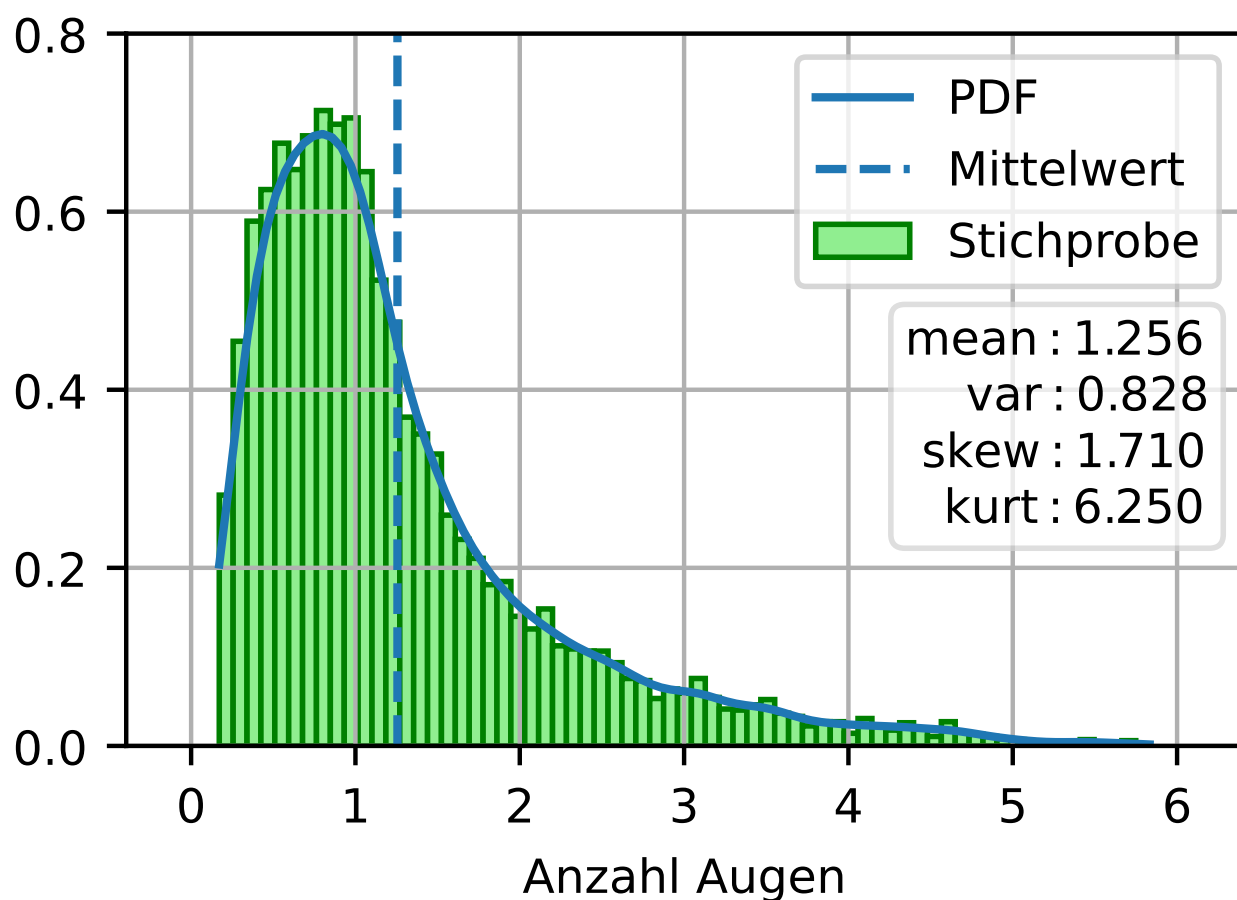




TI Bluetooth® Adapter

Der TI Bluetooth®-Adapter ermöglicht es ausgewählten Texas Instruments (TI)-Taschenrechnern, sich drahtlos mit mehreren der beliebtesten Go Direct®-Sensoren zu verbinden.

In Verbindung mit dem TI Bluetooth® Adapter können die Schüler:innen ihre Messdaten mithilfe eines TI-Rechners und selbst geschriebener Python-Programme schnell und einfach drahtlos erfassen.



Zum
Produkt



Unterstützte Go Direct® Sensoren sind:

Kraft- und Beschleunigungssensor, Licht- und Farbsensor, Bewegungsmelder, pH-Sensor, Gasdruck-Sensor, Temperatursensor



EducaTec – Systems GmbH
 Telefon +41 31 511 87 40
 info@educatec-systems.ch
 www.educatec-systems.ch

Business Office
 Grossächerstrasse 2
 8966 Oberwil-Lieli

Service Center
 Bahnhof 1
 3313 Büren zum Hof

Internet-Adressen – *Adresses Internet*

www.vsmf.ch – www.sspmp.ch – www.ssimf.ch

Titelseite – *Page de Titre*

Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines bestimmten Quotienten der Augenzahl bei zwei Würfeln (A / B). Artikel auf Seite 8 in dieser Ausgabe.

Bulletin N° 160

Inhaltsverzeichnis

AUS DEM VORSTAND	6
Tatiana Mantuano Quelques mots de la nouvelle présidente/Einige Worte der neuen Präsidentin/Qualche parola della nuova presidente	6
DEUTSCHSCHWEIZERISCHE PHYSIKKOMMISSION	8
Zievi Ursin Solè Einfacher numerischer Zugang zur Fehlerfortpflanzung	8
Hans Peter Dreyer Von Heisenberg zu Haroche und Wineland: «Kopenhagen» in Gedanken- und Realexperimenten	13
Martin Lieberherr Lungengängig	17
DEUTSCHSCHWEIZERISCHE MATHEMATIKKOMMISSION	20
Georg Keller Physikalische Anwendungen der Differentialrechnung: Ein möglicher Einstieg im Mathematik-Unterricht	20
H.U. Keller Vier wenig bekannte Formeln für bestimmte Integrale	26
COMMISSION ROMANDE DE MATHÉMATIQUE	32
Alexandre Junod Les équations de Pell-Fermat généralisées	32

Tatiana Mantuano
Présidente SSPMP, presidente@sspmp.ch

Quelques mots de la nouvelle présidente Einige Worte der neuen Präsidentin Qualche parola della nuova presidente

Chers membres de la SSPMP,
chères lectrices, chers lecteurs,

Lors de l'assemblée générale du 28 novembre 2025, j'ai été élue au comité directeur de la SSPMP et j'ai l'honneur d'en assumer désormais la présidence, succédant ainsi à Josef Züger, amicalement surnommé Sepp.

Durant son mandat, Sepp a conduit avec habileté les consultations relatives à la réforme de la maturité gymnasiale. Il a eu à cœur de défendre nos intérêts auprès des écoles, des Cantons et de la Confédération. Il a représenté notre association au sein de la SSPES, aux côtés des autres sociétés de branches. Pour son engagement et pour tout le travail accompli avec rigueur et détermination, je lui adresse une nouvelle fois mes plus vifs remerciements.

C'est avec un profond respect que je reprends aujourd'hui la présidence de la SSPMP. L'année 2026 s'annonce comme une période de transition pour notre société : les nombreux « départs à la retraite » au sein du comité, ainsi que l'accueil de nouveaux membres, insuffleront un élan de renouveau. J'aurai à cœur de conduire cette évolution tout en préservant la riche tradition associative qui fait la force de notre société. Je mesure pleinement la responsabilité qui m'incombe envers les enseignantes et enseignants de mathématiques et de physique de toutes les régions linguistiques de Suisse.

Je souhaite poursuivre l'œuvre de mes prédécesseurs en garantissant à nos commissions (CMSI, CRM, CRP, DMK et DPK) un cadre propice à l'organisation de formations continues de qualité, à la diffusion de moyens d'enseignement largement utilisés et à la défense de nos intérêts communs pour un enseignement de qualité. Pour cela, je sais pouvoir compter sur l'engagement de notre comité, que je remercie dès à présent pour son soutien.

L'année 2026 sera aussi l'occasion d'accueillir de nouvelles forces au sein du comité. Si vous souhaitez vous investir dans une fonction ou si un projet vous tient à cœur, n'hésitez pas à nous contacter.

Je vous souhaite une agréable lecture de ce « Bulletin ».

Tatiana Mantuano, présidente de la SSPMP

Liebe Mitglieder des VSM,
liebe Leserinnen und Leser

An der Generalversammlung vom 28. November 2025 wurde ich in den Vorstand des VSM gewählt und habe nun die Ehre, das Präsidium als Nachfolgerin von Josef Züger, freundschaftlich Sepp genannt, zu übernehmen.

Während seiner Amtszeit hat Sepp die Vernehmlassungen zur Reform der gymnasialen Maturität mit grossem Geschick geleitet. Es war ihm ein besonderes Anliegen, unsere Interessen gegenüber den Schulen, den Kantonen und dem Bund zu vertreten. Zudem hat er unseren Verband innerhalb des VSG neben den anderen Fachverbänden würdig vertreten. Für sein Engagement und die mit Sorgfalt und Entschlossenheit geleistete Arbeit möchte ich ihm an dieser Stelle noch einmal meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Mit grossem Respekt übernehme ich heute das Präsidium des VSM. Das Jahr 2026 verspricht eine Zeit des Wandels für unseren Verein zu werden: die zahlreichen „Pensionierungen“ innerhalb des Vorstands sowie die Aufnahme neuer Mitglieder werden für frischen Schwung sorgen. Es ist mir ein Anliegen, diese Entwicklung voranzutreiben und gleichzeitig die reiche Tradition zu bewahren, die die Stärke des Vereins ausmacht. Ich bin mir der Verantwortung gegenüber den Mathematik- und Physiklehrpersonen aller Sprachregionen der Schweiz voll und ganz bewusst.

Ich möchte das Werk meiner Vorgänger fortsetzen und unseren Kommissionen (CMSI, CRM, CRP, DMK und DPK) einen Rahmen bieten, der die Organisation ausgezeichneter Weiterbildungen, den Vertrieb bewährter Lehrmittel und die Verteidigung unserer gemeinsamen Interessen für einen qualitativ hochwertigen Unterricht ermöglicht. Dabei kann ich mich auf das Engagement unseres Vorstands verlassen, dem ich schon jetzt für seine Unterstützung danke.

Das Jahr 2026 wird auch Gelegenheit bieten, neue Kräfte im Vorstand willkommen zu heißen. Wenn du dich in einer Funktion engagieren möchtest oder dir ein Projekt am Herzen liegt, kontaktiere uns einfach!

Ich wünsche dir eine anregende Lektüre mit diesem «Bulletin».

Tatiana Mantuano, Präsidentin des VSM

Cari membri della SSIMF,
care lettrici e cari lettori,

durante l'assemblea generale del 28 novembre 2025 sono stata eletta nel comitato della SSIMF e ho l'onore di assumerne la presidenza, succedendo così a Josef Züger, affettuosamente chiamato Sepp.

Durante il suo mandato, Sepp ha condotto con grande abilità le consultazioni sulla riforma della maturità liceale. Ha difeso con impegno i nostri interessi presso le scuole, i Cantoni e la Confederazione, e ha rappresentato la nostra associazione all'interno della SSISS, insieme alle altre società affiliate. Per il suo instancabile impegno e per il lavoro svolto con rigore e determinazione, desidero rivolgergli ancora una volta i miei più sentiti ringraziamenti.

È con grande rispetto che oggi assumo la presidenza della SSIMF. Il 2026 si preannuncia come un periodo di transizione per la nostra società: i numerosi “pensionamenti” all'interno del comitato e l'arrivo di nuovi membri daranno nuovo slancio. Mi impegnerò a guidare questa evoluzione, preservando al contempo la ricca tradizione associativa che costituisce la forza della nostra società. Sono pienamente consapevole della responsabilità che mi incombe nei confronti degli insegnanti di matematica e di fisica di tutte le regioni linguistiche della Svizzera.

Desidero proseguire l'opera dei miei predecessori garantendo alle nostre commissioni (CMSI, CRM, CRP, DMK e DPK) un quadro favorevole all'organizzazione di corsi di formazione continua di qualità, alla diffusione di materiali didattici ampiamente utilizzati e alla difesa dei nostri interessi comuni per un insegnamento di qualità. Per questo so di poter contare sull'impegno del nostro comitato, che ringrazio sin d'ora per il suo sostegno.

Il 2026 sarà anche l'occasione per accogliere nuove forze all'interno del comitato. Se desiderate assumere un ruolo o se avete a cuore un progetto, non esitate a contattarci.

Vi auguro una piacevole lettura di questo «Bulletin».

Tatiana Mantuano, presidente della SSIMF

Zievi Ursin Solèr
 Fachhochschule Graubünden, ursin.soler@fhgr.ch

Einfacher numerischer Zugang zur Fehlerfortpflanzung

1 Einleitung / Motivation

Der Kosmos und dessen Naturgesetze können erstaunlich komplex sein. Während sich die Mathematik mit allem Denkbaren befasst und so nur an die Grenzen der Logik und der Fantasie gebunden ist, hat sich die Physik das einschränkende Ziel gesetzt, die Natur um uns herum abzubilden und befasst sich darum mit dem Beobacht- und Messbaren. Hier liegt eine der grossen Stärken, aber auch eines der grossen Probleme der Physik. Es gibt die Möglichkeit, Experimente durchzuführen, um Antworten zu finden, allerdings müssen dazu auch Messungen gemacht werden und diese unterliegen - in der uns zur Verfügung stehenden Natur - der Streuung und Fehlern. Diese Messfehler nötigen uns, die Methoden der Statistik anzuwenden, um Einsicht in die Zusammenhänge zu erhalten.

Ich arbeite heute als Dozent an einer Fachhochschule und kann sagen, den meisten unserer Studierenden geht es gleich wie mir; Messergebnisse (statistisch) zu interpretieren birgt Tücken. Allzu häufig ignorieren wir die komplexen und subtilen Details und kommen mit einer einfachen, schnellen Messung davon. Sollte das doch nicht reichen, gibt es die Allzweckwaffen *Mittelwert* und *Varianz*. Damit begeben wir uns - oft unbewusst - in das Reich der Normalverteilung. Dies reicht in sehr vielen Fällen aus, aber fassen die Probleme tiefer - haben wir es mit anderen Verteilungen zu tun - reicht ein Kratzen an der Oberfläche nicht mehr aus.

Einer der Schlüsselmomente für mich war die Erkenntnis, dass das Gauss'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz sehr schnell an Grenzen stösst. Die Gauss'sche Fehlerfortpflanzung ist häufig das obere Limit, das Studierende gewinnenbringend einsetzen können. Darum stellt sich die Frage, ob es einfachere Methoden und Zugänge gibt, diese Zusammenhänge abzubilden und verstehbar zu machen.

2 Grundrechenoperationen mit Würfeln

Mit der Einführung von Computern sowie Skript- und Programmiersprachen, die vektorisiert auf N Werten genauso rechnen können, wie skalar auf einzelnen Grössen, haben wir ein sehr mächtiges Werkzeug erhalten [1]. Nutzen wir dieses zur Betrachtung der Grundrechenoperationen, indem wir zuerst N Werte aus einer gegebenen Verteilung als Liste speichern und statt mit einzelnen Werten mit dieser Liste (Stichprobe) arbeiten^a.

Wichtig dabei ist, wie wir die Stichprobe erzeugen; gute Ergebnisse lassen sich mit dem *Latin hypercube sampling (LHS)* erzielen [5].

Angenommen, wir haben zwei Grössen, deren Werte nicht exakt bekannt sind, sondern die gleichverteilt innerhalb eines gegebenen Intervalls liegen, z.B. zwei Würfel und die dazugehörigen Listen von Werten A und B .

Problem: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer bestimmten Augenzahl bei einem Würfel (A oder B)?

Die Verteilungen A und B sind nicht korreliert und zur besseren Veranschaulichung kleiner Unterschiede

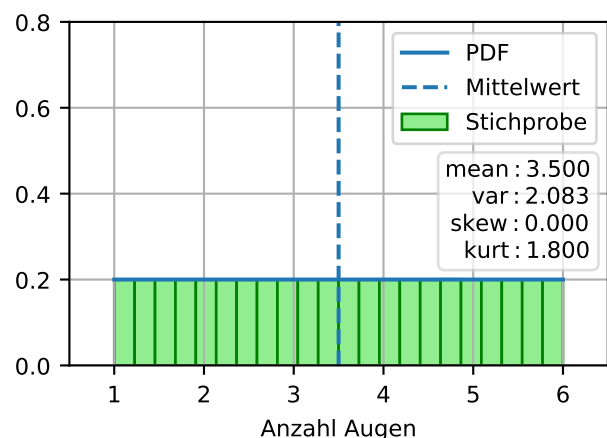


Abbildung 1: Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer bestimmten Augenzahl bei einem Würfel (A oder B).

sowie zur Verallgemeinerung werden kontinuierliche Variablen verwendet^b.

Die Frage danach, wie sich diese Grössen und deren Verteilung unter einfachen arithmetischen Operationen der 1. und 2. Stufe verhalten, führt zu interessanten Erkenntnissen.

Problem: *Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer bestimmten Summe der Augenzahl bei zwei Würfeln ($A + B$)?*

Wir müssen nichts weiter tun, als die beiden Listen für A und B elementweise zu addieren. Der Mittelwert^c verhält sich so, wie sich die Addition der (exakten) skalaren Werte verhält (also ohne Streuung); es ist $3.5 + 3.5 = 7.0$. Allerdings ist die Verteilung nun nicht mehr gleichförmig, sondern dreieckig^d. Das ist entscheidend; die Verteilung für $A + B$ verhält sich grundsätzlich anders als diejenige von A oder B . Die Verteilung von $A + B$ ist symmetrisch.

Für die Subtraktion $A - B$ erhalten wir dasselbe Verhalten mit einem Mittelwert von 0.0, weil -1 multipliziert mit B die Verteilung an der y-Achse spiegelt. Die Multiplikation führt zu folgendem

Problem: *Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines bestimmten Produkts der Augenzahl bei zwei Würfeln?*

Wie in Abb. 3 zu sehen, ist die Verteilung von $A \cdot B$ nicht mehr symmetrisch, sondern zeigt höhere Wahrscheinlichkeiten für Werte, die kleiner sind als der Mittelwert. Das bedeutet, in so einem Experiment werden wir häufiger Werte erhalten, die kleiner sind als der Mittelwert und nur vereinzelt grössere Werte, bis zu ca. 3 Mal so gross wie der Mittelwert (maximal 36).

Problem: *Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines bestimmten Quotienten der Augenzahl bei zwei Würfeln?*

Im Falle der Division zeigt sich ein ähnliches Verhalten wie bei der Multiplikation.

Sicher sagen können wir, dass diese Verteilungen nicht mehr gleichförmig sind und im Falle der 2. Stufe asymmetrisch werden, so dass im Experiment der Eindruck entstehen kann, dass der Mittelwert kleiner ist (das Maximum der PDF) weil einzelne grössere Werte aufgrund der Seltenheit Gefahr laufen, als Ausreisser klassifiziert und aussortiert zu werden.

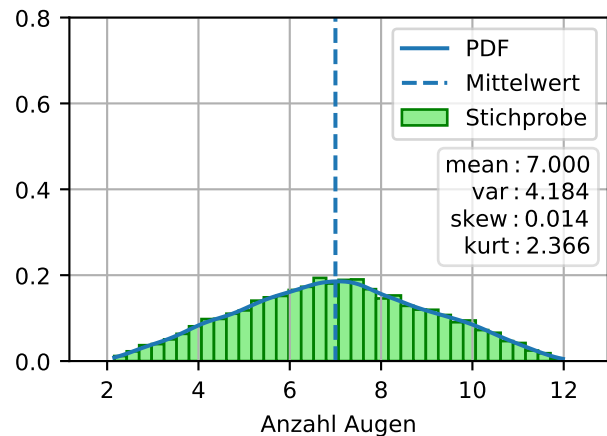


Abbildung 2: Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer bestimmten Summe der Augenzahl bei zwei Würfeln ($A + B$).

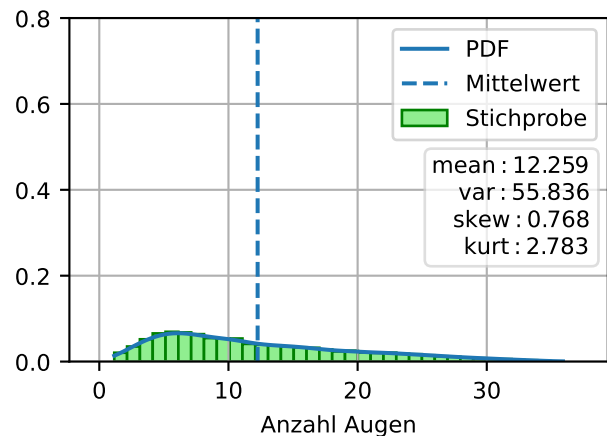


Abbildung 3: Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines bestimmten Produkts der Augenzahl bei zwei Würfeln ($A \cdot B$).

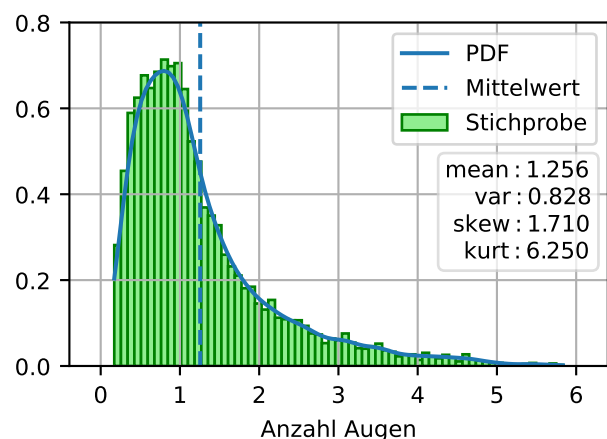


Abbildung 4: Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines bestimmten Quotienten der Augenzahl bei zwei Würfeln (A / B). Zu bemerken ist hier, dass der Mittelwert nicht mehr mit der Intuition übereinstimmt, denn er ist ungleich 1.

3 Fehlerfortpflanzung in der Physik

Betrachten wir ein typisches Beispiel aus dem Physikunterricht, ein Fadenpendel. Wir vergleichen das Gauss'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz mit dem hier präsentierten Ansatz.

Problem: Für ein Fadenpendel gilt zwischen Erdbeschleunigung g , Fadenlänge l , und Periode T der folgende Zusammenhang $g = 4\pi^2 l T^{-2}$. Bestimmen Sie aus $(l \pm \Delta l) = (1.00 \pm 0.05)$ und $(T \pm \Delta T) = (2.0 \pm 0.2)$ den Fehler Δg .

Wie Abb. 5 zeigt, ist dies keine Normalverteilung (Schiefe/Skewness = 0.0 und Wölbung/Kurtosis = 3.0) und darum gibt die Gauss'sche Fehlerfortpflanzung in diesem Fall mit (9.870 ± 2.035) (Varianz: 4.140) eine falsche Antwort.

Weder der Mittelwert noch die Varianz sind korrekt. Das ist nicht überraschend, berücksichtigt man die Tatsache, dass die Gauss'sche Fehlerfortpflanzung eine Approximation erster Ordnung und damit linear ist (1. Glied der Taylor-Reihe). Der T^{-2} Term kann nicht akkurat approximiert werden. Dennoch funktioniert diese Approximation für kleine Fehler in den kritischen Termen gut. Das bedeutet, sofern der Fehler in T klein ist, kann er im linearen Term l auch grösser sein^e und trotzdem ist das Resultat korrekt, z.B. mit $(l \pm \Delta l) = (1.00 \pm 0.2)$ und $(T \pm \Delta T) = (2.0 \pm 0.05)$.

Das Resultat stimmt nun wegen des kleinen Fehlers im nicht-linearen Teil T viel besser mit der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung überein; (9.870 ± 2.035) (Varianz: 4.140).

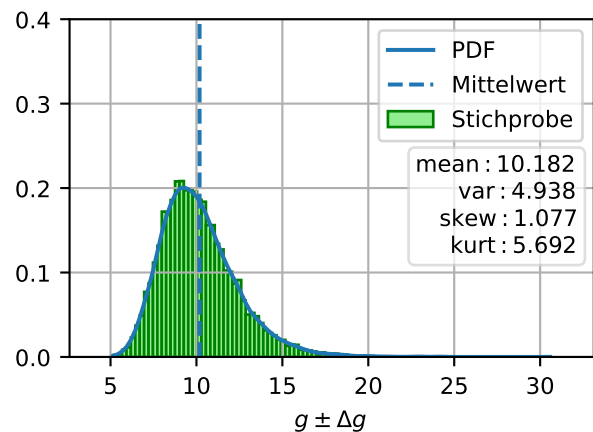


Abbildung 5: Fadenpendel mit grosser Varianz: $(g \pm \Delta g)$ für $(l \pm \Delta l) = (1.00 \pm 0.05)$ und $(T \pm \Delta T) = (2.0 \pm 0.2)$.

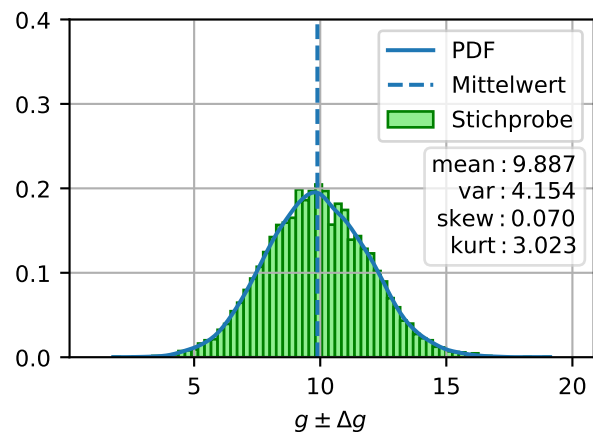


Abbildung 6: Fadenpendel mit kleiner Varianz: $(g \pm \Delta g)$ für $(l \pm \Delta l) = (1.00 \pm 0.2)$ und $(T \pm \Delta T) = (2.0 \pm 0.05)$.

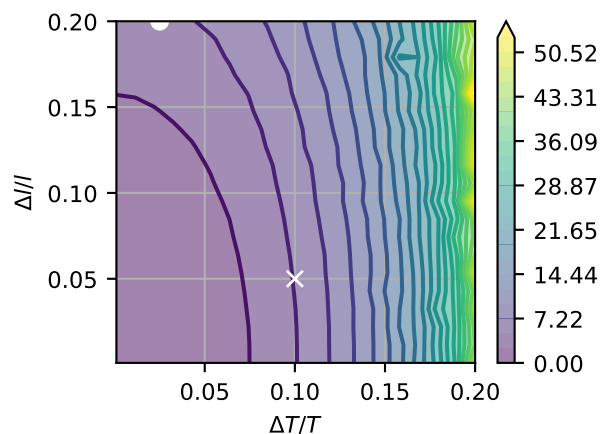
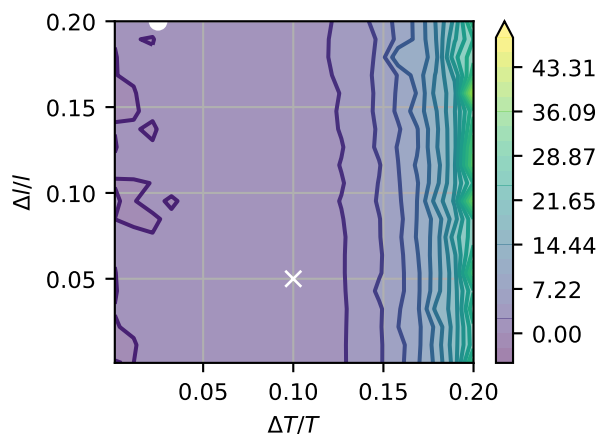


Abbildung 7: Zusammenfassung Fadenpendel zum Vergleich der Varianz in Abhängigkeit von Δl vs. ΔT . Die Abweichung der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung (links) sowie die Varianz (rechts) sind kritischer in ΔT -Richtung. Das Kreuz entspricht Abb. 5, der Punkt Abb. 6.

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Messung eines elektrischen Widerstands.

Problem: Bestimmen Sie aus $(U \pm \Delta U) = (1.0 \pm 0.01)$ und $(I \pm \Delta I) = (0.02 \pm 0.002)$ den Widerstand, sowie dessen Fehler ($R \pm \Delta R$).

Es zeigt sich in Abb. 8 eine leichte Abweichung von der Normalverteilung, und auch hier führt der Fehler im nicht-linearen Term I zu Problemen, wie in der Übersicht in Abb. 9 zu sehen ist.

Meine Erfahrung zeigt, dass die Intuition für symmetrische Verteilungen gut ist, aber in Fällen von unsymmetrischen Verteilungen, die z.B. bei Operationen der 2. Stufe auftreten, versagt sie in vielen Fällen.

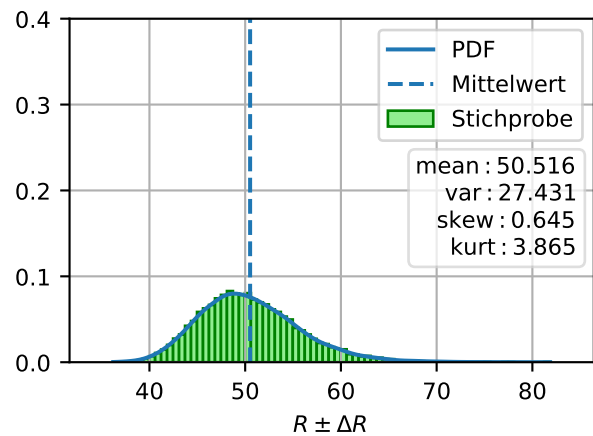


Abbildung 8: Widerstand: $(R \pm \Delta R)$ für die Werte $(U \pm \Delta U) = (1.0 \pm 0.01)$ und $(I \pm \Delta I) = (0.02 \pm 0.002)$.

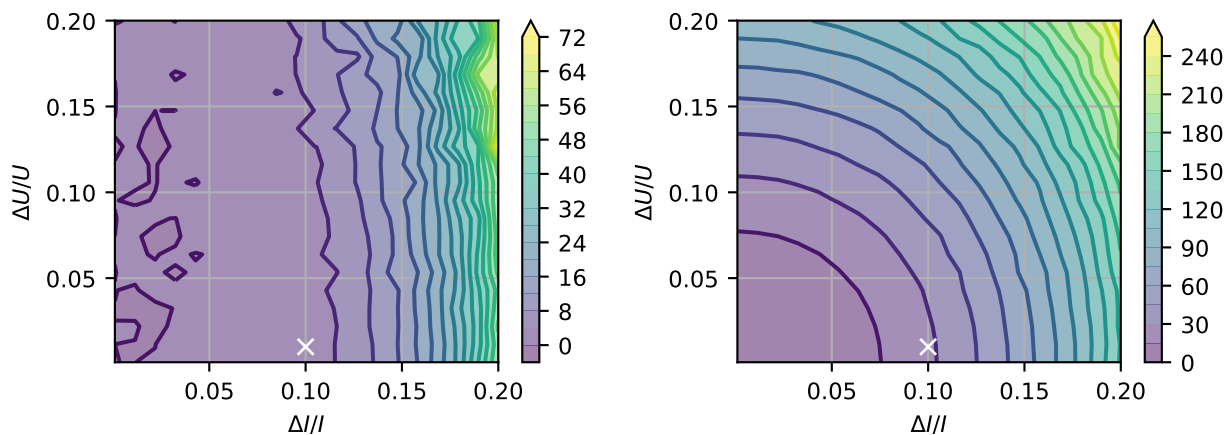


Abbildung 9: Zusammenfassung Widerstand zum Vergleich der Varianz in Abhängigkeit von ΔU vs. ΔI . Die Abweichung der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung (links) sowie die Varianz (rechts) sind kritischer in ΔI -Richtung. Das Kreuz entspricht Abb. 8.

4 Schlusswort

Die Arbeit mit fehlerbehafteten Größen ist anspruchsvoll. Moderne Methoden, wie die Verwendung computergestützter, vektorisierter Berechnungen, ermöglichen es, im Rahmen von Monte-Carlo-Simulationen diese Größen als Wahrscheinlichkeitsverteilungen darzustellen und so entlang der gesamten Berechnung zu verfolgen, wie sie sich verändern. Der Aufwand dafür ist minimal, da die Berechnungen nicht angepasst werden müssen. Stattdessen können einfach die skalaren Ausgangsgrößen durch Listen von Stichproben ersetzt werden.

Als Beispiel seien hier Anwendungen erwähnt aus dem Ingenieurwesen zur Analyse der Bereiche, in denen sich Parameter verändern oder bei physikalischen Experimenten, um zu verstehen, wie gross der Einfluss verschiedener Messgrößen auf das Ergebnis und die Auflösung sind. Generell können auch mathematische Simulationen gemacht werden, um zu verstehen, wie sich Wahrscheinlichkeitsverteilungen unter mathematischen Operationen verhalten.

Die Ausführungen hier zeigen insbesondere, dass die Gauss'sche Fehlerfortpflanzung sicher ein nützliches Werkzeug ist, die Grenzen der Anwendbarkeit aber subtil sind. Konkret darf es für Terme, die nicht linear sind, nur *beschränkt und für kleine Fehler* verwendet werden. Also solange die resultierende Verteilung eine Gauss-/Normalverteilung ist^f.

Für die praktische Anwendung und einfache Tests kann ich die Online-Applikation *NIST Uncertainty Machine* [2] empfehlen. Für die Umsetzung im Unterricht ist Python [3] eine gute Möglichkeit. Es gibt verschiedenste Pakete, die vektorisierte Berechnungen erlauben [4], Monte-Carlo-Simulationen durchführen [5] oder auch Modelle von Differentialgleichungen anhand von posteriori Daten detailliert analysieren können [6]. Für die automatische Berechnung der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung gibt es ebenso frei verfügbare Lösungen [7].

Alle in diesem Artikel gezeigten Beispiele sind in einem frei verfügbaren Notebook zusammengefasst [9] und zur einfachen Nachvollziehbarkeit vorgerechnet.

Anmerkungen

- a. Dieses Vorgehen entspricht einer Monte-Carlo-Simulation.
- b. Reelle Zahlen bzw. Float-Variablen statt ganze Zahlen bzw. Integer-Variablen.
- c. Als Approximation zum Erwartungswert wird im Sinne des Gesetzes der grossen Zahlen der Mittelwert der Stichproben verwendet.
- d. Die Summe von unabhängigen gleichverteilten Zufallsvariablen auf dem Intervall $[0;1]$ ist eine Irwin-Hall-Verteilung, sie nähert sich der Normalverteilung an (Zentraler Grenzwertsatz).
- e. Der Fehler ΔI kann tatsächlich 50% und mehr sein, das wurde hier aber aufgrund der Übersichtlichkeit nicht dargestellt.
- f. "Das Gesetz ist nur anwendbar, wenn sich die Modellfunktion [...] bei Änderungen der Einflussgrössen [...] im Bereich ihrer Standardunsicherheiten [...] hinreichend linear verhält. Ist dies nicht der Fall, ist das Rechenverfahren erheblich aufwändiger. Die Norm DIN 1319 [3] und der 'Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen' geben Hinweise, wie eine unzulässige Nicht-linearität zu erkennen und zu umgehen ist. Ausserdem ist Varianzhomogenität vorausgesetzt." [8]

Links

- [1] V. Tsoutsouras et al.: *The Laplace Microarchitecture for Tracking Data Uncertainty and Its Implementation in a RISC-V Processor* (doi.org/10.1145/3466752.3480131)
- [2] *NIST Uncertainty Machine* (uncertainty.nist.gov), Version 1.6.2
- [3] *python* (www.python.org)
- [4] *NumPy* (numpy.org)
- [5] *mcerp: Monte Carlo error propagation* (pythonhosted.org/mcerp)
- [6] *Chaospy: uncertainty quantification using polynomial chaos expansions* (chaospy.readthedocs.io)
- [7] *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties* (pythonhosted.org/uncertainties)
- [8] *Wikipedia: Fehlerfortpflanzung*
- [9] *IPython Notebook mit Beispielen* (gitlab.com/ursin-soler/vsmp-bulletin_fehlerfortpflanzung)

Hans Peter Dreyer
Ebnet-Kappel, hp.dreyer@thurweb.ch

Von Heisenberg zu Haroche und Wineland: «Kopenhagen» in Gedanken- und Realexperimenten

Auch hier stösst man übrigens wieder darauf, dass man nicht nach p und q zugleich fragen darf. (W. Pauli an W. Heisenberg, 1926)

If I were forced to sum up in one sentence what the Copenhagen interpretation says to me, it would be "Shut up and calculate!" (D. Mermin in PHYSICS TODAY, 1985)

Während Werner Heisenberg eine Professur in Leipzig ausschlägt, um im neuen Zentrum für theoretische Physik in Kopenhagen mit Niels Bohr Forschung betreiben zu können, ist der erst 26-jährige Wolfgang Pauli bereits Professor in Hamburg. Im Herbst 1925 hat er mit der von Heisenberg, Born und Jordan erfundenen Matrizenmechanik die Energieniveaus des H-Atoms berechnen können. Seine Studentin Lucy Mensing untersucht mit der gleichen Methodik die Infrarot-Spektren von zweiatomigen Molekülen und erklärt «Die Rotations-Schwingungsbanden nach der Quantenmechanik». Eine Basis dieser unanschaulichen Theorie ist die Nicht-Vertauschbarkeit von Matrizen, die physikalische Grössen darstellen. Vorschriften wie $pq - qp = h/2\pi i$, wo p die Impuls- und q die Ortsmatrix bedeuten, werden z. B. beim H-Atom bestätigt, aber von Einstein als Hokusfokus bezeichnet.

Besonders angesichts der erfolgreichen Wellenmechanik will Pauli die Hintergründe besser verstehen. Am 19. Oktober 1926 leitet er das Ergebnis seiner Überlegungen in einem zwölfseitigen Brief an Heisenberg weiter. Ein Satz daraus wird berühmt: *Man kann die Welt mit dem p -Auge und man kann sie mit dem q -Auge ansehen, aber wenn man beide Augen aufmachen will, wird man irre.* Paulis Brief zirkuliert in der internationalen Gesellschaft am Kopenhagener Institut. Er wird Ausgangspunkt für Heisenbergs quantitative Unbestimmtheitsrelation, für Bohrs qualitative Komplementarität und für die vielschichtige «Kopenhagener Interpretation» des Formalismus der neuen Physik.



BOHR, HEISENBERG UND PAULI
1936

Ein Streitpunkt ist, ob sich die Quantenmechanik auf Einzelobjekte bezieht, wie Einstein glaubte, oder nur auf



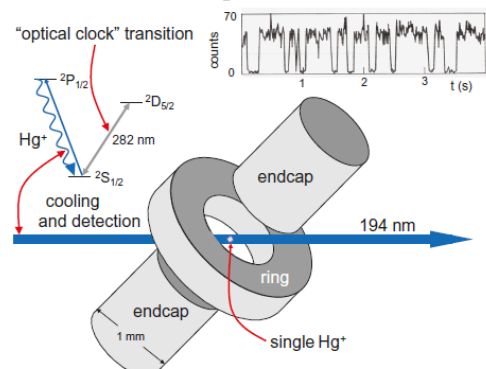
Serge Haroche

David Wineland

grosse Gruppen von gleich präparierten Objekten, sog. Ensembles. Die «Kopenhagener» sind von der Ensemble-Interpretation überzeugt. Noch 1952 schreibt Schrödinger: *It is fair to state that we are not experimenting with single particles any more than we can rise Ichthyosauria in the zoo.* Er hat die Entwicklung nicht vorhersehen können, denn genau für solche Experimente werden 2012, viele Jahre später, die Physik-

nobelpreise vergeben. Als Begründung dieser Ehre für den Franzosen Serge Haroche und den Amerikaner David Wineland steht: (...) *for ground-breaking experimental methods that enable measuring and manipulation of individual quantum systems.*

Die Suche nach immer präziseren Atomuhren motiviert Winelands Team zu raffinierten Experimenten. Im Bild ist eine elektromagnetische Falle dargestellt, die **ein einzelnes Hg-Ion** festhält. Es wird durch einen UV-Laser beleuchtet, der es zum Fluoreszieren bringen. Das kleine Diagramm zeigt, dass die Fluoreszenz immer wieder kurz unterbrochen wird: die Kurve fällt auf 0. Die Unterbrüche dokumentieren die von Schrödinger verwünschten Quantensprünge des Elektrons vom 2S -Niveau auf das 2D -Niveau und zurück. Im Energiediagramm sind sie als «optical clock transition» bezeichnet: nicht Kern- sondern Atomresonanz! Ein Quantensprung nach oben verunmöglicht die Absorption der 194 nm-Quanten und unterbricht die Fluoreszenz.



WINELAND ET AL.

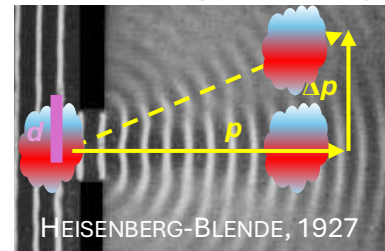
NOBEL

Der spontane Quantensprung ist also kein Konzept, über das man geteilter Meinung sein kann wie Bohr und Schrödinger 1926, sondern ein experimentell bestätigter, auch heute irritierender Wesenszug einzelner Quantenobjekte.

Ein anderer Streitpunkt zwischen Einstein und den «Kopenhagenern» war die Frage, ob man nicht doch gleichzeitig mit dem p - und dem q -Auge sehen könne. Wenn man das könnte, wäre die Unbestimmtheitsrelation verletzt, und die Quantenmechanik müsste in dieser Hinsicht ergänzt werden. Dass die Quantentheorie auch um die Gravitation ergänzt werden müsste – ein bis heute trotz des Gravitons nicht zufriedenstellend gelöstes Problem – erkannte Einstein schon 1916.

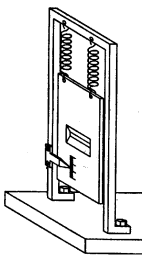
Wie könnte man die aus dem abstrakten Formalismus hervorgehenden Unbestimmtheitsrelationen (UBR) im Gymnasium verstehen? In Heisenbergs Buch «Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik» geht es ihm darum, die *Grundbegriffe der Quantentheorie* anhand von Gedankenexperimenten zu erläutern. Im Kapitel «Kritik der physikalischen Begriffe des Partikelbildes» bringt er zwei Experimente. Zuerst untersucht er das berühmte **Heisenberg-Mikroskop**. Es illustriert, wie bei einer Ortsmessung unter dem Mikroskop-Objektiv der Impuls des Lichtquants der Beleuchtung stört und die Genauigkeit einschränkt. Das führt zu $\Delta x \cdot \Delta p \approx h$. Fasst man Δx und Δp als Ungenauigkeiten der Messwerte für x und p auf, drückt die Beziehung Paulis «Irre werden» quantitativ aus.

Weniger bekannt ist Heisenbergs zweites Gedankenexperiment, bei dem es um eine **Ortsmessung mit Blende** geht. Die Quantenobjekte können auch im Wellenbild untersucht werden, wenn man von ihrer de Broglie-Wellenlänge λ_{dB} ausgeht. Beim Durchgang durch die Blende werden die Wellen gebeugt. Die Ablenkung geht etwa bis zur angedeuteten Stelle. Dort gibt es die 1. konstruktive Interferenz der Beugung am Einfachspalt mit Breite d . Heisenberg nimmt für die Unbestimmtheit des Orts $d \approx \Delta x$. Vor der Blende hatte der Impuls quer zur Ausbreitungsrichtung den Wert 0. Nun besitzt das Quantenobjekt eine Impulskomponente Δp quer zur Ausbreitungsrichtung. $\Delta p/p = \tan\theta_1 \approx \sin\theta_1 = \lambda_{dB}/d \approx (h/p)/\Delta x$. Daraus ergibt sich $\Delta x \cdot \Delta p \approx h$ wie beim Heisenberg-Mikroskop.

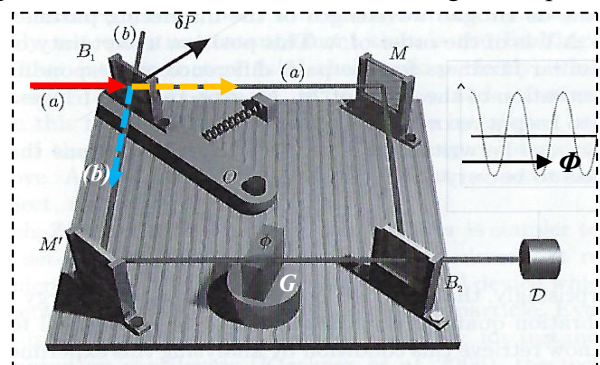


Bedenkenswert und erhellend sind die verschiedenen Bezeichnungen, die verwendet werden. «Unbestimmtheitsprinzip und Komplementarität» heisst das erste Kapitel in Paulis Standardwerk zur Quantenphysik. Sehr oft steht «Unschärferelation». Heisenberg spricht anfänglich von «Ungenauigkeitsrelation». Das tönt nach Messfehler und verdeckt den Sachverhalt, dass bereits vor der Messung die Grössen im Sinn der QM nicht bestimmt sind. Mit Pauli von einem «Prinzip» zu sprechen, ist übertrieben, denn Heisenbergs Ungleichungen ergeben sich aus dem Formalismus. WIKIPEDIA arbeitet auf Deutsch mit *Unschärferelation*, in anderen Sprachen mit *uncertainty principle*, *principe d'incertitude*, *principio di indeterminazione*, *relación de indeterminación*, *Onzekerheidsrelatie*, *Osäkerhetsprincipen*...

Weil Ort und Impuls nicht scharf bestimmt sind, ist der klassische Bahnbegriff im Atombereich unsinnig. Vom Geschehen im Atom lässt sich kein anschauliches Bild machen; es kann nicht raum-zeitlich dargestellt werden. Das missfällt Einstein. Er erfindet ab 1927 immer neue Gedankenexperimente, die die UBR widerlegen und damit das Gebäude der Quantenphysik erschüttern sollen. Vielleicht könnte man mit einem schwingungsfähigen Doppelspalt Ort und Impuls gleichzeitig bestimmen. Bohr macht dazu die Skizze nebenan. So könnte man den Ort direkt (durch welche Spalte) und aus der Schwingung den Impuls indirekt messen. Die Unbestimmtheitsrelation wäre verletzt. Doch nach der Quantenphysik ist auch der schwingende Spalt ein Quantenobjekt. Bei diesem «Welcher-Weg-Gedanken-Experiment» müssten der Wellenaspekt und die Interferenz ganz verschwinden, wenn der Teilchenaspekt via Rückstoss genau gemessen werden könnte.



Weder Einstein noch Heisenberg und die anderen «Kopenhagener» konnten vorhersehen, dass siebzig Jahre später solche Experimente real durchgeführt werden können. Die Forschungsgruppe von Haroche benützt dazu ein sogenanntes **Ramsey-Interferometer** (RI), das formal mit dem bekannten Mach-Zehnder-Interferometer (MZI) übereinstimmt. Dieses ist im Gymnasium verständlich und ermöglicht den Übergang zum RI. Das MZI ist viel empfindlicher als der schwingende Doppelspalt. Es kann in der didaktischen Version* nach Haroche das Gedankenexperiment von Einstein realisieren. Im MZI* der Figur nebenan versetzt der bewegliche, halbdurchlässige Spiegel ein einfallendes Photon (rot) in einen Überlagerungszustand für die zwei Wege «oben» (gelb, a) und «unten» (blau, b).



Das Photon ist im «Katzenzustand»: $\varphi_{\text{Photon}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \varphi_{\text{oben}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \varphi_{\text{unten}}$ Im Fall φ_{unten} liefert die Impulsänderung δP einen messbaren Stoss.

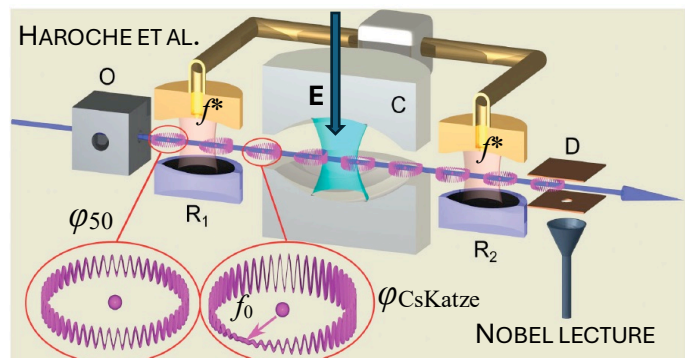
Im letzten Spiegel überlagern sich die beiden Summanden nur dann konstruktiv, wenn, z. B. im Glaskörper G, keine Phasenverschiebung erfolgt ist. Verändert man einen Weg und damit die Phasenverschiebung Φ kontinuierlich, zeigt der Detektor D die angedeutete Intensitätskurve aus der Interferenz von a und b . Ist nun der erste Spiegel auf einem beweglichen Arm montiert, liefert er eine Information über den Weg, ähnlich wie Einsteins Spalt. – Ein reales, mechanisches MZI* kann diesen winzigen Impuls allerdings niemals messen.

Was mit einem MZI unmöglich ist, gelingt jedoch mit dem unten abgebildeten Ramsey-Interferometer von Haroche et al. Das Kernelement sind die aus einem Ofen O stammenden, 400 m/s schnellen Cs-Atome. Ihr Valenzelektron wird mit Laserlicht auf eine hohe Energie $n = 50$ und den maximalen Drehimpuls $m = 49$ gebracht, so dass sein Orbital veloschlauchartig und $0.1 \mu\text{m}$ gross wird. In der Nobel-Lecture kennzeichnet Haroche die scheibenförmigen Atome durch ihre de Broglie-Welle φ_{50} . Ein Cs-Atom durchquert im RI zuerst den Mikrowellenresonator R_1 , der mit kurzen Pulsen der Frequenz f^* angesteuert wird. Er übernimmt die Rolle des ersten halbdurchlässigen Spiegels im MZI und versetzt das Cs-Atom in einen Überlagerungszustand aus zwei Niveaus $\varphi_{\text{CsKatze}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \varphi_{49} + \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \varphi_{50}$. φ_{49} bedeutet ein Atom im Zustand $n = 49$ und $m = 48$.

Haroche illustriert den Zustand φ_{CsKatze} mit der Überlagerung von zwei geschlossenen de Broglie-Wellen aus 50 respektive 49 Wellenzügen. Das ist eine geschlossene Schwebung, die eine unsymmetrische Ladungsverteilung und daher ein Dipolmoment besitzt. In der Figur ist es durch den Pfeil dargestellt. Es rotiert wegen des Drehimpulses mit der Frequenz $f_0 = 51 \text{ GHz}$ und liefert eine messbare Phase.

Das Ramsey-Interferometer operiert nicht im anschaulichen sondern im abstrakten Raum der Quantenzustände. Anstelle des letzten Spiegels des MZI wirkt ein synchroner Impuls im Resonator R_2 auf das «Katzen-Atom», dessen Phase beim $20 \mu\text{s}$ dauernden Durchflug durch C ähnlich verändert wird, wie die des Lichts im MZI durch das Glas G.

Der Detektor D registriert, ob der Zustand φ_{50} oder φ_{49} ist. Wenn man die Frequenz f^* mit rund 500 kHz um die Resonanzfrequenz f_0 «sweept», zeigt das Ramsey-Interferometer eine φ_{50} - φ_{49} -Variation analog zur hell-dunkel-Variation des MZI, wenn man einen Lichtweg «sweept».



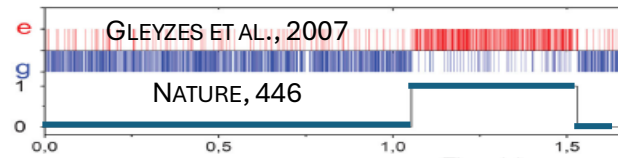
Die Geometrie des optimal spiegelnden Hohlraums C, der quantisierte Strahlung im Radarbereich speichert, ist auf f_0 abgestimmt. Diese Strahlung kann im Teilchenbild als Lichtquantenwolke aufgefasst werden, die zehn Milliarden

Mal zwischen den Wänden hin- und herfliegt. Im Wellenbild ist sie eine stehende Welle mit $\lambda = 6 \text{ mm}$ und mit 9 Knoten. Quantenphysikalisch ist sie ein Sowohl-als-auch. Die Wahl aller Parameter ist derart, dass die Energie $hf_0 = \Delta E$ der Quanten im Resonator genau dem $\Delta E = E_{50} - E_{49}$ entspricht, der Übergangsenergie der Atome. Im Resonanzfall sorgt die Wechselwirkung zwischen dem Atom und dem Feld für einen Energieaustausch und die im RI nachweisbare Phasenverschiebung des «Katzen-Atoms». Die Grösse dieser Phasenverschiebung ist proportional zur Anzahl der Photonen, die in C auf das «Katzen-Atom» einwirken. Diese Anzahl kann durch Reduktion der anfänglich von einem externen Sender E eingestrahltene Photonenmenge eingestellt werden.

Die Messung zeigt, was Paulis «Irre werden», Heisenbergs UBR und Bohrs Komplementarität voraussagen: Je genauer man den Teilchenaspekt des Quantenobjekts ins Auge fasst, desto mehr verschwindet sein Wellenaspekt, wie die Kurven von (a) nach (d) zeigen. Der Spiegel im «normalen», harten MZI wird in (a) durch 0 Photonen in C realisiert. Der schwingend bewegliche Spiegel des MZI* wird im RI im Experiment (d) durch rund 10 Photonen realisiert. Man könnte aus dem Rückstoss auf den Impuls und den Teilchenaspekt schliessen, also verschwindet der Wellenaspekt – auch wenn man es nicht tut.

Haroche, schreibt in «Exploring the Quantum»: [Bohr's] famous 'complementarity principle' can be stated in various equivalent ways. We can say that the wave and corpuscular aspects of material or light particles are complementary. The wave nature of particles manifests itself if the experimental set-up does not permit us to measure their positions. Their corpuscular nature is revealed if a position measurement is performed. (...) Bohrs complementarity is not an independent principle of quantum physics. It is (...) an ensemble of equivalent statements, which interpret the content of the mathematical formalism. It emphasizes that **a physical quantity has no reality unless it has been effectively measured, or at least unless it could be measured within the context of the experiment.**

Es gelingt Haroche et al. sogar, einzelne Lichtquanten nachzuweisen, ohne sie zu zerstören: *Birth, life and death of a single light quantum* ist im Bild sichtbar. Auch bei 0.8 K ist der Resonator C ein «schwarzer Körper», der gemäss Plancks Gesetz strahlt. Die mittlere Energiedichte ist allerdings so gering, dass entsprechend den Überlegungen, die Einstein 1909 veröffentlicht hat, während 95% der Zeit keines, während 5% genau eines und praktisch nie mehr als ein Lichtquant in C anzutreffen sind. Die Strahlung in C wird in einem «superweichen quasi-Compton-Effekt» durch die präparierten Cs-Atome untersucht. «Superweich» weil die Energie des Lichtquants im Resonator rund 10^{10} -mal kleiner ist als diejenige von Comptons Röntgenquanten. «Quasi», weil hier das Lichtquant stationär ist, während die Cs-Atome vorbeifliegen, gerade umgekehrt zum Beschuss von ruhenden Aluminium-Atomen bei Compton. Die hier nicht-resonante Wechselwirkung mit dem Lichtquant führt dazu, dass der präparierte Überlagerungszustand des Atoms im Detektor D in e = «excited» kippt, während eine fehlende Wechselwirkung ohne Lichtquant den Überlagerungszustand in g = «ground» kippen lässt. Das Diagramm zeigt, wie zum Zeitpunkt $t = 1.08$ s die Wärmestrahlung ein Lichtquant gebiert ($0 \rightarrow 1$), das etwa eine halbe Sekunde lebt ($1 \rightarrow 0$). Während dieser Zeit überprüfen hunderte von Atomen seine Existenz «in vivo», indem sie e (rot) zeigen. Unvermeidliche Messfehler führen zu den wenigen (blauen) Fehlanzeigen g .



Voraussetzung für die zerstörungsfreie Messung ist, dass der Resonator C derart gegen f_0 verstimmt wird, dass nur ein winziger Energieaustausch zwischen dem Atom und dem Lichtquant in C erfolgt: Das Atom wirkt für das Quant in C wie ein durchsichtiges Glasscheibchen, das die Lichtgeschwindigkeit um n reduziert und dabei leicht abgebremst wird. Die Energie des Quants steigt um etwa 0.1 ppm, während die interferometrisch messbare Phase der Atom-Katze verzögert wird. Im lesenswerten Buch «Licht – Eine Geschichte» beurteilt Haroche dieses Experiment als *einfach*. Die Ausführungen zeigen, dass es Nobelpreis-würdig ist.

Die Forschungsgruppen von Haroche und von Wineland benützen offensichtlich komplementäre Ansätze: in Paris ist Licht das Untersuchungsobjekt und Atome dienen als Sonden; in Boulder sind Atome das Forschungsobjekt, während Licht als Sonde wirkt. Beide Experimente widerlegen Schrödingers Vermutung, dass Experimentieren mit Einzelobjekten nie möglich sein werde. Sie widerlegen auch seine Sicht, dass Quantenmechanik eine «post mortem-Physik» sei: die Lichtquanten und Ionen bleiben auf diese Weise am Leben, nicht wie in den konventionellen «Klick-Detektoren». – Was würde der Atomskeptiker Ernst Mach, der noch 1900 «die Atomisten» fragte, «Ham's schon eins g'gehn?», heute sagen?

Inhalt und Bedeutung von «Kopenhagen» haben sich im Laufe der Zeit verändert. In den 1950er Jahren nahmen



einige Physiker wieder philosophische Fragen auf. Heisenberg schrieb in den «Physikalischen Prinzipien der Quantentheorie»: *Im Anfang ging die Kritik an der Deutung der Quantentheorie von den älteren Physikern aus, die von dem Begriffsgebäude der klassischen Physik nicht so viel zu opfern bereit waren, wie hier gefordert wurde (...) In den letzten Jahren haben aber auch verschiedene jüngere Physiker gegen die 'orthodoxe' Deutung Stellung genommen. Aber diese objektive 'Beschreibung' enthüllt sich dabei als eine Art von 'ideologischem*

Überbau', der mit der unmittelbaren physikalischen Realität nur noch wenig zu tun hat. Heisenberg glaubte: [Man] wird wohl annehmen können, dass die Kopenhagener Deutung zwangsläufig [und endgültig] ist.

Auch Bohr äusserte sich «Über Erkenntnisfragen der Quantenphysik» und fand: *Die allmähliche Entwicklung einer treffenden Terminologie zur Darstellung der einfacheren Situation in der physikalischen Wissenschaft [im Vergleich zur Biologie usw.] weist jedoch darauf hin, dass wir es nicht mit mehr oder weniger vagen Analogien zu tun haben, sondern mit klaren Beispielen logischer Beziehungen.*

Heute fasst Claus Kiefer «Kopenhagen» so zusammen: *Der Begriff der Komplementarität in seiner positivistischen Ausgestaltung, wie ihn Bohr nach 1935 brauchte, bildet zusammen mit der Notwendigkeit klassischer Begriffe für Messgeräte das Kernstück von dem, was man heute als Kopenhagener Interpretation bezeichnet.* («Kann die quantenphysikalische Realität als vollständig betrachtet werden?», 2015, S. 77).

Während der mathematische Formalismus der Quantenmechanik sich seit 100 Jahren erfolgreich in immer neuen Anwendungen bestätigt, gibt der philosophische Hintergrund offenbar auch heute noch Anlass für die Position, die David Mermin pointiert äussert: *But I won't shut up!*

Martin Lieberherr
MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

Lungengängig

1 Einleitung

Warum kann Feinstaub die Lunge erreichen? Warum prallt er nicht gegen die Nasenschleimhaut und bleibt dort kleben? Wir kennen doch alle das Phänomen der schwarzen “Nasenbööggen”, wenn wir in staubiger Umgebung gearbeitet haben. Aber offenbar werden die kleineren Aerosolpartikel durch die Luftströmung mitgenommen und nicht durch Trägheit aus der Bahn geworfen. Eine kleine Abschätzung soll die relevanten Kräfte aufzeigen.

Betrachten wir ein kleines Kügelchen von $d = 1 \mu\text{m}$ Durchmesser und der Dichte $\rho = 1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, das sich mit $v = 1 \text{ m/s}$ durch die nasale Luft bewegt. Auf das Teilchen wirken die Gewichtskraft $F_G = mg$ und die Stokes'sche¹ Reibungskraft $F_R = 6\pi r\eta \cdot v$ mit der dynamischen Viskosität¹ η . Wie vergleichen sich die Kräfte?

$$F_G = \rho V g = \rho \cdot \frac{\pi}{6} d^3 \cdot g = 1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot (1 \cdot 10^{-6} \text{ m})^3 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 = 5 \cdot 10^{-15} \text{ N} \quad (1)$$

$$F_R = 3\pi d\eta v = 3\pi \cdot 1 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot 1.82 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s} \cdot 1 \text{ m/s} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ N} \quad (2)$$

Wir sehen, dass die Gewichtskraft fünf Grössenordnungen kleiner als die Reibungskraft ist. Das hat natürlich damit zu tun, dass die Stokes-Reibung direkt proportional zum Durchmesser, die Masse hingegen proportional zur dritten Potenz des Durchmessers ist. Wir wollen Gewichtskraft und Auftrieb im Folgenden also ignorieren. Wir müssen uns um den Fall $v \rightarrow 0$ keine Sorgen machen, denn der Bewegung in der Strömung ist ja die zufällige Brown'sche Bewegung des Teilchens überlagert:

$$\bar{v}_{\text{Brown}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 292.15 \text{ K}}{1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot (1 \cdot 10^{-6} \text{ m})^3}} = 5 \text{ mm/s} \quad (3)$$

2 Theorie

Wie bewegt sich ein idealisiertes Teilchen, wenn nur die Stokes'sche Reibung wirkt?

$$a = \frac{F_{\text{res}}}{m} = \frac{F_R}{m} = -\frac{6\pi r\eta}{m} \cdot v \stackrel{\text{Def}}{=} -\frac{v}{\tau} \quad \tau = \frac{m}{3\pi d\eta} = \text{const} \quad (4)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{\tau} \Rightarrow v(t) = v_0 \exp(-t/\tau) \quad (5)$$

$$s(t) = \int_0^t v_0 \exp(-t/\tau) dt \Rightarrow^2 s(t) = s_\infty - s_\infty \exp(-t/\tau) \quad (6)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v = -\frac{v}{\tau} \rightarrow \frac{dv}{ds} = -\frac{1}{\tau} \Rightarrow v(s) = v_0 - s/\tau \quad (7)$$

Die Geschwindigkeit nimmt linear mit dem zurückgelegten Weg ab. Bei $s_\infty \stackrel{\text{Def}}{=} v_0 \tau$ steht der Körper still (bis auf Wärmebewegung, siehe oben). Die Geschwindigkeit nimmt exponentiell mit der Zeit ab, d.h. die Endposition s_∞ wird nach unendlich langer Zeit (asymptotisch für $t \gg \tau$) erreicht. Die Beziehung $v(s)$ hätte auch aus $s(t)$ und $v(t)$ durch Elimination der Zeit t hergeleitet werden können. Schwerpunktklassen sollten aber Gelegenheit haben, ein paar einfache Differentialgleichungen selber zu lösen. Der Weg via Elimination von t kann dann als Test dienen, schliesslich sollen die Schülerinnen und Schüler lernen, Resultate selbständig zu kontrollieren.

Kleiner Exkurs

Welche Kraft bewirkt eine exponentielle Geschwindigkeitsabnahme mit dem Weg: $v(s) = v_0 \exp(-s/\sigma)$?

$$F_{\text{res}} = ma \quad \wedge \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v \quad \wedge \quad v(s) = v_0 \exp(-s/\sigma) \quad \Rightarrow \quad (8)$$

$$F_{\text{res}} = m \frac{dv}{ds} v = -\frac{m}{\sigma} (v_0 \exp(-s/\sigma))^2 = -\frac{m}{\sigma} \cdot v^2 \quad (9)$$

Wirkt bei einer eindimensionalen Bewegung nur der Luftwiderstand, z.B. beim Einsatz eines Bremsfallschirms, so nimmt die Geschwindigkeit exponentiell mit dem zurückgelegten Weg ab.

3 Diskussion

Wir setzen unsere Zahlen ein, um ein Gefühl für die Grössenordnung der “stokesschen Bremsung” eines Aerosolpartikels zu erlangen.

$$\tau = \frac{m}{3\pi d \eta} = \frac{\rho d^2}{18 \eta} = \frac{1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot (1 \cdot 10^{-6} \text{ m})^2}{18 \cdot 1.82 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}} = 3 \mu\text{s} \quad (10)$$

$$s_\infty = v_0 \tau = 1 \text{ m/s} \cdot 3 \mu\text{s} = 3 \mu\text{m} \quad (11)$$

Das Aerosol-Teilchen wird innert weniger Mikrosekunden auf einer Strecke, welche dieselbe Grössenordnung wie der Durchmesser hat, praktisch zum Stillstand gebracht (relativ zum umgebenden Fluid). Das Teilchen kann somit den Richtungs- und Schnelligkeitsänderungen der Atemluft problemlos folgen. Dies erklärt, warum Feinstaub fast genauso wie die Luft in die Lunge gelangen kann.

Die Rechnungen im Theorieteil dieses Artikels eignen sich für das Schwerpunktfach Physik und Anwendungen der Mathematik. Ich stelle im Unterricht immer wieder fest, dass die Schülerinnen und Schüler ein Integral zwar lösen können, aber Schwierigkeiten mit der Interpretation haben. Genau deshalb braucht es solche und ähnlich gelagerte Beispiele, wo die Klassen sehen können, wie die Infinitesimalrechnung angewendet wird. Die Variablen werden mit Bedeutung aufgeladen und die Rechenschritte folgen zwanglos aus den altbekannten Gesetzen der z.B. Dynamik.

Aufgaben wie jene, wo aus dem Geschwindigkeitsverlauf $v(s)$ die Bremskraft bestimmt werden muss, löse ich gerne selber, schliesslich muss man im Training bleiben. Ich stelle aber oft fest, dass mir die Intuition fehlt, ein Resultat vorherzusagen. Niemals hätte ich erwartet, dass eine exponentielle Abnahme $v(s)$ auf ein v^2 -Widerstandsgesetz hinausläuft. Allenfalls hätte ich “je schneller die Geschwindigkeit abnimmt, desto stärker ist die Reibungskraft” stottern können. Das ist aber leider nur eine vorwissenschaftliche Aussage, denn sie lässt den funktionalen Zusammenhang offen.

¹ DMK, DPK, DCK, “Formeln, Tabellen, Begriffe”, hep Verlag, 9. Auflage (2025)

² Die untere Grenze des Integrals legt die Integrationskonstante fest. Die obere Grenze lasse ich weg und umgehe so, eine andere Integrationsvariable einführen zu müssen.

19. April 2022, Lie.

Der goMATH Girls' Circle an der ETH

Der goMATH Girls' Circle ist ein einzigartiges Programm für Mädchen im Alter von 12 bis 15 Jahren, die sich für Mathematik interessieren. Betreut werden die Mädchen von Dr. Ekaterina Gots vom MNG Rämibühl. Im Zentrum stehen Spass an der Mathematik, Abwechslung zum Schulalltag und eine entspannte Atmosphäre. Auf dem Programm stehen basteln, mathematische Spiele, Arbeitsblätter, knifflige Aufgaben, Zahlenrätsel, Wettbewerbe, YouTube Videos, PPT-Präsentationen über mathematische Konstanten (Pi, goldener Schnitt, Eulersche Zahl,...), kleine Beweise, kombinatorische Aufgaben, Känguru-Aufgaben, Mathe zu verschiedenen Anlässen (Mathe im Advent, Ostern, Rubik-Tag...), Exkursionen und vieles mehr.



Der Girls' Circle findet jeweils am Mittwoch von 14.00 bis 15.45 Uhr im ETH Hauptgebäude statt. Die Teilnahme ist gratis. Für einen Pausensnack ist ebenfalls gesorgt. Weitere Informationen sind der Webseite zu entnehmen:



<https://math.ethz.ch/de/news-und-veranstaltungen/veranstaltungen/nachwuchsfoerderung/gomath-girls-circle.html>

Wir würden uns freuen, wenn Sie in Ihren Klassen die Mädchen in der genannten Altersspanne auf den goMATH Girls' Circle an der ETH aufmerksam machen könnten.

Vielen Dank für Ihre Unterstützung und herzliche Grüsse,
Norbert Hungerbühler

Georg Keller
georg.keller@shinternet.ch

Physikalische Anwendungen der Differentialrechnung: Ein möglicher Einstieg im Mathematik-Unterricht

1. Einleitung

Eine der konventionellen und fachdidaktisch z.T. ausdrücklich empfohlenen Möglichkeiten, im Mathematik-Unterricht die ersten Schritte in Richtung Differentialrechnung zu motivieren und durchzuführen, besteht darin, sich physikalischer Fragestellungen zu bedienen, häufig der Frage nach dem Bestimmen von Momentangeschwindigkeit oder Momentanbeschleunigung bei geradlinigen Bewegungen. Jahrelange Erfahrung mit Mathematik- und Physikunterricht hat mich aber gelehrt, dass zu viele Schülerinnen und Schüler einen solchen Zugang zur Differentialrechnung leider nicht als positiv motivierend, sondern eher als abschreckend empfinden, weil sie sich bei physikalischen Themen rasch sehr unsicher fühlen. Aus diesem Grund bevorzuge ich einen anderen und ebenso konventionellen Zugang, der sich aber anschaulicher, grundsätzlich gut verständlicher Fragestellungen in Zusammenhang mit Tangenten an Funktionsgraphen bedient. Natürlich ist bei diesem geometrieeleiteten Zugang die aussermathematische Anwendbarkeit der Differentialrechnung nicht augenfällig. Diesen Mangel versuchte ich jeweils zu mildern, indem ich im Rahmen eines einführenden Vortrags zur Differentialrechnung ihre historische Entwicklung beleuchtete und in diesem Zusammenhang auf die mannigfaltigen aussermathematischen Anwendungen der Differentialrechnung, z.B. in der Physik, hinwies; für Konkretes vertröstete ich meine Schülerinnen und Schüler auf später. Nach einigen Unterrichtswochen, während derer wir die notwendigen rechentechnischen Grundlagen der Differentialrechnung¹ erarbeiteten, waren wir dann jeweils so weit, uns ausgewählten physikalischen und auch anderweitigen Anwendungen der Differentialrechnung zuzuwenden. Ein wesentliches Ziel des *Einstiegs* in diese Unterrichtssequenz war, die Schülerinnen und Schülern erleben zu lassen, wie die Differentialrechnung überaus nützlich und z.T. verblüffend einfach und elegant angewendet werden kann, um ...

- bekannte oder vermutete physikalische Gesetzmässigkeiten zu *überprüfen* (vgl. Kap. 2);
- physikalische Gesetzmässigkeiten *von Grund auf herzuleiten* (vgl. Kap. 3).

Im Austausch mit meinen Mathematik-Kolleginnen und -Kollegen zeigte es sich, dass ihnen manche der von mir dabei thematisierten physikalischen Anwendungen zu wenig bewusst oder unbekannt, für ihren eigenen Unterricht aber durchaus von Interesse waren. Weil es vielleicht Bulletin-Leserinnen oder -Leser gibt, denen es ähnlich geht, und weil ich als Frischpensionierter über ein deutlich entspannteres Zeitbudget verfüge, werde ich im Rest dieses Bulletin-Beitrages gerne einige entsprechende Hinweise geben. Dabei beziehe ich mich vorwiegend auf erarbeitende Unterrichtspassagen und teilweise auf Lern-/Übungs- oder auch Prüfungsaufgaben. Aus Platzgründen werde ich nicht auf die umfangreiche Fortsetzung des im Folgenden skizzierten Einstiegs eingehen können.

Den Beginn meines Einstiegs in ausgewählte physikalische Anwendungen der Differentialrechnung widmete ich jeweils einer ausführlichen Begründung der im Folgenden immer wieder benützten Tatsache, dass bei einer (stillschweigend als genügend regulär vorausgesetzten) geradlinigen Bewegung mit Position $s(t)$, Geschwindigkeit $v(t)$ und Beschleunigung $a(t)$ die beiden Beziehungen

$$\dot{s}(t) = v(t) \quad \text{und} \quad \dot{v}(t) = a(t) \quad (1)$$

gelten.

¹ D.h. die Ableitungsfunktionen der Grundfunktionen (Potenz-, trigonometrische, Exponential- und Logarithmusfunktionen) und die Ableitungsregeln (Faktorregel, Summenregel, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel).

2. Überprüfen bekannter/vermuteter physikalischer Gesetzmässigkeiten

- Beispiel 2.1: Manche meiner Schülerinnen und Schüler konnten sich zwar noch mehr oder weniger an die im Physikunterricht vielfach verwendeten Formeln $s(t) = s_0 + v \cdot t$ (gültig bei geradlinigen Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit v und Anfangsposition s_0) und $s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$ (gültig bei geradlinigen Bewegungen mit konstanter Beschleunigung a , Anfangsgeschwindigkeit v_0 und Anfangsposition s_0) erinnern. Normalerweise waren sie aber ausserstande, die Richtigkeit dieser Formeln zu überprüfen, geschweige denn, sie von Grund auf herzuleiten. – Es war daher augenöffnend für sie zu erleben, wie z.B. im Falle von $s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$ zwei einfache Ableitungsberechnungen und zwei Funk-

tionsauswertungen bei $t = 0$ das Gewünschte sofort und problemlos liefern: $s(0) = s_0$ ✓; $v(t) \stackrel{(1)}{=} \dot{s}(t) = \frac{d}{dt}(s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2) = v_0 + a \cdot t \Rightarrow v(0) = v_0$ ✓; $a(t) \stackrel{(1)}{=} \dot{v}(t) = \frac{d}{dt}(v_0 + a \cdot t) = a$ ✓

- Beispiel 2.2: Ähnlich war's beim Freien Fall ². Einige Schülerinnen und Schüler erinnerten sich zwar jeweils daran, dass mit Hilfe des Energieerhaltungsprinzips diverse Fragestellungen in Zusammenhang mit dem Freien Fall in angenehm einfacher Weise beantwortet werden können; und manchmal erinnerten sie sich sogar an die unter speziellen Umständen gültige Energieerhaltungsformel $\frac{1}{2} m v^2 = m g h$. Nur selten aber erinnerten sie sich auch an deren Gültigkeitsrahmen, und kaum je an die allgemeine Formulierung des Energieerhaltungssatzes, d.h. an $\frac{1}{2} m v^2 + m g h = \text{konst.}$. Kaum überraschend, dass ein Beweis von $\frac{1}{2} m v^2 + m g h = \text{konst.}$ ihre Möglichkeiten weit überstieg. Das aber fand ich immer sehr bedauerlich; denn weil das Prinzip der Energieerhaltung eines der grundlegendsten physikalischen Prinzipien ist, würde ich es sehr begrüßen, wenn die Schülerinnen und Schüler wenigstens im Rahmen einfacher physikalischer Modelle, und sofern sinnvoll möglich, die Richtigkeit des entsprechenden Energieerhaltungssatzes nachweisen könnten. – Nun, beim Freien Fall ist es sinnvoll möglich, und zwar erlaubt die Differentialrechnung einen erfreulich unkomplizierten, kurzen und eleganten Beweis: Man betrachte die Funktion $E(t) := \frac{1}{2} m v^2 + m g h$ und berechne deren zeitliche Ableitung, u.a. mit Hilfe der Kettenregel:

$$\dot{E}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + m g h \right) = m v \dot{v} + m g \dot{h} \quad (2)$$

Weil h nur eine andere Bezeichnung für s ist, ist gemäss (1) $\dot{h} = v$, und weil $\dot{v} = -g$ ist ³, können wir (2) wie folgt fortsetzen:

$$= -m v g + m g v = 0 \quad (3)$$

(3) zeigt, dass sich beim Freien Fall der Wert von $\frac{1}{2} m v^2 + m g h$ tatsächlich nicht ändert, also konstant bleibt.

Anmerkung: Erfreulicherweise, und für Uneingeweihte auch erstaunlicherweise, war es überhaupt nicht nötig, den zeitlichen Verlauf der Fallbewegung zu kennen, um den Energieerhaltungssatz beweisen zu können; denn nebst (1) verwendeten wir in (2), (3) nur die Newtonsche Bewegungsgleichung $F = ma$ und das Kraftgesetz für den Freien Fall $F = -mg$. Dies ist ein gutes Omen für das Untersuchen von Energieerhaltungssätzen in physikalisch komplizierteren Situationen, wo wir den zeitlichen Verlauf der entsprechenden Bewegung nur mit Aufwand oder gar nicht berechnen könnten!

- Beispiel 2.3: Im Schwerpunktfach Anwendungen der Mathematik ging ich noch einen Schritt weiter und betrachtete auch krummlinige Bewegungen. Nach Bereitstellen der Produktregel für die Ableitung des Skalarproduktes, d.h. $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \cdot \vec{w}(t)) = \dot{\vec{u}} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \dot{\vec{w}}$, und mit Hilfe des Tricks, Längen von Vektoren via

² D.h. beim Betrachten einer rein vertikalen Bewegung eines Gegenstandes der Masse m nahe der Erdoberfläche, unter Vernachlässigung aller Kräfte ausser der zur Erde gerichteten Gravitationskraft der Stärke mg .

³ Die Newtonsche Bewegungsgleichung $F = ma$ und das Kraftgesetz für den Freien Fall $F = -mg$ besagen, dass $a = -g$ ist. Via (1) erhalten wir daraus $\dot{v} = -g$.

Skalarprodukt auszudrücken, z.B. also $|\vec{v}|$ als $(\vec{v} \cdot \vec{v})^{1/2}$ umzuschreiben, kann man analog zu Beispiel 2.2 und in recht angenehmer Weise z.B. Folgendes nachweisen:

- Für einen nahe der Erdoberfläche und reibungslos auf irgendeiner Bahn gleitenden punktförmigen Gegenstand der Masse m , der sich nur unter Einfluss der Erdanziehungskraft und einer den Gegenstand auf die Bahn zwingenden Zwangskraft $\vec{F}_Z$ mit $\vec{F}_Z(t) \perp \vec{v}(t)$ bewegt (was z.B. als erste Näherung fürs Modellieren der Bewegung eines Achterbahnwagens dienen kann), gilt derselbe Energieerhaltungssatz wie beim Schiefen Wurf, d.h. es gilt $\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 + mgh = \text{konst.}$.
- Für einen punktförmigen Gegenstand der Masse m , welcher sich unter Einfluss der Gravitationskraft eines punktförmigen Körpers der Masse M bewegt (wobei $\vec{s}$ von M zu m zeigt), ist $\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 - \frac{GmM}{|\vec{s}|} = \text{konst.}$.
- Für ein elektrisch geladenes punktförmiges Teilchen der Masse m im beliebigen magnetischen Feld gilt die Erhaltung der kinetischen Energie, d.h. $\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 = \text{konst.}$.

Wenn auch die Produktregel für die Ableitung des Vektorprodukts, d.h. $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \times \vec{w}(t)) = (\dot{\vec{u}} \times \vec{w}) + (\vec{u} \times \dot{\vec{w}})$, zur Verfügung steht, kann man kurz und problemlos beweisen, dass für einen Gegenstand der Masse m , welcher sich unter Einfluss einer Zentralkraft⁴ bewegt, Drehimpulserhaltung gilt, d.h. $\vec{L}(t) := \vec{s}(t) \times \vec{p}(t) = \text{konst.}$ (wobei $\vec{p} := m\vec{v}$).

3. Physikalische Gesetzmässigkeiten von Grund auf herleiten

- **Beispiel 3.1:** Kreisbewegungen gehören zum Standardrepertoire des Physikunterrichtes, aus Einfachheitsgründen normalerweise solche mit konstanter Schnelligkeit. Eine dazu gehörende Standardfrage ist, in welche Richtung der Beschleunigungsvektor zeigt, und wie stark die Beschleunigung ist. Diese Fragen, und zwar auch für Kreisbewegungen mit *beliebiger* Schnelligkeit, lassen sich schwerpunktfachtauglich, kompakt und elegant mit Hilfe von Differentialrechnung und Vektorgeometrie klären. Das geht so:
 - Wenn wir mit $\vec{s}(t)$ den Vektor vom Kreismittelpunkt zu m bezeichnen, und mit $\vec{n}$ irgendeinen auf der Kreisebene senkrecht stehenden zeitunabhängigen Vektor, gilt zu allen Zeiten $\vec{s}(t) \cdot \vec{n} = 0$; Ableiten beider Seiten dieser Gleichung ergibt⁵ $\vec{v}(t) \cdot \vec{n} = 0$, d.h. nebst $\vec{s}(t)$ liegt auch $\vec{v}(t)$ in der Kreisebene. Nochmaliges Ableiten ergibt, dass auch $\vec{a}(t)$ in der Kreisebene liegt.
 - m bewegt sich ja auf einem Kreis, d.h. $|\vec{s}(t)| = \text{konst.}$, d.h. $\vec{s}(t) \cdot \dot{\vec{s}}(t) = 0$; Ableiten beider Seiten dieser Gleichung ergibt $\vec{v}(t) \cdot \vec{s}(t) = 0$, was heisst, dass der in der Kreisebene liegende Vektor $\vec{v}(t)$ immer tangential an die Kreisbahn gerichtet ist. Ableiten beider Seiten der Gleichung $\vec{v}(t) \cdot \vec{s}(t) = 0$ ergibt $\vec{a}(t) \cdot \vec{s}(t) = -|\vec{v}(t)|^2$ resp.

$$|\vec{a}(t)| = -\frac{1}{\cos(\gamma(t))} \cdot \frac{|\vec{v}(t)|^2}{|\vec{s}(t)|}, \quad (4)$$

wobei $\gamma(t)$ der Zwischenwinkel von $\vec{a}(t)$ und $\vec{s}(t)$ ist. Aufgrund von (4) und für den Normalfall $|\vec{v}(t)| > 0$ sehen wir, dass

$$90^\circ < \gamma(t) \leq 180^\circ \quad (5)$$

ist. (5) zeigt, dass die zu $\vec{s}(t)$ kollineare Komponente von $\vec{a}(t)$ zentripetal, nicht zentrifugal, gerichtet ist. Für einige meiner Schülerinnen und Schüler war das rein anschaulich von Anfang an klar, für andere aber gar nicht. Und auf anschaulicher Basis hätte man (4) wohl kaum erraten können.

Beschränken wir uns nun auf den Standardfall *konstanter* Schnelligkeit. – Wegen $|\vec{v}(t)| = \text{konst.}$, d.h. $\vec{v}(t) \cdot \dot{\vec{v}}(t) = 0$, erhalten wir via Ableiten

$$\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0. \quad (6)$$

⁴ Wo definitionsgemäss $\vec{F}(\vec{s})$ kollinear zu $\vec{s}$ ist.

⁵ Weil die Funktion auf der linken Seite der Gleichung, d.h. $\vec{s}(t) \cdot \dot{\vec{s}}(t)$, zu allen Zeiten t denselben Wert hat wie die Funktion auf der rechten Seite der Gleichung, d.h. 0 , stimmen auch ihre Ableitungsfunktionen überein.

Weil $\vec{s}(t)$, $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ in der Kreisebene liegen und weil $\vec{v}(t)$ senkrecht auf $\vec{s}(t)$ steht, besagt (6), dass $\vec{a}(t)$ entweder parallel oder antiparallel zu $\vec{s}(t)$ gerichtet ist, d.h. dass $\gamma(t) = 0^\circ$ oder $\gamma(t) = 180^\circ$ ist. Via (5) erhalten wir $\gamma(t) = 180^\circ$, d.h. m erlebt eine rein zentripetale Beschleunigung, deren konstante Stärke gemäss (4) berechnet werden kann: $|\vec{a}| = \frac{|\vec{v}|^2}{r}$ (mit r = Kreisradius).

- **Beispiel 3.2:** Kehren wir zurück zum Grundlagenfach Mathematik. Und stellen uns vor, die Schülerinnen und Schüler wüssten nicht, wie man bei geradlinigen Bewegungen mit konstanter Beschleunigung die Positionsrechnung vornehmen kann. Das Ziel dieses Beispiels war, ihnen eine für sie neuartige und sehr breit (d.h. nicht nur beim aktuellen Beispiel und Ähnlichem) einsetzbare Methode vorzustellen, mit deren Hilfe die Positionsrechnung von Grund auf bewältigt werden kann. Als Beispiel wählte ich den alltäglichen und ihnen physikalisch bestens vertrauten Freien Fall, z.B. mit $h_0 = 15 \text{ m}$ und $v_0 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$:
 - Wie bereits erwähnt, besagen die Newtonsche Bewegungsgleichung $F = ma$ und das Kraftgesetz für den Freien Fall $F = -mg$, dass $a = -g$ ist; via (1) erhält man daraus $\dot{v}(t) = -g$. Diese Differentialgleichung (DG) für die zu berechnende Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$, welche ausserdem die Anfangsbedingung (AB) $v(0) = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ erfüllen muss, war jeweils die erste DG, welcher meine Schülerinnen und Schüler bewusst begegnet sind. Aufgrund ihrer Kenntnis der Ableitung der Grundfunktionen brauchte es jeweils nur wenig Unterstützung, damit einige Schülerinnen und Schüler zur Vermutung $v(t) = -g \cdot t$ gelangten. Ich ergänzte, dass und warum die Lösung aber $v(t) = -g \cdot t + C$, $C =$ irgendeine Konstante, lautet, und wie man den konkreten Wert von C via AB bestimmt.
 - Wir erhielten also $v(t) = -g \cdot t - 2$ (in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$). Via (1) folgte daraus die DG $\dot{h}(t) = -g \cdot t - 2$ für die zu berechnende Positionsfunktion $h(t)$, welche ausserdem die AB $h(0) = 15 \text{ m}$ erfüllen musste. Motiviert durch die obigen Erfahrungen und ohne viel Unterstützung gelangten dann jeweils einige Schülerinnen und Schüler zu $h(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 - 2t + D$, mit $D = 15 \text{ m}$.
- **Beispiel 3.3:** Ein weiteres standardmässig in der Physik verwendetes Modell ist das eines Gegenstandes der Masse m , welcher sich an einer Feder (mit Federkonstante k) befestigt geradlinig und reibungsfrei bewegt⁶. Mit $s(t)$ die Auslenkung von m aus der Ruhelage (bei $s = 0$) bezeichnend, nahmen wir z.B. an, dass $m = 0.5 \text{ kg}$, $s_0 = 0.2 \text{ m}$, $v_0 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $k = 6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ist; die Aufgabe war, $s(t)$ zu berechnen. Die Schülerinnen und Schüler konnten sich z.T. daran erinnern, dass im Physikunterricht die Lösung mittels trigonometrischer Funktionen formuliert wurde; weiter kamen sie jeweils aber nicht. – Um die Bewegung von m von Grund auf zu untersuchen, d.h. die harmonische Schwingungsformel für $s(t)$ wirklich herzuleiten, benützten wir, analog zu Beispiel 3.2, die Newtonsche Bewegungsgleichung $F = ma$, das Hookesche Federgesetz $F = -ks$ und (1), was zu folgender DG und AB führte:

$$\ddot{s}(t) = -12 s(t) \quad \text{mit} \quad s(0) = 0.2 \text{ m}, \quad \dot{s}(0) = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (7)$$

Weil das Lösen von (7) deutlich schwieriger ist als das Lösen der DGs von Beispiel 3.2, wollte ich in einem ersten Anlauf so tun, als ob wir (7) gar nicht lösen könnten. Unter dieser Annahme gab's folgende Optionen für das weitere Vorgehen: Wir versuchen, ...

- wenigstens wichtige Teilaspekte der exakten Lösung von (7) zu berechnen.
- Methoden zum Bestimmen von Näherungslösungen von (7) zu entwickeln.

Für Ueingezeichnete ist es immer wieder überraschend, wie gut die erste Option klappt: Wie in Beispiel 2.2 kann man nämlich beweisen, dass auch hier ein Energieerhaltungssatz gilt, d.h. dass $\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k s^2 = \text{konst.}$ ist. Daher gilt für alle Zeitpunkte t z.B.

$$\frac{1}{2} m v^2(t) + \frac{1}{2} k s^2(t) = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k s_0^2 \quad (8)$$

⁶ Weil zu erwarten war – und diese Erwartung wurde nie enttäuscht –, dass die meisten Schülerinnen und Schüler diesem Modell wenig Reiz attestieren würden, bemühte ich mich jeweils um eine Situationsklärung: Das Modell der schwingenden Feder, wortwörtlich verstanden, interessiert tatsächlich kaum jemanden; im übertragenen Sinne verstanden aber sehr wohl, weil z.B. die geradlinige Bewegung von irgendeinem punktförmigen Gegenstand sehr nahe einer stabilen Gleichgewichtslage mathematisch in sehr guter Näherung äquivalent zum vorliegenden Federmodell ist. Dieses ist daher eines der grundlegenden Modelle der Physik und der Ingenieurwissenschaften.

(8) kann nun verwendet werden, um für jeden beliebigen Wert der Auslenkung s die dazugehörige Geschwindigkeit v zu berechnen, und umgekehrt (in der Regel in Unkenntnis des fraglichen Zeitpunktes). So z.B. kann man via (8) sofort die physikalisch interessierende Amplitude A (d.h. die maximale Auslenkung der Federschwingung) berechnen, denn bei Erreichen dieser maximalen Auslenkung ist sicherlich

$$v = 0, \text{ d.h. } \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k s_0^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m}{k} v_0^2 + s_0^2} \stackrel{(7)}{\cong} 0.35 \text{ m}.$$

Methoden zur Bestimmung von Näherungslösungen des Anfangswertproblems (7) diskutierte ich zu diesem Zeitpunkt nicht (sondern erst später, im Rahmen anderer Beispiele) und zeigte stattdessen, mit welchen Überlegungen (7) exakt gelöst werden kann. Und wie mit Hilfe der exakten Lösung z.B. der Wert von A ebenfalls bestimmt werden kann (letztlich aber mit grösserem Aufwand).

- **Beispiel 3.4:** Wir verallgemeinern das im Beispiel 3.3 untersuchte harmonische Schwingungs-Modell so, dass statt der idealen Feder mit rein linearem Kraftgesetz $F = -k s$ eine realistischere Feder modelliert wird, bei welcher für kleine Auslenkungen nach wie vor das lineare Kraftgesetz (in guter Näherung) gilt, für grössere Auslenkungen hingegen durch nichtlineare Terme korrigiert wird⁷. Z.B. könnte $F = -k_1 s - k_3 s^3 - k_5 s^5$ mit $k_1 = 6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $k_3 = 10 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$, $k_5 = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}^5}$ sein⁸, womit die DG und AB für $s(t)$ wie folgt lauten:

$$\ddot{s} = -12 s - 20 s^3 - 100 s^5 \quad \text{mit} \quad s(0) = 0.2 \text{ m}, \quad \dot{s}(0) = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (9)$$

Es ist nicht bekannt, wie dieses Anfangswertproblem gelöst, d.h. wie der zeitliche Verlauf der durch (9) beschriebenen anharmonischen Schwingung exakt berechnet werden kann. Trotzdem kann man wichtige Teilaspekte der exakten Lösung von (9) berechnen, denn wiederum gilt ein Energieerhaltungssatz⁹, nämlich

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k_1 s^2 + \frac{1}{4} k_3 s^4 + \frac{1}{6} k_5 s^6 = \text{konst.}, \quad (10)$$

was in üblicher Weise bewiesen werden kann. Damit erhält man z.B. $A \cong 0.33 \text{ m}$ und $v(s = 0.3 \text{ m}) \cong \pm 0.56 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, natürlich $v(s = 0.2 \text{ m}) = \pm 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v(s = 0.1 \text{ m}) \cong \pm 1.17 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v(s = 0 \text{ m}) \cong \pm 1.22 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; insbesondere beträgt der Maximalwert der Schnelligkeit ca. $1.22 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Mit Hilfe dieser Geschwindigkeitswerte könnte man jetzt den zeitlichen Verlauf der anharmonischen Schwingung abschätzen, wobei die Qualität der Schätzung umso besser würde, je mehr Positionswerte s mit den entsprechenden Geschwindigkeitswerten $v(s)$ verwendet würden.

Anmerkung: Wenn man in (10) v als $\dot{s}$ schreibt, kann (10) als DG 1. Ordnung für s verstanden werden¹⁰. Diese DG 1. Ordnung für s ist ...

- sehr nützlich, sofern man qualitative Näherungslösungen von (9) bestimmen möchte (via Richtungsfeld);
- nicht gänzlich unproblematisch, sofern man numerische Näherungslösungen von (9) berechnen möchte, welche das Schwingungsverhalten auch in der Nähe eines Umkehrpunktes beschreiben.

⁷ Entspricht der Potenzreihenentwicklung der Funktion $F(s)$ um $s = 0$, wobei die Reihenentwicklung nach hinreichend vielen Termen abgebrochen wird.

⁸ Diese Werte von k_3 und k_5 entstammen nicht einer konkreten Messung, sondern sie wurden von Hand so gewählt, dass für $|s| \leq s(0) \equiv 0.2 \text{ m}$ die nichtlinearen Kraftbeiträge deutlich geringer sind als der lineare Kraftbeitrag.

⁹ Sofern die auf den Gegenstand einwirkende Gesamtkraft F nur von der Position s abhängt, und zwar so, dass $F(s)$ ein Potential $\varphi(s)$ hat, d.h. sofern es eine Funktion $\varphi(s)$ mit der Eigenschaft $F(s) = -\frac{d}{ds}\varphi(s)$ gibt, so gilt Energieerhaltung in der Form $\frac{1}{2} m v^2 + \varphi(s) = \text{konst.}$. Im vorliegenden Fall ist $F(s) = -k_1 s - k_3 s^3 - k_5 s^5$ und hat offenbar ein Potential $\varphi(s)$. (In mehrdimensionalen Situationen gilt Analoges: Sofern $\vec{F}(\vec{s}) = -\text{grad } \varphi(\vec{s})$ ist, ist $\frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 + \varphi(\vec{s}) = \text{konst.}$.)

¹⁰ Die Verwendung der Energieerhaltung führte also zu einer Reduktion des Grades der DG um 1, d.h. vom Grad 2 bei (9) zum Grad 1 bei (10).



Statistik im Mathematikunterricht: Grundlagen und KI-gestützte Anwendungen

Die Fortbildung umfasst **zwei eigenständige Veranstaltungen**, die **unabhängig voneinander oder gemeinsam** besucht werden können. Zusammen bieten sie einen praxisnahen Zugang zu statistischen Tests und zur modernen Datenanalyse mit künstlicher Intelligenz.

Mittwoch, 04. März 2026, 9:30 Uhr – 16:00 Uhr: Statistische Tests leicht gemacht

Diese Fortbildung richtet sich an Mathematiklehrpersonen, die statistische Verfahren im Unterricht bislang eher meiden, deren Bedeutung jedoch durch das Grundlagenfach sowie durch Matura- und Projektarbeiten stetig zunimmt. Die Teilnehmenden erhalten einen verständlichen Überblick über zentrale statistische Tests und deren Einsatz im Unterricht.

Behandelt werden der Binomialtest, der Fisher-Test sowie der Wilcoxon-Mann-Whitney-Rangsummen-Test. Zu jedem Test werden Inhalte für das Grundlagenfach sowie weiterführende Erweiterungen für Maturaarbeiten vorgestellt. Ergänzend erhalten die Teilnehmenden Unterrichtsmaterialien und didaktische Anregungen.

Mitzubringen: Computer oder Tablet
 Kursleitung: Josef Züger, Präsident VSMP, Mathematiklehrer Bündner Kantonsschule
 Daniela Grawehr, Fachdidaktik Mathematik Universität Zürich, Mathematiklehrerin Kantonsschule Rotkreuz
 Anmeldung: <https://math.ch/DMK2026a/>



Montag, 09. März 2026, 9:30 Uhr – 16:00 Uhr: Statistik mit künstlicher Intelligenz und R

Im Mittelpunkt dieser Fortbildung steht die praktische Datenanalyse mithilfe von KI-Werkzeugen wie ChatGPT oder Microsoft Copilot in Kombination mit R. Anhand von Übungen lernen die Teilnehmenden, Daten (z. B. aus Excel) zu analysieren und grafisch darzustellen – auch ohne Vorkenntnisse in R. Thematisiert werden zudem typische Fallstricke bei Datenerhebung und -auswertung. Das verwendete Unterrichtsmaterial wird zur Verfügung gestellt.

Mitzubringen: Computer oder Tablet mit installiertem R und RStudio sowie Zugang zu einer KI
 Kursleitung: **Daniela Grawehr**, Fachdidaktik Mathematik Universität Zürich, Mathematiklehrerin Kantonsschule Rotkreuz
Prof. em. Dr. Hans Rudolf Künsch, ETH Zürich, Seminar für Statistik
Assistenz
 Gymnasiast:innen des SPF PAM der Stiftsschule Engelberg im Maturajahr
 Voraussetzung: Voraussetzung sind der Kurs „Statistische Tests leicht gemacht“ oder entsprechende Vorkenntnisse; bei Teilnahme nur am zweiten Kurstag wird das Skript vorab bereitgestellt.
 Anmeldung: <https://math.ch/DMK2026b/>



H.U. Keller
ehem. MNG Zürich, hukkeller@bluewin.ch

Vier wenig bekannte Formeln für bestimmte Integrale

Es existieren einige spezielle Formeln mit bestimmten Integralen, die auf den ersten Blick recht erstaunlich sind und in keinem Lehrbuch zur Integralrechnung gefunden werden können! Ihre Anwendungsbereiche sind allerdings zum Teil beschränkt. So gelten sie z. B. nur bei bestimmten Integrationsgrenzen oder aber nur bei ganz speziellen Funktionen.

In vielen Fällen können damit aber dennoch grosse Vereinfachungen bei der Berechnung bestimmter Integrale erzielt werden, wodurch diese Formeln oft ganz nützlich sind. Hier werden vier solche Formeln präsentiert.

1. «King's Rule»

Der informelle und nicht offizielle Name dieser Formel scheint seinen Ursprung in Indien zu haben.

Behauptung («King's Rule»):

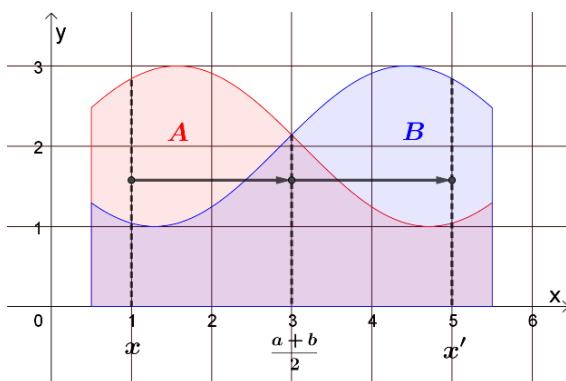
$$I = \int_a^b f(x) dx \equiv \int_a^b f(a+b-x) dx = I_{KR}$$

Beweis: Wir betrachten das Integral $\int_a^b f(a+b-x) dx$ und verwenden darin die Substitution $u = a+b-x$.

So wird $dx = -du$; wenn $x = a$ ist, wird $u = b$, und wenn $x = b$ ist, wird $u = a$. Somit wird

$$\int_{x=a}^{x=b} f(a+b-x) dx = \int_{u=b}^{u=a} f(u) (-du) = \int_{u=a}^{u=b} f(u) du = \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx : \text{QED.}$$

Klar ist: Der ursprüngliche Graph wird an der Geraden $x = \frac{a+b}{2}$ gespiegelt! In der untenstehenden Figur sind als Beispiel die folgenden Integrale graphisch wiedergegeben:



$$A = \int_{0.5}^{5.5} (\sin(x) + 2) dx \approx 10.1689,$$

$$B = \int_{0.5}^{5.5} (\sin(0.5 + 5.5 - x) + 2) dx \approx 10.1689.$$

Hier ist auch ersichtlich, dass $\frac{a+b}{2} - x = x' - \frac{a+b}{2}$ ist, weshalb $x' = a+b-x$ wird.

Die «King's Rule» kann angewendet werden, um viele komplizierte Integrale einfach zu berechnen.

Beispiel 1: $I = \int_1^4 x \, dx = ?$

Gemäss der «King's Rule» gilt dafür $I = I_{KR} = \int_1^4 (5-x) \, dx$. Damit wird

$$2I = I + I_{KR} = \int_1^4 x \, dx + \int_1^4 (5-x) \, dx = \int_1^4 (x+5-x) \, dx = \int_1^4 5 \, dx = [5x]_1^4 = 15: \boxed{\rightarrow I = \frac{15}{2}}.$$

Beispiel 2: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(\tan(x))^{\sqrt{2}}} \, dx = ?$

Gemäss der «King's Rule» gilt dafür $I = I_{KR} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(\tan(\pi/2-x))^{\sqrt{2}}} \, dx$. Weil $\tan(\pi/2-x) = \frac{1}{\tan(x)}$

ist, gilt auch $I_{KR} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+1/\tan(x)^{\sqrt{2}}} \, dx$, was wiederum gleich $I_{KR} = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan(x)^{\sqrt{2}}}{1+\tan(x)^{\sqrt{2}}} \, dx$ ist. Somit

werden

$$2I = I + I_{KR} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(\tan(x))^{\sqrt{2}}} \, dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\tan(x)^{\sqrt{2}}}{1+\tan(x)^{\sqrt{2}}} \, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\tan(x)^{\sqrt{2}}}{1+\tan(x)^{\sqrt{2}}} \, dx = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$\boxed{\rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(\tan(x))^{\sqrt{2}}} \, dx = \frac{\pi}{4}}.$$

Interessanterweise ist hier der Exponent $\sqrt{2}$ total irrelevant...!

Beispiel 3: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)} \, dx = ?$

Gemäss der «King's Rule» gilt dafür $I = I_{KR} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\pi/2-x)}{\sin(\pi/2-x)+\cos(\pi/2-x)} \, dx$. Weil

$\sin(\pi/2-x) = \cos(x)$ und $\cos(\pi/2-x) = \sin(x)$ ist, wird $I = I_{KR} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)} \, dx$. Folglich

werden $2I = I + I_{KR} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)} \, dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)} \, dx = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}:$

$$\boxed{\rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)} \, dx = \frac{\pi}{4}}.$$

2. Eine Formel für spezielle Integranden

Behauptung:

$$I = \int_a^b \frac{f(x)}{f(x) + f(b+a-x)} dx \equiv \frac{b-a}{2}$$

Beweis: Diese Formel lässt sich mit der «King's Rule» einfach beweisen. Denn es gilt:

$$I = I_{KR} = \int_a^b \frac{f(a+b-x)}{f(a+b-x) + f(x)} dx. \text{ Die Summe } I + I_{KR} = 2I \text{ wird damit gleich}$$

$$2I = \int_a^b \frac{f(x)}{f(x) + f(b+a-x)} + \int_a^b \frac{f(a+b-x)}{f(a+b-x) + f(x)} dx = \int_a^b 1 dx = b-a. \text{ Daraus folgt die oben formulierte}$$

Behauptung.

Beispiel 1: $I = \int_3^5 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{8-x} + \sqrt{x}} dx = \frac{5-3}{2} : [I \rightarrow 1], \text{ mittels unmittelbarer Anwendung der Formel.}$

Beispiel 2: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)}} dx. \text{ Hier wird die Identität } \sqrt{\cos(x)} = \sqrt{\sin(\pi/2 - x)}$

benötigt: Damit wird das Integral $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\sin(\pi/2 - x)}} dx. \text{ Die Formel kann nun sofort}$

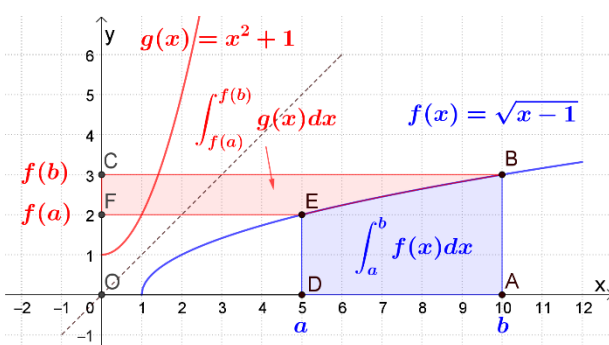
angewendet werden: $\rightarrow I = \frac{\pi}{4}.$

3. Summe der Integrale einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion

Voraussetzung: Seien $f(x)$ und $g(x)$ Umkehrfunktionen voneinander, und $f(x)$ sei stetig im Intervall $[a, b]$. Dann ist auch $g(y)$ stetig im Intervall $[f(a), f(b)]$, und es gilt $f(g(x)) = g(f(x)) = x$. Dann existiert die folgende, erstaunliche Identität:

Behauptung:

$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx \equiv b \cdot f(b) - a \cdot f(a)$$



In der links wiedergegebenen Figur wird diese Behauptung am Beispiel der Funktion $f(x) = \sqrt{x-1}$ illustriert: Die Summe der beiden Flächeninhalte

$$\int_a^b f(x) dx \text{ und } \int_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx \text{ ist gleich dem Inhalt des}$$

Rechtecks OABC, vermindert um den Inhalt des Rechtecks ODEF, was gerade gleich ist.

Beweis: Sei $y = f(x)$. Damit wird $dy = f'(x) dx$. Weil $g(x) = f^{-1}(x)$ ist, wird $g(y) = g(f(x)) = x$.

Wenn $x = a$ ist, wird $y = f(a)$, und wenn $x = b$ ist, wird $y = f(b)$. Folglich ist

$$\int_{y=f(a)}^{y=f(b)} g(y) dy = \int_a^b x \cdot f'(x) dx. \text{ Das rechte Integral wird nun partiell integriert und ergibt}$$

$$x \cdot f(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) dx. \text{ So erhalten wir } \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy = x \cdot f(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) dx. \text{ Hier wird das rechte}$$

Integral auf beiden Seiten addiert und der Term $x \cdot f(x) \Big|_a^b$ zu $b \cdot f(b) - a \cdot f(a)$ ausgewertet. Da die

Benennung der Integrationsvariablen irrelevant ist, ist $\int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy = \int_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx$, woraus sich die oben angegebene Behauptung ergibt.

Beispiel 1: $S = \int_4^9 \sqrt{x} dx + \int_2^3 x^2 dx = ?$

Hier ist $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = x^2$; $S = \int_4^9 \sqrt{x} dx + \int_2^3 x^2 dx = \frac{38}{3} + \frac{19}{3} \equiv 9 \cdot \sqrt{9} - 4 \cdot \sqrt{4}$: $\boxed{\rightarrow S = 19}$.

Beispiel 2: $S = \int_1^2 \log_2(x^3 + 1) dx + \int_1^{\log_2(9)} (2^x - 1)^{1/3} dx = ?$

Diese beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sind Umkehrfunktionen voneinander, denn es gilt:

$$f(g(x)) = \log_2(((2^x - 1)^{1/3})^3 + 1) = \log_2(2^x) = x. \text{ Ausserdem ist die Untergrenze des zweiten Integrals}$$

$f(1) = \log_2(1^3 + 1) = 1$, und seine Obergrenze ist $f(2) = \log_2(2^3 + 1) = \log_2(9)$. Damit sind alle Voraussetzungen für die Anwendung der obigen Formel erfüllt. Damit ergibt sich gemäss der oben bewiesenen Formel:

$$\boxed{\rightarrow S = 2 \cdot \log_2(2^3 + 1) - 1 \cdot \log_2(1^3 + 1) = \log_2(81) - 1 \approx 5.33985}.$$

Natürlich könnten diese Integrale auch separat berechnet werden: Das erste Integral ergibt

$$I_1 = \frac{\sqrt{3} \cdot \pi + 27 \cdot \ln(3) - 6 \cdot (3 + \ln(4))}{\ln(64)}, \text{ das zweite } I_2 = \frac{18 - \sqrt{3} \cdot \pi + \ln\left(\frac{64}{27}\right)}{\ln(64)}, \text{ und ihre Summe ist auch}$$

gemäss dieser komplizierteren, expliziten Berechnung, gleich

$$S = \frac{\ln\left(\frac{3^{24}}{64}\right)}{\ln(64)} = