$; und $G_{\text{part}}(z, w; x)$ bestimmen wir via Variation der Konstanten, d.h. $G_{\text{part}}(z, w; x) = D(z, w; x) \cdot e^{\frac{x}{z} - g(x) w}$, wobei $D(z, w; x)$ die Differentialgleichung $\frac{\partial}{\partial x} D(z, w; x) = - \left(\frac{\partial}{\partial x} e^{g(x) w} \right) \cdot e^{-\frac{x}{z}}$ erfüllt. Also ist $-D(z, w; x) = \int \left(\frac{\partial}{\partial x} e^{g(x) w} \right) \cdot e^{-\frac{x}{z}} dx$; und mittels partieller

Integration (wobei wir den Faktor $\left(\frac{\partial}{\partial x} e^{g(x)w}\right)$ nicht etwa integrieren, sondern ableiten) erhalten wir $-D(z, w; x) = -z \left(\frac{\partial}{\partial x} e^{g(x)w}\right) \cdot e^{-\frac{x}{z}} + \int z \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{g(x)w}\right) \cdot e^{-\frac{x}{z}} dx$. Iteration der partiellen Integration führt schliesslich zu

$$-D(z, w; x) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{g(x)w}\right) \cdot e^{-\frac{x}{z}} + Q(z, w), \quad (14)$$

wo wir die beliebig wählbare Integrationskonstante $Q(z, w)$ der Einfachheit halber gleich Null setzen.

- Fazit: Unsere obigen formalen Überlegungen suggerieren, dass

$$\begin{aligned} G(z, w; x) &= G_{\text{hom}}(z, w; x) + G_{\text{part}}(z, w; x) \\ &\stackrel{(14)}{=} C(z, w) \cdot e^{\frac{x}{z} - g(x)w} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{g(x)w}\right) \cdot e^{-g(x)w} \end{aligned} \quad (15)$$

ist. Via Reihenentwicklung von $e^{\frac{x}{z}}$ sehen wir, dass der erste Summand auf der rechten Seite von (15) als $\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \cdot \frac{C(z, w) \cdot x^k \cdot e^{-g(x)w}}{k!}$ geschrieben werden kann. Weil gemäss (12) in der gesuchten Lösung von (13) nur *positive* Potenzen von z auftreten und weil auch der zweite Term auf der rechten Seite von (15), d.h. die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} z^n \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{g(x)w}\right) \cdot e^{-g(x)w}$, nur *positive* Potenzen von z aufweist, müssen alle Koeffizienten $\frac{C(z, w) \cdot x^k \cdot e^{-g(x)w}}{k!}$ gleich Null sein, und zwar für alle x und w . Also müssen wir $C(z, w) = 0$ setzen, d.h.

$$G(z, w; x) \stackrel{(15)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{g(x)w}\right) \cdot e^{-g(x)w}. \quad (16)$$

Gemäss (12) und (16) ist daher $\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} w^m = \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{g(x)w}\right) \cdot e^{-g(x)w}$, d.h.

$$a_{n,m} = \left(\frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial w^m} \left[\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{g(x)w}\right) \cdot e^{-g(x)w}\right]\right) \Big|_{w=0}. \quad \blacksquare$$

4. Ergänzung

Entweder rekursiv mittels (6), oder direkt anhand von (9)&(11) resp. (3), erhält man die folgende Liste der Koeffizienten $a_{n,m}$ mit $1 \leq n \leq 6$ (wobei wir der einfacheren Lesbarkeit halber jeweils nur $g^{(j)}$ statt $g^{(j)}(x)$ schreiben):

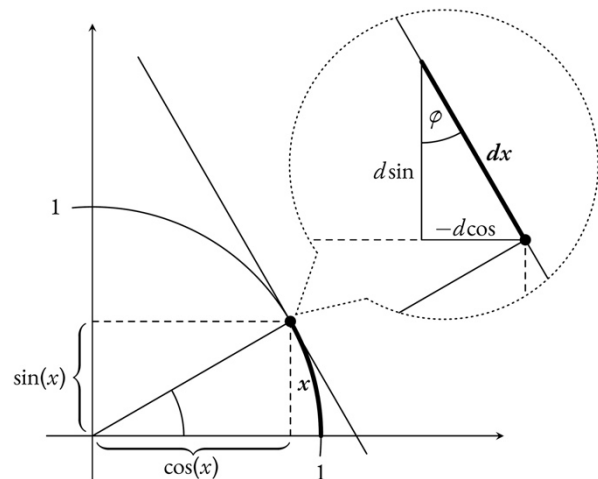
$a_{1,1} = g^{(1)}$	$a_{4,1} = g^{(4)}$	$a_{6,1} = g^{(6)}$
	$a_{4,2} = 3 (g^{(2)})^2 + 4 g^{(1)} g^{(3)}$	$a_{6,2} = 10 (g^{(3)})^2 + 15 g^{(2)} g^{(4)} + 6 g^{(1)} g^{(5)}$
$a_{2,1} = g^{(2)}$	$a_{4,3} = 6 (g^{(1)})^2 g^{(2)}$	$a_{6,3} = 15 (g^{(2)})^3 + 60 g^{(1)} g^{(2)} g^{(3)} + 15 (g^{(1)})^2 g^{(4)}$
$a_{2,2} = (g^{(1)})^2$	$a_{4,4} = (g^{(1)})^4$	$a_{6,4} = 45 (g^{(1)})^2 (g^{(2)})^2 + 20 (g^{(1)})^3 g^{(3)}$
		$a_{6,5} = 15 (g^{(1)})^4 g^{(2)}$
$a_{3,1} = g^{(3)}$	$a_{5,1} = g^{(5)}$	$a_{6,6} = (g^{(1)})^6$
$a_{3,2} = 3 g^{(1)} g^{(2)}$	$a_{5,2} = 10 g^{(2)} g^{(3)} + 5 g^{(1)} g^{(4)}$	
$a_{3,3} = (g^{(1)})^3$	$a_{5,3} = 15 g^{(1)} (g^{(2)})^2 + 10 (g^{(1)})^2 g^{(3)}$	
	$a_{5,4} = 10 (g^{(1)})^3 g^{(2)}$	
	$a_{5,5} = (g^{(1)})^5$	

Referenzen

- [1] https://de.wikipedia.org/wiki/Francesco_Faà_di_Bruno (28.11.25)
- [2] https://de.wikipedia.org/wiki/Formel_von_Faà_di_Bruno (28.11.25)
- [3] Warren P. Johnson: „The Curious History of Faà di Bruno’s Formula”, Amer. Math. Monthly 109 (2002) p. 217-234

Einführung in die Nichtstandardanalysis: Ein neuer Zugang zur Differential- und Integralrechnung

Im Nichtstandardzugang werden Ableitung und Integral über unendlich kleine und unendlich grosse Zahlen statt über Grenzwerte definiert. Das ist für die Lernenden überraschenderweise einfacher und intuitiver und spart unterm Strich mehrere Wochen Unterrichtszeit ein, obwohl keinerlei Abstriche am herkömmlichen Analysisstoff gemacht werden. So hat dieser Ansatz, der im Mathematikstudium in der Regel nicht vorkommt, im Schulunterricht in den letzten Jahren immer mehr Anhänger gefunden.



Die Fortbildung führt in die grundlegenden Gedanken sowie – auf mittlerweile langjähriger Erfahrung beruhend – in Möglichkeiten der unterrichtlichen Umsetzung ein. Arbeitsphasen geben Gelegenheit, selbst mit den neuen Begriffen umzugehen. Auch die philosophischen Hintergründe sowie die Geschichte der Analysis, standard und nichtstandard, sollen beleuchtet werden. Abschliessend werden die heute schon reichhaltig existierenden Informationsquellen für die Vertiefung im Selbststudium vorgestellt.

Referent:	PD Dr. Wilfried Lingenberg, Universität des Saarlandes
Zielpublikum:	Mathematik-Lehrkräfte der Sekundarstufe II
Organisation:	Prof. Dr. Norbert Hungerbühler (ETH), Jonas Gloor (DMK)
Datum und Zeit:	Dienstag, 15. September 2026, 09:30 Uhr – 16:00 Uhr
Kursort:	ETH Zürich
Kurskosten:	CHF 200 CHF 150 für VSMP-Mitglieder und Studierende
Anmeldung:	https://math.ch/DMK2026c/
Anmeldeschluss:	5. September 2026





Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht Programm Herbstsemester 2026

Die Vorträge finden jeweils am Donnerstag um 17.15 Uhr im Hauptgebäude der ETH Zürich im Raum HG G 19.1 statt.

Donnerstag, 22. Oktober 2026
Invariante Flächensummen
Hans Walser

Donnerstag, 19. November 2026
Massvoll irrational – der Goldene Schnitt
Jorma Wassmer (Gymnasium Lerbermatt)

Donnerstag, 26. November 2026
Fostering Digital Literacy: Lessons from Research
Erik Barendsen (Radboud University)

Donnerstag, 3. Dezember 2026
Von der Komplexität, Komplexitätstheorie zu unterrichten
Andreas F. Müller (Ostschweizer Fachhochschule)

Herzlich laden ein: D. Grawehr, N. Hungerbühler, D. Komm, P. Spindler

Diese und weitere Veranstaltungshinweise finden Sie unter:
math.ch/mathematics@school

Der goMATH Girls' Circle an der ETH

Der goMATH Girls' Circle ist ein einzigartiges Programm für Mädchen im Alter von 12 bis 15 Jahren, die sich für Mathematik interessieren. Betreut werden die Mädchen von Dr. Ekaterina Gots vom MNG Rämibühl. Im Zentrum stehen Spass an der Mathematik, Abwechslung zum Schulalltag und eine entspannte Atmosphäre. Auf dem Programm stehen basteln, mathematische Spiele, Arbeitsblätter, knifflige Aufgaben, Zahlenrätsel, Wettbewerbe, YouTube Videos, PPT-Präsentationen über mathematische Konstanten (Pi, goldener Schnitt, Eulersche Zahl,...), kleine Beweise, kombinatorische Aufgaben, Känguru-Aufgaben, Mathe zu verschiedenen Anlässen (Mathe im Advent, Ostern, Rubik-Tag...), Exkursionen und vieles mehr.



Der Girls' Circle findet jeweils am Mittwoch von 14.00 bis 15.45 Uhr im ETH Hauptgebäude statt. Die Teilnahme ist gratis. Für einen Pausensnack ist ebenfalls gesorgt. Weitere Informationen sind der Webseite zu entnehmen:

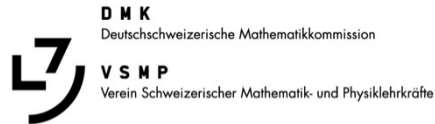
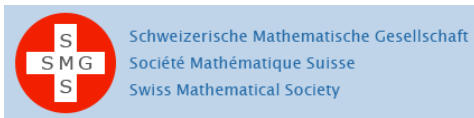


<https://math.ethz.ch/de/news-und-veranstaltungen/veranstaltungen/nachwuchsfoerderung/gomath-girls-circle.html>

GANZ NEU: goMATH Girls' Circle II für die Altersstufe von 15 bis 18 Jahren

Wir würden uns freuen, wenn Sie in Ihren Klassen die Mädchen in der genannten Altersspanne auf den goMATH Girls' Circle an der ETH aufmerksam machen könnten.

Vielen Dank für Ihre Unterstützung und herzliche Grüsse,
Norbert Hungerbühler



36. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht

Die Schweizerische Mathematische Gesellschaft SMG, die Deutschschweizerische Mathematikkommission DMK und die ETH Zürich laden Sie herzlich zu dieser Weiterbildungsveranstaltung ein.

Ort: Kantonsschule Alpenquai Luzern
Datum: Mittwoch, 9. September 2026
Organisation: Philipp Spindler (KS Alpenquai Luzern), Lorenz Halbeisen (ETH), Norbert Hungerbühler (ETH)
Kurskosten: Gegen Entrichtung der Tagungsgebühr von 30 CHF erhalten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer einen Bon für das Mittagessen. Es besteht die Möglichkeit, mit TWINT zu bezahlen. Sonst gern 30 CHF bar passend.
Anmeldung: bis 31. August 2026

Programm

Check-in: Kaffee, Tee, Orangensaft, Wasser und Gipfeli; Einziehen der Tagungsgebühr	09:45 – 10:30 Uhr
Musikalische Einstimmung Begrüssung Einführung: Norbert Hungerbühler	10:30 – 10:50 Uhr
Plenarvortrag in der Aula Lukas Lewark (ETH Zürich): <i>Knoten und Entknotung</i>	10:50 – 11:50 Uhr
Workshops bzw. Vorträge im kleineren Kreis 1: siehe unten	12:00 – 13:00 Uhr
Mittagessen	13:00 – 14:10 Uhr
Plenarvortrag in der Aula Gábor Domokos (Budapest University of Technology and Economics): <i>Mono-monostatic bodies: The story of the Gömböc</i>	14:15 – 15:15 Uhr
Verleihung der SMG Matura Awards	15:15 – 15:35 Uhr
Kaffeepause	15:35 – 16:00 Uhr
Workshops bzw. Vorträge im kleineren Kreis 2: siehe unten	16:00 – 17:00 Uhr
Ende der Veranstaltung	17:00 Uhr

Workshops

- Workshop A
40 Jahre Mathematik und Unterricht - Lehrreiche Erfahrungen
Armin Barth (KS Baden und ETH Zürich)
- Workshop B
Logarithmenerfinder Bürgi - (zurück) in die Schulstube!
Roman Oberholzer (Kantonsschule Alpenquai, Luzern)
- Workshop C
Ein Lernvideo: von der Vorbereitung bis zur Erstellung
Roel Zuidema (Kantonsschule Alpenquai, Luzern)
- Workshop D
Mathematische Modelle in Zeit, Ebene und Raum
Alexander Caspar (ETH Zürich)
- Workshop E
Fibonacci trifft Pascal - Kombinatorische Identitäten entdecken und visuell beweisen mit Pfeiljagd
Regula Krapf (Universität Bonn)
- Workshop F
Einige Beispiele für den Einsatz von Geogebra im Schwerpunktfach SPM und Grundlagenfach MA
Edoardo Sassone (Kantonsschule Alpenquai, Luzern)
- Workshop G
Komplexwertige Funktionen und die Kunst von M.C. Escher
David Rusch (Kantonsschule Uster)

Weitere Informationen zu den Vorträgen, Workshops, Anreise sowie das Anmeldeformular finden Sie unter: <http://www.math.ch/TMU2026>

Herbert Bruderer
Rorschach, bruderer@retired.ethz.ch

Taschenrechner: vom Abakus zur Curta

Schon die alten Römer hatten Taschenrechner. Es handelt sich dabei um digitale Geräte. Leider sind jedoch nur wenige Geräte erhalten. Die jahrhundertealten Zählrahmen sind nach wie vor beliebt und auf manchen Flohmärkten zu finden. Es gibt sie auch in Taschenform. Über 300 Jahre lang wurden logarithmische Rechenstäbe, Rechenscheiben und Rechenwalzen verwendet. Diese analogen Hilfsmittel verschwanden erst in den 1970er Jahren. Lange Zeit waren mechanische Rechenmaschinen zu schwer für unterwegs. Eine Ausnahme bildet die geniale Curta. Weitere Taschenrechner waren die Neperstäbchen, die vielseitigen Proportionalwinkel und die Zahlenschieber.

Rechenbrett

Der jahrtausendealte Abakus gilt als das früheste Rechenhilfsmittel (vgl. Tabelle 1). Es gibt zwei grundlegende Formen, den Legeabakus (Rechentisch, Rechentuch) mit Rechensteinen und den Schiebeabakus (Zählrahmen, Kugelrechner) mit Perlen. Zu letzteren gehört auch der römische Handabakus. Soweit bekannt haben nur drei Originale dieses Taschenrechners überlebt. Sie befinden sich in Aosta, Paris und Rom. Ein viertes Exemplar aus Elfenbein (vgl. Abb. 1) ist verschollen. Die Datierung der Geräte ist schwierig. Weit verbreitet waren chinesische, japanische und russische Zählrahmen unterschiedlicher Grösse. Sie lassen sich für alle Grundrechenarten nutzen.

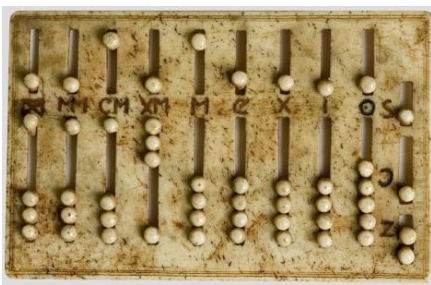


Abbildung 1: Verschollener römischer Taschenrechner aus Elfenbein. Quelle: Inria, Frankreich, Foto: J.-M. Rames

Rechenschieber

Ab dem 17. Jahrhundert entstanden die analogen Rechenschieber. Sie bauen auf den von Jost Bürgi und John Napier geschaffenen Logarithmen auf und eignen sich auch fürs Potenzieren und Wurzelziehen. Tragbar sind vor allem Rechenstäbe, Rechenscheiben, Rechenuhren und teilweise auch Rechenwalzen (vgl. Abb. 2).



Abbildung 2: Im Vergleich zu Rechenstäben und Rechenscheiben waren Rechenuhren deutlich seltener. Die Skalen dieser analogen Taschenrechner werden durch Drehen der Knöpfe eingestellt. Quelle: Science Museum, London

Weit verbreitet waren die analogen Proportionalwinkel (vgl. Abb. 3). Es gab Geräte mit englischer, französischer und italienischer Bauart. Sie weisen beispielsweise Skalen für Quadrat- und Kubikwurzeln und trigonometrische Skalen auf. Die Reduktionszirkel wurden besonders fürs Verkleinern und Vergrössern von Strecken verwendet.



Abbildung 3: Dieser Proportionalwinkel (um 1700) von Michael Butterfield hat auf jeder Seite vier Skalen. Für die Nutzung braucht man einen Stechzirkel. Quelle: Science Museum, London

Mechanische Rechenmaschinen

Die ersten mechanischen Rechenmaschinen tauchen ebenfalls im 17. Jahrhundert auf. Ihre Erfinder hiessen Wilhelm Schickard, Blaise Pascal und Gottfried Wilhelm Leibniz. Diese Digitalrechner waren meist gross und schwer und in der Regel Einzelstücke. Erst im 20. Jahrhundert erscheinen kleine, leichte mechanische Rechenmaschinen. Höhepunkt in der über 300-jährigen Entwicklung war die geniale Curta (vgl. Abb. 4) von Curt Herzstark. Sie beherrscht alle vier Grundrechenarten.



Abbildung 4: Die Curta gilt als die weltweit kleinste mechanische Rechenmaschine. Sie wurde von 1948 bis 1971 in grösseren Stückzahlen in Liechtenstein gefertigt. Quelle: National Museum of Computing, Bletchley Park, England

Weitere digitale Taschenrechner waren die Neperstäbchen (17. Jh.). Sie erleichtern die Multiplikation und die Division und wurden in Form von drehbaren Zylindern in manche Geräte eingebaut. Weit verbreitet waren die preiswerten Zahlenschieber aus Blech. Man brauchte sie für die Addition und die Subtraktion. Sie wurden oft durch Multiplikationstabellen ergänzt.

In den 1970er Jahren lösten Elektronenrechner die analogen Rechenschieber und die digitalen mechanischen Rechenschieber ab.

Tabelle 1: Ausgewählte historische Rechenräte						
Gerät	Verfahren		Grundrechenarten			
	analog	digital	Addition	Subtraktion	Multiplikation	Division
Abakus		■	■	■	■	
mechanische Rechenmaschine		■	■	■	■	■
Neperstäbe		■			■	■
Proportionalwinkel	■				■	■
Rechenschieber	■				■	■
Reduktionszirkel	■				■	■
Zahlenschieber		■	■	■		
■ = zutreffend						

Weiterführende Schrift

Bruderer, Herbert: Wendepunkte in der analogen und digitalen Welt, De Gruyter Oldenbourg, Berlin, Boston 2026, 432 Seiten, 533 Abbildungen (90% in Farbe), 34 Tabellen,

<https://doi.org/10.1515/9783112210222>

Bruderer, Herbert: Turning Points in the Analog and Digital World. Association for Computing Machinery, New York, 2026, 520 pages, 533 illustrations (90% in color), 34 tables, <https://doi.org/10.1145/3755991>



Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Société Mathématique Suisse

Ausschreibung der Matura Awards 2026 der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Seit 2010 verleiht die Schweizerische Mathematische Gesellschaft (SMG) alle zwei Jahre einen oder mehrere Preise an Gymnasiastinnen oder Gymnasiasten, die eine hervorragende Maturaarbeit oder ein Projekt im Rahmen des Wettbewerbs "Schweizer Jugend forscht" verwirklicht haben.

Die SMG lädt hiermit interessierte Jugendliche ein, ihre Bewerbungen für die Matura Awards 2026 einzureichen. Zugelassen sind Arbeiten, die im vergangenen oder laufenden Schuljahr abgeschlossen wurden und die in der Mathematik angesiedelt oder interdisziplinär mit einem substantiellen Anteil an Mathematik angelegt sind.

Die Preisverleihung wird im Rahmen des 36. Schweizerischen Tages über Mathematik und Unterricht am 09.09.2026 an der Kantonsschule Alpenquai in Luzern stattfinden. Schülerinnen und Schüler, die sich bewerben möchten, senden ihre Arbeit als PDF-Datei (oder in zwei gedruckten Exemplaren) zusammen mit ihrer Adresse und einem kurzen CV bis am 30. Juni 2026 an

Martin J. Gander
martin.gander@unige.ch
Université de Genève
Section de Mathématiques
Rue du Conseil-Général 9, CP 64
1211 Genève 4, Suisse

Die Jury wird vom Vorstand der SMG zusammengestellt und besteht aus Hochschulangehörigen. Sie wird vom Vizepräsidenten der SMG geleitet. Die Gymnasiallehrkräfte im Fach Mathematik sind höflich gebeten, diese Information an geeignete Kandidatinnen und Kandidaten weiterzuleiten.

Genf, 16. Januar 2026

Martin J. Gander
Vizepräsident der SMG



Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Société Mathématique Suisse

Annonce du Prix “Matura Awards 2026” de la Société mathématique Suisse

Tous les deux ans depuis 2010, la Société mathématique suisse (SMS) attribue un ou plusieurs prix à des collégiens/gymnasiens/lycéens qui ont réalisé un travail de maturité exceptionnel ou un projet dans le cadre du concours «La science appelle les jeunes».

La SMS invite les jeunes intéressés à soumettre leur candidature pour les Matura Awards 2026. Les travaux qui ont été complétés dans la dernière ou l'année scolaire actuelle et qui sont basés en mathématiques ou interdisciplinaires avec une proportion substantielle de mathématiques sont autorisés.

La cérémonie de remise des prix aura lieu le 9 septembre 2026 à la Kantonsschule Alpenquai à Lucerne lors de la 36ème Journée suisse des mathématiques et de l'enseignement (“36. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht”).

Les élèves qui veulent postuler envoient leur travail sous forme de fichier PDF (ou en deux exemplaires imprimés) avec leur adresse et un court CV jusqu'au 30 juin 2026 à

Martin J. Gander
martin.gander@unige.ch
Université de Genève
Section de Mathématiques
Rue du Conseil-Général 9, CP 64
1211 Genève 4, Suisse

Le jury est composé par le conseil d'administration de SMS et se compose de membres de l'université. Il est présidé par la vice-présidente de SMS.

Les enseignants de mathématiques du secondaire sont priés de transmettre cette information aux candidats.

Genève, le 16 janvier 2026

Martin J. Gander
Vice-président de la SMS



Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Société Mathématique Suisse

Annuncio dei premi “Matura Awards 2026” della Società Matematica Svizzera

Dal 2010, ogni due anni, la Società Matematica Svizzera (SMS) assegna uno o più premi agli studenti delle scuole superiori che hanno realizzato una tesi o un progetto di maturità eccezionale nell'ambito del concorso "Scienza e Gioventù".

La SMS invita i giovani interessati a presentare la propria candidatura per i Matura Awards 2026. Sono ammessi i progetti che sono stati completati nell'anno scolastico precedente o in quello in corso e che si basano sulla matematica o sono interdisciplinari con una parte sostanziale di matematica.

La cerimonia di premiazione si svolgerà nell'ambito della 36a giornata svizzera della matematica e dell'educazione (“36. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht”) il 9 settembre 2026 presso la Scuola cantonale Alpenquai a Lucerna.

Gli studenti che desiderano candidarsi devono inviare il loro lavoro in formato PDF (o due copie stampate) insieme al loro indirizzo e a un breve CV entro il 30 giugno 2026 a

Martin J. Gander
martin.gander@unige.ch
Université de Genève
Section de Mathématiques
Rue du Conseil-Général 9, CP 64
1211 Genève 4, Suisse

La giuria è nominata dal Consiglio SMS ed è composta da membri dell'università. È presieduta dalla vicepresidente della SMS. Gli insegnanti di matematica delle scuole secondarie sono pregati di trasmettere queste informazioni ai candidati idonei.

Ginevra, 16 gennaio 2026

Martin J. Gander
Vicepresidente della SMS

Yves Roisin

Collège St-Michel, Fribourg, yves.roisin@edufr.ch

Initiation à la modélisation mathématique d'un phénomène

Jean-Pierre Gabriel, professeur retraité de l'Université de Fribourg, a souvent regretté le faible pourcentage des bacheliers qui poursuivent des études de mathématiques après la maturité. Il a régulièrement entendu dire que c'était dû au manque d'utilité concrète que les élèves trouvent aux mathématiques. Après avoir consulté différents ouvrages destinés aux élèves du secondaire 2, il a constaté que peu d'espace y était accordé à la modélisation mathématique. Aussi, il a eu envie d'y consacrer un texte en se donnant comme défi de le rendre accessible aux élèves préuniversitaires.

Afin de garantir que le texte soit adapté au public visé, il a proposé à deux enseignants du secondaire 2, Yves Dubey et Thomas Fournier, de le rédiger avec lui. Le fruit de leur travail est le livre [1], qu'il me semble intéressant de présenter dans ce bulletin. En effet, cela permettra de lui donner une visibilité, afin que les enseignants puissent le conseiller aux élèves enthousiastes qui les questionnent au sujet de l'utilité des mathématiques.

Les auteurs ont choisi de présenter la modélisation mathématique au travers du phénomène de la désintégration radioactive. D'une part parce que le modèle déterministe de la désintégration radioactive est abordé dans la plupart des livres d'analyse, et d'autre part parce qu'ils pouvaient aussi présenter un modèle stochastique du même phénomène. Ils ont développé une approche originale et hypothético-déductive qui porte une attention particulière aux hypothèses nécessaires. Les hypothèses avancées reposent à la fois sur les expériences et les observations du phénomène, sur l'intuition des auteurs ainsi que sur leur volonté de simplifier au mieux la mathématique. Le but des modélisations présentées est de prédire l'évolution temporelle d'un échantillon de noyaux instables, c'est-à-dire susceptibles de se désintégrer en émettant une particule. Étant donné la taille initiale de l'échantillon, il s'agit donc de prédire le nombre de noyaux non encore désintégrés à n'importe quelle époque ultérieure. Les différentes modélisations ci-dessous concernent la désintégration radioactive d'un échantillon de noyaux instables de même nature. Elles sont présentées presque identiquement dans le livre [1], et je remercie les auteurs de m'avoir autorisé à recopier une partie de leur travail.

Modèle déterministe de la désintégration radioactive

Au temps $t = 0$, nous considérons un paquet de $n(0)$ noyaux instables. Le but est de prédire le nombre $n(t)$ de noyaux encore instables en un temps quelconque $t > 0$. Voici les réflexions qui conduiront aux hypothèses propres au modèle.

- (1) Le temps est continu, i.e. $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ (par opposition à un temps discret comme par exemple $t \in \mathbb{N}$).
- (2) La fonction $n(t)$ prend des valeurs entières et fait un saut vers le bas de grandeur -1 lors de chaque désintégration, ce qui entraîne sa décroissance. Afin de simplifier cette première approche mathématique, nous supposons que $n(t)$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Cela permet de faciliter le travail analytique, car nous pouvons alors supposer que $n(t)$ est dérivable. Ce faisant nous commettons volontairement une erreur, mais la pertinence de ce choix se justifie a posteriori en comparant les prédictions du modèle aux observations physiques effectuées en laboratoire.

- (3) La démarche ci-dessous repose sur une approche intuitive ainsi que des choix de simplification. Notons qu'une des relations les plus simples entre deux grandeurs variables est la proportionnalité : l'une est un multiple de l'autre et réciproquement. Nous en faisons usage ici pour sa simplicité. Son bien-fondé, à nouveau, résulte de la confrontation entre le modèle et les observations.

Pour $t \geq 0$ (fixé) et $h > 0$ (variable), notons $D_{(t,t+h]}$ le nombre de noyaux qui se désintègreront à une époque appartenant à l'intervalle $(t, t+h]$. À l'évidence, $D_{(t,t+h]}$ dépend à la fois de $n(t)$ et de h . En effet, plus le nombre de noyaux est grand en t , plus il y aura de candidats à la désintégration et plus $D_{(t,t+h]}$ sera grand. Il en ira de même pour la longueur h de l'intervalle, car plus celle-ci sera grande, plus l'intervalle $(t, t+h]$ pourra contenir d'époques de désintégration.

Comme nous passerons à la limite avec $h \downarrow 0$, nous supposerons que $D_{(t,t+h]}$ est à peu près proportionnel à h pour des petites valeurs positives de cette variable. Plus précisément, $D_{(t,t+h]}$ sera de la forme Ch pour un nombre $C > 0$, avec une possible correction additionnelle $o(h)$ qui tend vers 0 plus vite que h , i.e. $\lim_{h \downarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$. Ainsi $D_{(t,t+h]} = Ch + o(h)$ mais, en vertu de ce qui précède, $D_{(t,t+h]}$ dépend aussi de $n(t)$, le nombre de candidats à la désintégration au début de l'intervalle. Comme $o(h)$ disparaît avec $h \downarrow 0$, il suffit de considérer la dépendance $C = C(n(t))$. En faisant à nouveau appel à la proportionnalité, nous posons $C(n(t)) = \lambda n(t)$ où $\lambda > 0$ est une constante, plus précisément un paramètre qui gouverne la vitesse de désintégration des noyaux du type considéré. Ainsi, pour $h \downarrow 0$

$$D_{(t,t+h]} = \lambda n(t)h + o(h).$$

De ce qui précède, nous retenons les hypothèses ci-dessous pour le modèle déterministe.

Hypothèses pour le modèle déterministe

- (H1) t est le temps et $n(t)$ le nombre de noyaux encore instables en t .
 (H2) t et $n(t)$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
 (H3) La fonction $n(t)$ est décroissante et dérivable.
 (H4) On a

$$-D_{(t,t+h]} = n(t+h) - n(t) = -\lambda n(t)h + o(h),$$

le signe « $-$ » étant imposé par la décroissance de $n(t)$.

- (H5) t est une variable connue, $n(t)$ est une variable inconnue, $\lambda > 0$ et $n(0) \geq 0$ sont des paramètres dont les valeurs sont à choisir selon la situation à décrire.

Conséquences des hypothèses

Des hypothèses ci-dessus nous déduisons

$$\frac{n(t+h) - n(t)}{h} = -\lambda n(t) + \frac{o(h)}{h}.$$

Puisque la fonction $n(t)$ est supposée dérivable et que la limite d'une somme finie de termes qui convergent est la somme des limites, en faisant tendre h vers 0 on obtient l'équation

$$\dot{n}(t) = -\lambda n(t).$$

Nous avons donc une équation qui relie la variable inconnue $n(t)$ à sa dérivée $\dot{n}(t)$ et au paramètre λ . Cette équation est de la forme

$$\dot{n}(t) = f(n(t))$$

où f est une fonction connue. Il est démontré dans le livre [1], que pour $n(0) \geq 0$ et $f(n(t)) = \lambda n(t)$, l'unique solution de cette équation différentielle est

$$n(t) = n(0)e^{-\lambda t}.$$

Ainsi la variable inconnue $n(t)$ est une fonction de la variable connue t et des paramètres λ et $n(0)$. Dans ce modèle, $n(t)$ ne s'annule jamais si $n(0) > 0$. Cette propriété pose problème pour définir l'époque t^* de la dernière désintégration telle que $n(t^*) = 0$. C'est le prix à payer pour avoir travaillé dans $\mathbb{R}_+$ au lieu de $\mathbb{N}$. Heureusement, le modèle stochastique fournira une solution exacte à ce problème.

Époques de désintégration

Plus que la demi-vie, le modèle déterministe permet de calculer l'époque exacte de chaque désintégration, ainsi que la durée entre deux désintégrations successives.

Notons t_i l'époque de la i -ème désintégration ($1 \leq i \leq n(0) - 1$) avec $d_i = t_i - t_{i-1}$ la durée entre la i -ème désintégration et la précédente ($2 \leq i \leq n(0) - 1$) et avec $d_1 = t_1$. Ainsi avec cette nouvelle suite t_i , le temps de demi-vie $T_{\frac{1}{2}}$ correspond à $t_{\frac{n(0)}{2}}$ si $n(0)$ est pair et se situe entre $t_{\frac{n(0)-1}{2}}$ et $t_{\frac{n(0)+1}{2}}$ si $n(0)$ est impair. On trouve les époques et durées suivantes :

$$\begin{aligned} n(t_i) &= n(0) \cdot e^{-\lambda t_i} = n(0) - i \\ \Rightarrow -\lambda t_i &= \ln \left(\frac{n(0) - i}{n(0)} \right) \\ \Rightarrow t_i &= \frac{\ln(n(0)) - \ln(n(0) - i)}{\lambda} \\ d_i = t_i - t_{i-1} &= \frac{\ln(n(0) - i + 1) - \ln(n(0) - i)}{\lambda} \end{aligned}$$

On remarque que l'époque de dernière désintégration n'est pas définie, et devrait prendre la valeur $+\infty$, tout comme la durée entre l'avant-dernière et la dernière désintégration.

Modèle stochastique de la désintégration radioactive

Les notions de probabilités nécessaires à la compréhension du modèle qui suit sont présentées dans le livre [1]. Nous choisissons à nouveau le temps continu $t \in \mathbb{R}_+$. Dès l'époque $t = 0$, nous observons un unique noyau instable et notons T l'époque de sa désintégration. Dans cette approche, la désintégration est un phénomène aléatoire et ainsi T devient une variable aléatoire. Les études expérimentales suggèrent que ce processus n'a pas de mémoire, en ce sens que la transition est spontanée et ne dépend pas de l'âge du noyau.

Hypothèses pour le modèle stochastique

- (H1) Le temps $t \in \mathbb{R}_+$ est continu.
- (H2) Au temps $t = 0$, nous considérons $n(0)$ noyaux instables, tous étant de la même substance. Ces noyaux sont numérotés de 1 à $n(0)$.
- (H3) Nous noterons $T_i (= T_i(\omega))$ l'époque aléatoire de la désintégration du i -ème noyau ($1 \leq i \leq n(0)$). Les noyaux étant du même type, ces v.a. sont identiquement distribuées.
- (H4) Les noyaux n'interagissant pas entre eux, les v.a. T_i ($1 \leq i \leq n(0)$) sont indépendantes.

(H5) Reconsidérons un noyau instable en $t = 0$ et l'époque aléatoire T de sa désintégration. Par hypothèse, cette dernière est gouvernée par un processus spontané (sans vieillissement et donc sans mémoire) que nous traduisons en exigeant

$$(a) P(T > 0) > 0,$$

$$(b) \forall s, t \geq 0 \text{ avec } P(T > t) > 0, P(T > t + s \mid T > t) = P(T > s).$$

La condition (a) fait sens, car pour une v.a. $T \geq 0$, sa négation serait $P(T > 0) = 0$ qui entraînerait $P(T = 0) = 1$, donc un cas sans intérêt.

L'événement $\{T > t\}$ signifie être encore instable en t puisque la désintégration a lieu après t . Interprétons « être instable » par « être en vie », se « désintégrer » par « mourir » et « spontané » par « sans vieillissement ».

La condition (b) signifie alors que *la probabilité de vivre au moins s unités de temps depuis t , sachant que l'on est en vie en t , est égale à la probabilité de vivre au moins s unités de temps depuis 0*. Dans ce modèle, un vieillard centenaire en vie aurait la même probabilité qu'un nouveau-né de vivre encore au moins une année.

Conséquences des hypothèses

Considérons à nouveau un unique noyau instable en $t = 0$ et notons T l'époque aléatoire de sa désintégration.

1. La fonction $t \mapsto P(T > t)$ est non négative et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $P(T > 0) = 1$.

Preuve. Une probabilité est toujours non négative et il est clair que

$$\forall s, t \geq 0, \{T > t + s\} \subset \{T > t\}$$

car être en vie en $t + s \geq t$ implique être en vie en t . Une probabilité étant monotone, c'est-à-dire $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$, il s'ensuit la décroissance en t de la fonction $P(T > t)$.

Une première conséquence des hypothèses est $P(T > 0) = 1$. En effet, pour $s = t = 0$ et en vertu de (a) et (b)

$$P(T > 0) = P(T > 0 + 0 \mid T > 0) = \frac{P(T > 0)}{P(T > 0)} = 1.$$

2. $P(T > t) > 0$ pour tout $t \geq 0$.

Preuve. Justifions d'abord cela par un argument phénoménologique. Le cas $t = 0$ est imposé par (a) et s'il existait $t_0 > 0$ tel que $P(T > t_0) = 0$ alors, par non-négativité et décroissance de la fonction, $P(T > t) = 0$ pour $t > t_0$. Ceci impliquerait $P(T \leq t_0) = 1$ pour l'événement complémentaire, donc un âge limite fini universel en contradiction avec l'idée de mort sans vieillissement. Par conséquent, $P(T > t) > 0$ pour tout $t \geq 0$.

Voici une démonstration plus formelle.

On peut démontrer que la fonction de répartition $F_X(t) = P(X \leq t)$ d'une v.a. X est continue à droite en t . Il en ira donc de même de $P(X > t) = 1 - F_X(t)$. Ainsi, $P(T > 0) > 0$ implique l'existence d'un intervalle $[0, h)$ avec $h > 0$ sur lequel $P(T > t) > 0$. Cette dernière fonction étant non croissante, si elle s'annule en $t > 0$ elle restera nulle sur $[t, +\infty)$. Soit

$$t_* := \inf\{t > 0 ; P(T > t) = 0\}.$$

Nous savons que $t_* > 0$ et, par l'absurde, supposons que $t_* < +\infty$. Alors, par continuité à droite, on a $P(T > t_*) = 0$. Montrons que ceci est impossible.

A l'évidence, si $P(A) = 0$, alors pour tout B , les inégalités $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) = 0$ impliquent $P(A \cap B) = 0$. Si de plus $P(B) > 0$, alors $P(A | B) = 0$. Pour $0 < h < t_*$, nous avons $P(T > t_* - h) > 0$. La remarque qui précède et (b) conduisent à la contradiction :

$$\begin{aligned} 0 &= P(T > t_*) = P(T > t_* | T > t_* - h) \\ &= P(T > (t_* - h) + h | T > t_* - h) = P(T > h) > 0. \end{aligned}$$

Nous concluons donc que $P(T > t) > 0$ pour tout $t \geq 0$.

3. Il existe $\lambda > 0$ tel que pour $t \geq 0$, $P(T > t) = e^{-\lambda t}$ i.e. $T \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Preuve. L'inclusion $\{T > t + s\} \subset \{T > t\}$ implique $\{T > t + s\} \cap \{T > t\} = \{T > t + s\}$, d'où (pour $s, t \geq 0$) :

$$P(T > s) = P(T > t + s | T > t) = \frac{P(\{T > t + s\} \cap \{T > t\})}{P(\{T > t\})} = \frac{P(T > t + s)}{P(T > t)}$$

et finalement $P(T > t + s) = P(T > t)P(T > s)$.

En notant $\phi(t) := P(T > t)$, nous retrouvons l'équation fonctionnelle

$$\forall s, t \geq 0, \quad \phi(t + s) = \phi(t)\phi(s)$$

avec $\phi(t)$ monotone (décroissante) et $\phi(0) = P(T > 0) = 1$. Dans [1], les auteurs montrent que les seules solutions de cette équation, qui ne s'annulent jamais, sont les fonctions e^{bt} , $b \in \mathbb{R}$. Comme ϕ est décroissante, b doit être négatif et en notant $b := -\lambda < 0$, nous obtenons $P(T > t) = e^{-\lambda t}$ pour $t \geq 0$.

Magnifique conséquence des résultats précédents : sous nos hypothèses, la v.a. T n'a pas d'autre choix que d'être exponentielle. Cet exemple est une très belle illustration de la puissance de l'approche mathématique.

4. Considérons maintenant les $n(0)$ noyaux instables en $t = 0$ avec leurs époques de désintégration respectives $T_1, T_2, \dots, T_{n(0)}$. En vertu de nos hypothèses, chaque T_i ($1 \leq i \leq n(0)$) est une v.a. exponentielle de paramètre λ_i . Tous les noyaux étant de la même substance, les paramètres λ_i sont tous identiques et nous noterons λ leur valeur commune ($\lambda > 0$). Par conséquent les v.a

$$T_1, T_2, \dots, T_{n(0)}$$

sont indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

5. Notons N_t le nombre (aléatoire) de noyaux encore instables en t et D_t le nombre (aléatoire) de désintégrations entre 0 et t . Nous avons la relation

$$N_t(\omega) = n(0) - D_t(\omega).$$

Déterminons $P(D_t = k)$ pour $0 \leq k \leq n(0)$. La probabilité que le noyau i ne se désintègre pas entre 0 et t est $P(T_i > t) = e^{-\lambda t}$ et celle qui se désintègre est $P(T_i \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Calculons d'abord, pour la numérotation choisie, la probabilité pour que les k premiers noyaux se désintègrent et les $n(0) - k$ noyaux restants ne le fassent pas. Par l'indépendance des variables aléatoires, on a

$$\begin{aligned} &P(T_1 \leq t, T_2 \leq t, \dots, T_k \leq t, T_{k+1} > t, \dots, T_{n(0)} > t) \\ &= P(T_1 \leq t)P(T_2 \leq t) \cdots P(T_k \leq t)P(T_{k+1} > t) \cdots P(T_{n(0)} > t) \\ &= (1 - e^{-\lambda t})^k (e^{-\lambda t})^{n(0)-k} \end{aligned}$$

La probabilité est la même pour toutes les configurations avec k noyaux désintégrés entre 0 et t . Le nombre de configurations est donné par le nombre de possibilités de choisir k objets parmi $n(0)$ objets distincts, c'est-à-dire $\binom{n(0)}{k} = \frac{n(0)!}{k!(n(0)-k)!}$. Les différentes configurations étant incompatibles deux à deux, par l'additivité d'une probabilité

$$P(D_t = k) = \binom{n(0)}{k} (1 - e^{-\lambda t})^k (e^{-\lambda t})^{n(0)-k}.$$

Ainsi D_t est une v.a. binomiale

$$D_t \sim \text{Bin}(n(0), 1 - e^{-\lambda t})$$

et son espérance est donc $E(D_t) = n(0)(1 - e^{-\lambda t})$.

Dans le modèle stochastique $n(0)$ est un nombre, mais N_t et D_t sont des v.a.. Puisque l'espérance d'une somme est égale à la somme des espérances et l'espérance d'une constante est cette constante, nous avons

$$N_t = n(0) - D_t \Rightarrow E(N_t) = E(n(0)) + E(D_t) = n(0) - n(0)(1 - e^{-\lambda t})$$

d'où

$$E(N_t) = n(0)e^{-\lambda t}.$$

L'espérance du nombre de noyaux instables en t du modèle stochastique coïncide avec la solution du modèle déterministe.

Discussion autour d'un paradoxe du modèle déterministe

Physiquement parlant, la durée de vie, notée $\gamma_{n(0)}$, d'un échantillon de $n(0)$ noyaux est bien définie. Il s'agit de l'époque de la désintégration du dernier noyau instable. Comme, dans ce modèle, $n(t)$ admet aussi des valeurs non entières, la traduction de cette notion n'est pas évidente. L'égalité $n(\gamma_{n(0)}) = 0$ ne fait pas sens car dans ce cas $\gamma_{n(0)} = +\infty$. On ne sait pas a priori quel niveau dans $(0, 1)$ fournirait un bon critère. On peut, par exemple, définir la durée de vie d'un échantillon comme le temps $\gamma_{n(0)}$ pour atteindre un seul noyau restant. On peut facilement justifier que

$$\gamma_{n(0)} = t_{n(0)} = \frac{\ln(n(0)) - \ln(1)}{\lambda} = \frac{\ln(n(0))}{\lambda}.$$

Dans le modèle déterministe, le paradoxe suivant apparaît : si on considère $2n(0)$ noyaux initiaux, le calcul nous donne

$$\gamma_{2n(0)} = \frac{\ln(2n(0))}{\lambda} = \frac{\ln(2) + \ln(n(0))}{\lambda} = \frac{\ln(2)}{\lambda} + \gamma_{n(0)},$$

alors que si on divise l'échantillon en deux échantillons de taille $n(0)$, ils ont chacun une durée de vie de $\gamma_{n(0)}$, et on a donc $\gamma_{2n(0)} = \gamma_{n(0)}$. Ces deux estimations diffèrent d'exactlyement une demi-vie déterministe $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$.

Dans le modèle stochastique, cette contradiction disparaît. Sans le démontrer ici, en séparant les $2n(0)$ noyaux dont la durée de vie est une variable aléatoire $\Gamma_{2n(0)}$ en deux échantillons de tailles $n(0)$ de

durée de vies respectives Γ_1 et Γ_2 , qui sont indépendantes et de même loi que $\Gamma_{n(0)}$, on obtient avec la relation $\Gamma_{2n(0)} = \max\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$

$$E(\Gamma_1) = E(\Gamma_2) = \frac{H_{n(0)}}{\lambda} < \frac{H_{2n(0)}}{\lambda} = E(\Gamma_{2n(0)})$$

avec $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Le livre [1] ne fournit pas seulement les modèles présentés ci-dessus. Une large place est attribuée à la construction du modèle déterministe, en présentant différentes tentatives de modélisation infructueuses. Cette partie de livre me semble particulièrement pertinente pour les élèves. En effet, on y découvre graduellement les mécanismes qui permettent de proposer des modèles. Le livre contient aussi une étude de la durée de vie stochastique d'un échantillon, en analysant notamment sa variance et en offrant une étude approfondie de sa densité. La comparaison des deux modèles est illustrée par des exemples, des graphiques et des tableaux. Enfin, quelques pages sont dédiées à la loi de Poisson et à son utilisation dans ce contexte.

J'espère avoir suscité de l'intérêt pour cet ouvrage, disponible à la commande dans toutes les librairies de Suisse et dont la couverture est reproduite ci-dessous.

Yves Roisin

La modélisation mathématique d'un phénomène

Les approches déterministe et stochastique de la désintégration radioactive

La modélisation d'un phénomène représente la transformation de sa compréhension en une structure mathématique. Elle est un équilibre entre sa réalité complexe et son abstraction. Les auteurs présentent deux approches de la désintégration radioactive : celle, déterministe, fréquemment vue dans les études préuniversitaires, et celle, stochastique, nécessitant l'introduction des variables aléatoires. Les modèles présentés font l'objet d'une description minutieuse et d'une validation approfondie, tandis que chaque hypothèse sous-jacente est examinée avec rigueur. L'analyse de fonctions exponentielles, d'équations différentielles du premier ordre ainsi que des probabilités, donnera au lecteur des outils essentiels à la création de modèles mathématiques.

Cet ouvrage s'adresse à tous les amateurs des mathématiques souhaitant approfondir leurs connaissances.



Mathématiques
-
La modélisation mathématique d'un phénomène

La modélisation mathématique d'un phénomène

Les approches déterministe et stochastique de la désintégration radioactive

Jean-Pierre Gabriel, Yves Dubey, Thomas Fournier



Références

- [1] J.-P. GABRIEL, Y. DUBEY et T. FOURNIER, *La modélisation mathématique d'un phénomène. Les approches déterministe et stochastique de la désintégration radioactive*. Éditions Yves Carré, 2024.

Les problèmes du prix du millénaire

Dates et lieu	du 8 au 11 septembre 2026 à l'Hôtel Suisse à Champéry
Renseignements	http://www.vsmf.ch/crm/cours/
Inscription	Cours publié par la SSPES sur www.webpalette.ch



Le colloque annuel de la CRM sera consacré cette année à un passage en revue des problèmes du prix du millénaire. Les participant.e.s auront ainsi la possibilité de développer leur culture générale sur des sujets de recherche actuelle et d'en découvrir des aspects vulgarisés transmissibles à des élèves.

Le programme détaillé, ainsi que quelques informations supplémentaires sur les conférences, sera publié prochainement sur le site de la CRM. Voici un premier descriptif résumé des sujets abordés.

Une brève histoire de quelques problèmes mathématiques célèbres (Anders Karlsson)

Les mystères sur les nombres premiers, les nombres parfaits, la conjecture ABC, l'axiome des parallèles, le problème de Bâle ou encore le dernier théorème de Fermat : autant de problèmes célèbres à propos desquels Anders Karlsson partagera des anecdotes et dont il discutera des perspectives.

Conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (Didier Lesesvre)

La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer explique une partie de la structure des points (rationnels) d'une courbe elliptique par le comportement d'une fonction (qui lui est naturellement associée, appelée fonction L) en un point très particulier.

Hypothèse de Riemann (Didier Lesesvre)

La fonction zêta de Riemann encode (de manière analytique) de nombreuses propriétés fines de l'arithmétique, notamment sur la répartition des nombres premiers. L'hypothèse de Riemann est une conjecture fondamentale, dont la validité aurait de fortes conséquences sur de nombreuses questions de théorie des nombres.

Conjecture de Poincaré (Lukas Lewark)

La conjecture de Poincaré reste à ce jour le seul problème résolu parmi les sept problèmes du millénaire. Elle donne un critère permettant de déterminer quand une 3-variété est la 3-sphère.

Problème de Yang-Mills et écart de masse (Alexander Thomas)

Démontrer mathématiquement l'existence d'une masse minimale est l'un des plus grands défis de la physique moderne. L'orateur expliquera le contexte de la théorie de Yang-Mills, qui constitue la base du modèle standard de la physique des particules et l'importance du problème du millénaire associé pour comprendre le monde qui nous entoure.

P versus NP (Arnaud Casteigts)

En informatique théorique, les problèmes peuvent être classifiés en différentes catégories selon leur complexité. La question de savoir si les classes P (des problèmes que l'on peut résoudre rapidement) et NP (des problèmes dont on peut vérifier une solution rapidement) sont différentes est une conjecture fondamentale de ce domaine et possède de nombreuses ramifications.

Prix du cours	CHF 350.-	Délai d'inscription	15 juillet 2026
Prix du logement (avec petit-déjeuner et taxe de séjour)			
Hôtel Suisse	de CHF 93.- à 118.- /personne /jour		
Centre Palladium	de CHF 63.- à 93.- /personne /jour		
Repas (facultatif)	CHF 20.- /personne /repas de midi à l'Hôtel Suisse		

Organisateurs : Damien Dobler et Fabien Friedli

Martin Lieberherr
MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

Abstandsgesetz mit Photodiode

1 Einleitung

Wie alle Lehrkräfte, die etwas auf sich halten, überarbeite ich von Zeit zu Zeit meine Unterlagen. Einen Praktikumsversuch zum $1/r^2$ -Gesetz für die Lichtintensität konnte ich modernisieren, weil neu digitale Multimeter mit Mikroampere-Auflösung zur Verfügung standen. Leider musste ich die Auswertung einen Schritt zurückfahren, denn dank “Bring Your Own Device” bringen meine Klassen meistens eine lausige Tablet-Version von Microsoft Excel mit. Die Gratisversion beherrscht standardmässig nur noch die lineare Regression; andere Ausgleichsfunktionen stehen nicht zur Verfügung oder sind hinter Kontextmenues versteckt, die in jeder Version auf andere Weise aufgerufen werden müssen.

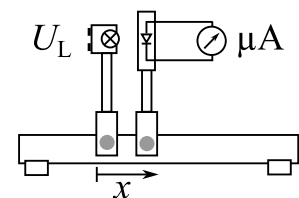
Im Praktikum soll das Abstandsgesetz $J \sim 1/r^2$ (Kepler, 1604) getestet werden. Die Lichtintensität J wird als Funktion des Abstands r von der Quelle mit einer Photodiode gemessen und mit der Theorie verglichen.

2 Experiment

Eine 6 V Glühlampe dient als Lichtquelle, siehe Abb. 1, und eine kleine Photodiode als Empfänger. Die Photodiode wird mit einem Fluke 15B+ Multimeter mit μA -Auflösung kurzgeschlossen.

Abbildung 1: Messaufbau auf optischer Schiene

Die Lampe im Halter auf dem Reiter bleibt fixiert, die Position x der Photodiode wird variiert. Wenn die Photodiode mit dem Mikroamperemeter kurzgeschlossen wird, ist die gemessene, elektrische Stromstärke J proportional zur Lichtintensität.

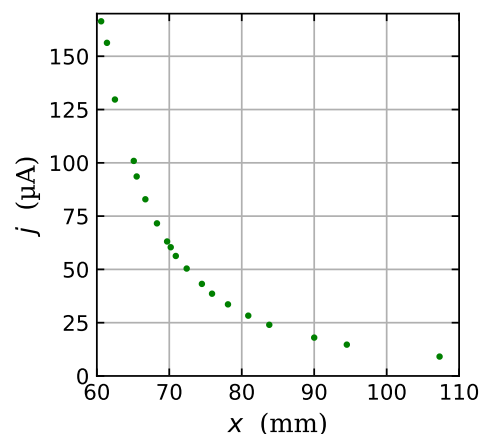


Der Photostrom J_1 bei eingeschalteter sowie der Untergrund J_0 bei ausgeschalteter Glühlampe werden für etwa zwanzig Positionen x der Photodiode gemessen. Dann wird der Untergrund subtrahiert: $J = J_1 - J_0$. Die Position x , d.h. der äussere Abstand der Reiter auf der optischen Schiene, wird mit der Schublehre mit 0.1 mm Auflösung gemessen. Diese Position unterscheidet sich um einen festen Wert x_0 vom Abstand r Glühwendel-Photodiode. Der Abstand r kann nur grob gemessen werden.

Abbildung 2: Gemessener Photostrom j in Mikroampere als Funktion der Photodiodenposition x in Millimetern

Die kleinste Position $x = 60.6 \text{ mm}$ entspricht einem Glühwendel-Photodiode-Abstand $r \approx 1.5 \text{ cm}$.

Wer dazu vorbereitet ist – meine Klassen sind es nicht – kann eine nichtlineare Ausgleichsrechnung mit der Funktion $J = a \cdot (x - x_0)^b$ versuchen. Als Resultat wird $b \approx -2$ erwartet.



3 Auswertung

Wir wollen die gemessenen Intensitäten respektive Photoströme $J(x)$ mit dem $1/r^2$ Gesetz vergleichen. Zu diesem Zweck werden die Messwerte so transformiert, dass sie auf einer Geraden liegen, falls das Abstandsgesetz erfüllt ist. Durch eine Ausgleichsrechnung kann dann der Offset x_0 bestimmt werden. Die lineare Regression wird auch von poor-man's Versionen des Standard-Tabellenkalkulationsprogramms beherrscht.

$$J = \frac{a}{r^2} \quad \text{Abstandsgesetz} \quad (1)$$

$$J = \frac{a}{(x - x_0)^2} \quad \text{Abstandsgesetz mit Offset} \Rightarrow (x - x_0) \sqrt{J} = \sqrt{a} \Rightarrow \quad (2)$$

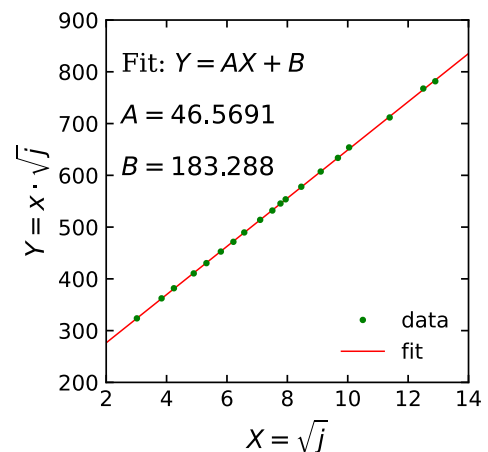
$$\underbrace{x \sqrt{J}}_Y = \underbrace{x_0}_A \underbrace{\sqrt{J}}_X + \underbrace{\sqrt{a}}_B \quad \underbrace{\text{transformiert}}_{\text{Geradengleichung}} \quad (3)$$

In Abbildung 3 ist $Y = x \sqrt{J}$ als Funktion von $X = \sqrt{J}$ graphisch dargestellt.

Abbildung 3: Transformierte Daten (Photostrom j in Mikroampere und Dienenkoordinate x in Millimetern) mit Ausgleichsgerade

Der Fitparameter A entspricht dem Offset x_0 . Der Wert ist kompatibel mit den in Abbildung 2 genannten Abständen: $60.6 \text{ mm} - 1.5 \text{ cm} \approx 46 \text{ mm}$.

Die Messwerte liegen auf einer Geraden, passen also im Rahmen der Zeichengenauigkeit zum $1/r^2$ -Gesetz.



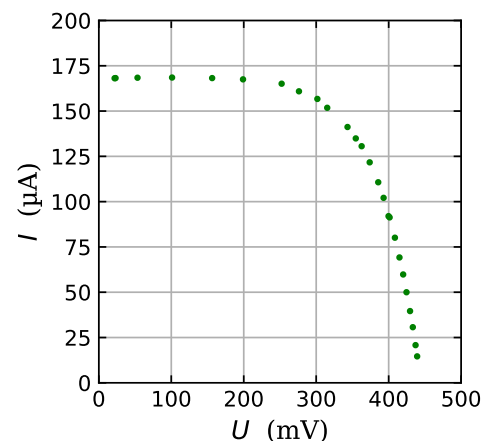
4 Nachlese

Wird ein Halbleitersensor – hier die Photodiode – verwendet, muss unbedingt dessen Charakteristik bestimmt werden, damit die Messungen korrekt kalibriert sind.

Abbildung 4: Strom-Spannung Charakteristik der verwendeten Photodiode

Die Photodiode wurde mit einem verstellbaren 25 Kiloohm-Widerstand verbunden. Der Widerstand wurde verändert und parallel elektrische Stromstärke und Spannung gemessen, während die Photodiode in geringem Abstand beleuchtet wurde. Im Kurzschlussregime ($U \approx 0$) stellt die Photodiode eine Konstantstromquelle dar. Der Innenwiderstand des Amperemeters beeinflusst die Messung somit kaum.

(Ein Solarmodul hat dieselbe Kennlinie mit anderen Zahlen. Wie muss die Impedanz der Abnahmeelektronik angepasst werden, damit möglichst viel Leistung abgegeben wird?)



Falls kein Mikroamperemeter zur Verfügung steht, kann die Photodiode mit einem $1 \text{ k}\Omega$ -Widerstand verbunden werden. Der Photostrom ist dann proportional zur Spannung (mV) über diesem Widerstand. $1 \text{ k}\Omega$ ist deutlich kleiner als U/I im Bereich des “Knies” in Abbildung 4.

Hans Peter Dreyer
Ebnat-Kappel, hp.dreyer@thurweb.ch

Vom Spin der theoretischen Physik zum MRI im Spital

Wie kann man glücklich aussehen, wenn man an den anomalen Zeeman-Effekt denkt? antwortete W. Pauli auf die Frage eines Passanten 1923 in Kopenhagen. (Überliefert von C. Enz)

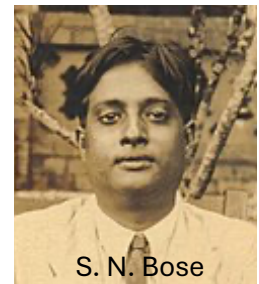
Sie sind beide jung genug, um sich eine Dummheit leisten zu können. (P. Ehrenfest zu S. Goudsmit und G. Uhlenbeck wegen des Elektronenspins, den sie Ende 1925 in den *Naturwissenschaften* publizierten.)

Ich glaube, dass Du und Uhlenbeck grosses Glück gehabt haben, dass Eure Arbeit über das rotierende Elektron veröffentlicht und diskutiert wurde, bevor Pauli davon gehört hatte. (L. H. Thomas an S. Goudsmit, 1926)

Der Spin, der in vielen theoretischen Betrachtungen, aber auch in vielen Anwendungen wie dem Magnetresonanz-Imaging (MRI) eine Rolle spielt, hat eine komplexe Entdeckungsgeschichte. Friedrich Hund, der mitgewirkt hat, schreibt 1984 in seiner «Geschichte der Quantentheorie»: *Die Zeitgenossen [von Pauli] konnten nicht wissen, dass zur Erfassung der Grundlagen der neuen Quantenmechanik die komplizierten Eigenschaften der Spektren nicht nötig waren und dass zum Verständnis dieser (...) Spektren die Grundlagen der Quantenmechanik wenig beitrugen. So hemmten sich die beiden Entwicklungen gegenseitig; in den Dingen, die man hauptsächlich betrachtete, waren immer mehrere Schwierigkeiten verwoben: Grundlagen der Quantentheorie, Spin und Abschlussprinzip [Ausschlussprinzip].*



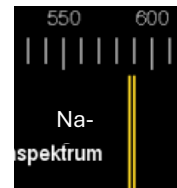
Während sich Wolfgang Pauli im kühlen Kopenhagen vorerst erfolglos mit dem anomalen Zeeman-Effekt herumschlägt, begründet im heissen Dhaka **Satyendra Nath Bose** Plancks Strahlungsformel auf eine neue Art. Er sendet einen Artikel an das *Philosophical Magazine*, das diesen ablehnt. Deshalb wendet er sich an Einstein mit der Bitte: *Respected Sir, I have ventured to send you the accompanying article for your perusal and opinion. I am anxious to know what you think of it. You will see that I have tried to deduce the coefficient $8\pi \nu^2/c^3$ in Planck's Law independent of classical electrodynamics, only assuming that the ultimate elementary region in the phase-space has the content h^3 . I do not know sufficient German to translate the paper. If you think the paper worth publication I shall be grateful if you arrange for its publication in Zeitschrift für Physik.* Einstein erkennt die Neuheit der Idee, im Phasenraum zu zählen, übersetzt die Arbeit eigenhändig und lässt sie unter Boses Namen mit dem Titel *Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese* erscheinen. Bose arbeitet also nicht mehr mit dem Wellenaspekt des Lichts, indem er die Anzahl stehender Wellen abzählt, sondern mit dem Teilchenaspekt. Diesen zweifelt Niels Bohr 1924 immer noch an. Erst nachdem Comptons Experiment offensichtlich die Energie- und Impulserhaltung beim Stoss eines Lichtquants auf ein Elektron belegt, ändert er seine Meinung.



Damit das Ergebnis stimmt, muss Bose einen «Polarisationsfaktor» 2 einführen. Man stelle sich ein Teilchen mit zweierlei Polarisationszuständen vor, bevor es den Elektronenspin gibt! Nicht grundlos schreibt Einstein an Ehrenfest über Boses Arbeit: *Ableitung elegant, aber Wesen bleibt dunkel.* Zwei Jahre später, nach der Entdeckung des Elektronenspins, bittet Ehrenfest seinen Freund, ihm zu sagen, *wie die analoge Hypothese relativistisch richtig formuliert für 'Licht-Corpuskeln' [Spin des Photons]* lautet. Einstein erkennt, dass in der Statistik die Photonen als voneinander unabhängig und ununterscheidbar vorausgesetzt werden müssen, dass aber *eine gegenseitige Beeinflussung der Moleküle [Quantenobjekte] von vorläufig ganz rätselhafter Art* vorhanden sei. Er ist mit seinem Verständnis des Lichtquants nicht zufrieden und schreibt Lorentz, dass am geplanten Solvay-Kongress von 1927 an seiner Stelle *Herr Fermi in Bologna oder Langevin* Besseres zu berichten hätten. Zwischenzeitlich hat Enrico Fermi im Anschluss an Paulis Ausschlussprinzip eine Statistik für Elektronen gefunden: Fermionen sind «Individualisten», während Bosonen «Kollektivist» sind. Während die Einzelheiten der Bose-Einstein- und der Fermi-Dirac-Statistik sich nicht für die Behandlung im Gymnasium eignen, ist die Geschichte der Rückweisung der revolutionären Idee eines Unbekannten, der abseits der grossen Wissenschaftszentren arbeitet, ebenso ein Musterbeispiel für «Nature of Science», wie Einsteins selbstkritische Einschätzung seines Verständnisses des Lichtquants.

Im Gegensatz zum Spin des Photons scheint der Spin des Elektrons auf der Hand zu liegen: Jeder Planet kreist um die Sonne und rotiert um die eigene Achse. Wo liegt das Problem bei der Übertragung aufs Atom?

Die Vielfalt der Spektren kann 1923 mit einer vierten Quantenzahl immer besser erfasst werden. Dem wenig bekannten Alfred Landé gelingt es, mit einem Vektormodell eine anschauliche Basis für noch mehr spektroskopischen Fakten zu schaffen, allerdings unter Inkaufnahme von halben Quantenzahlen. Gleichzeitig zeigen sich viele Schwächen des anschaulichen Bohr-Sommerfeld-Modells. Besonders Pauli und Heisenberg sind sehr bestrebt, im Bereich der Atomphysik die Anschauung zu verlassen. Das Verhalten der einfachen Alkali-Atome irritiert Pauli, der 1924 an Landé schreibt: *Das Leuchtelektron bringt es auf eine rätselhafte, unmechanische Weise fertig, in zwei Zuständen (mit dem gleichen k) mit verschiedenen [Dreh]-Impulsen zu laufen.* Dies vernimmt der amerikanische Gaststudent Ralph Kronig und äussert den Gedanken, das Elektron besitze eine Rotation um die eigene Achse. Der kritische Pauli redet ihm diese Idee, die wohl den Nobelpreis gebracht hätte, aus: Das Elektron müsste mit Überlichtgeschwindigkeit rotieren, um das von der Rotation erzeugte magnetische Moment in der beobachteten Grösse zu erzeugen.



Pauli bekämpft den anschaulichen Elektronenspin, den Goudsmit und Uhlenbeck in Leiden unter der Obhut des unabhängigen Ehrenfest publizieren dürfen auch dann noch, als Einstein und Bohr überzeugt sind. *So kann ich vorläufig zu Goudsmits Idee doch nur kopfschüttelnd sagen: 'Die Sache gefällt mir nicht!'* 'Die Sache' gefällt Pauli unter anderem deshalb nicht, weil sie mit der Spin-Bahn-Kopplung in Widerspruch zu sein scheint. Mit der Matrizenmechanik ist inzwischen eine echte Quantenmechanik aufgetaucht, mit der er und Heisenberg die Alkali-Dubletts mit dem Spin, gemäss der «neuen Irrlehre», d. h. mit Spin, rechnen und auf andere Widersprüche stossen. Doch im Februar 1926 meldet Bohr spitzbübisch eine «Überraschung für die gelehrten Relativitätsphysiker». Sein englischer Gast Llewellyn Thomas hat eine relativistisch korrekte Berechnung angestellt. Nun erst antwortet Pauli: *Jetzt bleibt mir nichts anderes übrig als vollständig zu kapitulieren. (...) Es tut mir leid, dass ich Ihnen durch meine Dummheit so viel Arbeit gemacht habe. (...) Somit ist also der erste Programmpunkt des Goudsmitschen Elektrons [Spin] zu dessen Gunsten entschieden.*

Im Gymnasium wird man aus Zeitgründen direkt **George Uhlenbeck und Samuel Goudsmit** als Erfinder des



Elektronenspins nennen. Das Foto zeigt Uhlenbeck links und Goudsmit rechts von Hendrik Kramers. Postdoc Goudsmit arbeitet in Leiden mit dem Neuling Uhlenbeck für Ehrenfest den Stand der Forschung auf. Die beiden jungen Forscher stossen auf den **Elektronenspin**, für den sie nie einen Nobelpreis erhalten werden. Sie wandern in die USA aus, arbeiten an der Radarentwicklung und forschen später an bedeutenden Universitäten. Goudsmit wird mit der ALSOS-Operation berühmt. Er muss die deutschen Kernphysiker, namentlich Werner Heisenberg, festnehmen und zum Verhör nach England bringen. Deren Kenntnisse dürfen nicht in die Hände der Russen fallen!

Die Lernenden werden den Spin zweifellos im Chemieunterricht begegnen. Für den Physikunterricht stellt sich das Dilemma der Veranschaulichung. Pauli schreibt dazu 1929: *In einer mehr die kinematischen Verhältnisse ins Auge fassenden Weise wird auch von einem 'rotierenden Elektron' (englisch: spin-electron) gesprochen. Die Vorstellung eines rotierenden materiellen Gebildes halten wir aber nicht für wesentlich und sie empfiehlt sich auch nicht wegen der Überlichtgeschwindigkeiten, die man dann in Kauf nehmen muss.* – Dem bleibt hinzuzufügen, dass der Spin als Vektorgrösse schlecht mit dem Wellenaspekt des Elektrons zu vereinbaren ist. Während Masse und Ladung durch das Orbitalbild mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung in Übereinstimmung gebracht werden können, gilt das für den Spin nicht. Er entzieht sich der Anschauung, ebenso wie die Matrizen, die Pauli 1927 zu seiner quantenmechanischen Beschreibung im komplexen Phasenraum erfindet.

Es passt zum krummlinigen Entwicklungsweg des Elektronenspins, dass sich Pauli und Goudsmit hinsichtlich der Priorität widersprechen. Pauli sagt in seiner Nobelpreisrede 1946: *I may include the historical remark that already in 1924, before the electron spin was discovered, I proposed to use the assumption of a nuclear spin to interpret the hyperfine structure of spectral lines. This proposal met on the one hand strong opposition from many sides but influenced on the other hand Goudsmit and Uhlenbeck in their claim of an electron spin.*

Der ebenso militante Goudsmit betont die Rolle von Ehrenfest und schreibt 1965 in den *Physikalischen Blätter[n]*: *Paulis Artikel vom Jahre 1924 kann sicher nicht als die Einführung des Spinbegriffs, der eine Eigenschaft eines einzelnen Elementarteilchens ist, betrachtet werden. Pauli erwartete nur für zusammengesetzte Kerne einen Drehimpuls, der von Bahnbewegungen herrührte.*

Goudsmit fährt fort: *In der Tat wurde der Spin des Protons erst 1927 entdeckt, und zwar nicht als Resultat von Feinstrukturüberlegungen. Der **Protonspin** ist von Hund eingeführt und bald danach von Dennison in seiner genialen Erklärung des abnormalen Verhaltens der spezifischen Wärme des molekularen Wasserstoffs bestätigt worden* – und nicht etwa von Pauli. Hund selbst ist in seiner «Geschichte der Quantentheorie» bescheidener und betont die vorangegangenen Symmetrieüberlegungen von Heisenberg. Dieser erhält 1932 den Nobelpreis, *for the creation of quantum mechanics, the application of which has, inter alia, led to the discovery of the allotropic forms of hydrogen* [verschiedene Formen von H₂].

Es ist bemerkenswert, dass der typisch quantenphysikalische Spin des Protons nicht durch ein Kern- oder Atomphysikalisches Experiment entdeckt wurde, sondern durch die Analyse von etwas Makroskopischem, der spezifischen Wärme von flüssigem Wasserstoff. Beginnend mit Einsteins Überlegungen zur spezifischen Wärme von Diamant 1907 war eine Quantenmechanik mitsamt Zustandskonzept entstanden. Ohne Einzelheiten zu kennen, machte Heisenberg Symmetriebetrachtungen mit Zuständen, in denen der Kernspin eine Rolle spielte. Später erkannte Dennison, dass gewöhnlicher Wasserstoff ein Gemisch aus **Ortho-** (mit entgegengesetzten Kernspins) und **Parawasserstoff**-Molekülen (mit parallelen Kernspins) ist. Flüssiger Wasserstoff bei 21 K, erstmals 1898 hergestellt, besteht praktisch nur aus Parawasserstoff.

Bis 1932 das Neutron entdeckt wurde, dachte man sich den Atomkern aus Protonen und Elektronen zusammengesetzt. Das erschwerte die Erfassung des kollektiven Kernspins, der für die Feinstruktur der Atomspektren wesentlich ist, die Pauli zehn Jahre früher Kummer bereitet hatte. Nicht zuletzt durch die Atombombenforschung entwickelte sich die Kernphysik sehr schnell. Mit dem Radar machte auch die Hochfrequenztechnik grosse Fortschritte. Sie ermöglichte, Elektronen- und Kernspins in statischen Magnetfeldern anzuregen und nach Resonanzen zu suchen (ESR und NMR).

Zwei Schweizer haben für ihre Beiträge zum **MRI** aus den 70er Jahren einen Chemie-Nobelpreis erhalten. 1991 Richard Ernst und 2002 Kurt Wüthrich. Beide



RICHARD ERNST, UM 1970

bildeten sich in den USA weiter (rechts Wüthrich als Postdoc in Berkeley) und wurden Professor an der ETH (links Ernst als Privatdozent). Ihre Nobelpreis-Biografien

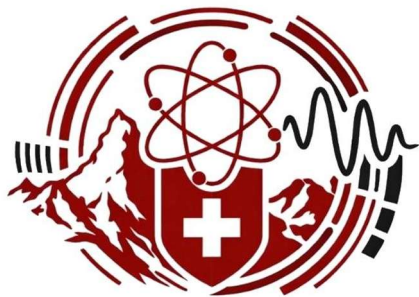


KURT WÜTHRICH
1966

verraten, dass zwei unterschiedliche Menschen im gleichen Forschungsgebiet zur Brücke von der Wissenschaft in die medizintechnischen Anwendungen beigetragen haben: Ernst, kunstliebend, von Nepal fasziniert und selbstkritisch; Wüthrich, zuerst Sportlehrer und Spitzensportler, begeistert vom Fischen in Neuseeland, selbstbewusst.

Die Lernenden kennen MRI als «Röhre». Vielleicht eignet sie sich als motivierender Unterrichtseinstieg. Die Geschichte beginnt mit Isidor Rabi, der 1927 aus den USA nach Europa kommt, um bei Schrödinger, Sommerfeld und Pauli Quantenphysik zu studieren. In Hamburg lernt er bei Otto Stern die Molekularstrahlmethode kennen. Zurück an der Columbia-University untersucht er magnetische Momente von Atomkernen. In einem äusseren Magnetfeld richten sie sich parallel oder antiparallel aus. Das mit einer Energieänderung ΔE verbundene Umkippen erreicht Rabi mit Hochfrequenzquanten gemäss der Bedingung $hf = \Delta E_{\text{magnetisch}}$. Das gilt auch für Protonen in einem H₂O- oder Eiweiss- oder Fett-Molekül, also im biologischen Umfeld.

Moderne MRI-Geräte besitzen supraleitende Magnete, die ein homogenes Feld von einigen Tesla Stärke erzeugen, so dass f im Radiobereich liegt. Im Unterschied zu den Röntgenquanten bewirken Radioquanten keine biologische Strahlenbelastung. Dem starken Magnetfeld werden hochfrequente Zusatzfelder überlagert, so dass – unerlaubt anschaulich gesprochen – die Kernmagnetchen zum Kreisel kommen. Dann überlässt man sie sich selbst. Sie strahlen die Energie $\Delta E = hf^*$ ab, kommen zum Stillstand und werden erneut angeregt. Das laute Rattern beim MRI entsteht durch variierende Magnetfelder, welche die räumliche Auflösung der Signale ermöglichen: Weil an verschiedenen Orten das Magnetfeld unterschiedlich stark ist, ist es auch das f^* , das man auffängt. Zusätzlich hängt die Relaxationszeit, in der die Magnetchen zum Stillstand kommen, von der Umgebung ab. Die Protonen besitzen eine vom Molekül-Typus abhängige Relaxationszeit. Die abgestrahlte Energie wird aufgefangen und mit sehr viel Rechen-Aufwand zu 3D-Bildern verarbeitet. Mit ihnen kann die Ärztin auf die Gewebeart schliessen, aus der das Signal kommt, und so beispielsweise ein gerissenes Kreuzband im Kniegelenk erkennen. Einerseits sind die mathematischen Methoden und andererseits die Rechnerleistungen so verbessert worden, dass es möglich ist, einem Gehirn in Echtzeit «beim Denken» zuzuschauen. Was würde wohl Pauli, den psycho-physische Parallelität interessiert hat, zu dieser Entwicklung sagen?



**39TH INTERNATIONAL YOUNG
PHYSICISTS' TOURNAMENT**
ZÜRICH • SWITZERLAND



ETH

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich



Teachers Day at the IYPT 2026 @ ETHZ

Beiträge auf Deutsch und Englisch

Mittwoch, 8. Juli 2026, 09:30 - 17:45 Uhr

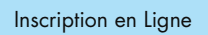
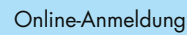
Thema

Projektbasierte Lehre und Besuch des International Young Physicists' Tournament (IYPT)

09:00 - 09:30	Begrüßungskaffee ETH Hauptgebäude, Foyer Nord, E-Stock, HG E 30.0065
09:30 - 09:40	Begrüßung Raum ML E12, M. Uthoff und A. Vaterlaus, ETHZ
09:40 - 10:15	Weshalb projektbasierte Lehre wertvoll ist A. Lichtenberger, ETHZ
10:15 - 11:00	Projekt im Grundlagenfach Physik P. Althaus, KS Uster
11:00 - 11:15	Verschiebung zum RZ Gebäude
11:15 - 12:15	Projekte am Project Based Learning Lab der ETHZ und Besuch der «Summer School of the World Food System Center» Raum RZ D8, F. Rittiner, ETHZ
12:30 - 13:15	Mittagessen in der ETH Mensa Polyterrasse
13:30 - 13:45	Einführung in das Wettbewerbsformat des IYPT (Raum: ML E12)
14:00 - 16:00	Visit Stage 1 and stage 2 of Fight 4 in room ML D28 (Englisch) Including break together with participants
16:00 - 16:30	Kaffeepause (ETH Hauptgebäude, Foyer Nord, E-Stock, HG E 30.0065)
16:30 - 17:00	Diskussionsrunde «Wie könnte das IYPT-Format an Schulen an Bedeutung gewinnen?» (ML E12)
17:00 - 17:30	«Was braucht es, um projektorientiert zu arbeiten?» D. Keller und A. Krayenbühl-Tapponnier, MNG Rämibühl
17:30 - 18:00	Verbindung von Smartphone-Experimenten und KI Zu diesem Thema ist eine ganztägige Weiterbildung im 2027 geplant. J. Kuhn, Ludwig-Maximilians-Universität München
18:00 - End	Apéro mit den Jurorinnen und Juroren des IYPT 2026 Dozenten Foyer im HG, J-Stockwerk

Bitte melden Sie sich bis zum 30. Juni 2026 über den nebenstehenden QR-Code oder den folgenden Link an: <https://ethzurich.eventsair.com/teachersday/regi>





Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematikund Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und Gymnasiallehrer (VSG) werden.

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

www.vsg-sspes.ch

Bulletin N° 161

Impressum

Herausgeber — Éditeur

VSMP – SSPMP – SSIMF

Korrespondenz — Correspondance

Franz Meier franz.meier@vsmp.ch
Werner-Kälin-Strasse 1 Tel. 041 210 25 58
8840 Einsiedeln

Layout — Mise en page

Samuel Byland samuel.byland@vsmp.ch
MNG Rämibühl Tel. 079 728 63 97
Rämistrasse 58
8001 Zürich

Inserateverwaltung — Publicité

Yves Roisin yves.roisin@vsmp.ch
Route de Josaphat 69 Tel. 078 696 03 69
1763 Granges-Paccot

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

— Tarifs pour les annonces et les annexes

Inserate:

ganzseitig Fr. 500.–
halbseitig Fr. 300.–

Beilagen:

bis 20 g Fr. 500.–
über 20 g nach Vereinbarung

Adressänderungen — Changement d'adresse

VSMP Mitglieder — Membres de la SSPMP:
VSG – SSPES – SSISS
Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)
Erlacherstrasse 16B
3012 Bern
Tel. 031 382 52 33
information@vsg-sspes.ch

übrige Abonnenten — autres abonnées:

Franz Meier franz.meier@vsmp.ch
Werner-Kälin-Str. 1 Tel. 041 210 25 58
8840 Einsiedeln

Auflage — Tirage

800 Exemplare
erscheint dreimal jährlich

Präsidentin VSMP — SSPMP — SSIMF

Tatiana Mantuano tatiana.mantuano@vsmp.ch
Grand'Rue 16 Tel. 078 629 12 36
2075 Wavre

Deutscheschweizerische Mathematikkommission

Barbara Fankhauser praesidium@dmk.vsms.ch
Gymnasium Bäumlihof
Angela Vivot praesidium@dmk.vsms.ch
Kantonsschule Rotkreuz

Deutscheschweizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@vsmp.ch
Gymnasium Burgdorf Tel. 031 638 03 03
Pestalozzistrasse 17
3400 Burgdorf

Commission Romande de Mathématique

Sylvie Luisier sylvie.luisier@vsmp.ch
39, ch. des Sellières Tél. 078 689 34 11
1219 Acère

Commission Romande de Physique

Yves Oestreicher yves.oestreicher@vsmp.ch
Malvand 13 Tél. 079 796 69 95
1292 Chambésy

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Guido Lob guido.lob@vsmp.ch
Via Borghese 14 Tel. 078 663 13 37
6600 Locarno

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

— Délais de rédaction (de parution)

Nr. 162 31.07.2026 (Ende September)
Nr. 163 30.11.2026 (Ende Januar)
Nr. 164 31.03.2027 (Ende Mai)

Druck und Versand — Imprimerie

Niedermann Druck AG
Letzistrasse 37
9015 St. Gallen
www.niedermanndruck.ch

Internet:

www.vsms.ch – www.sspmp.ch – www.ssimf.ch



V S M P
S S P M P
S S I M F

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica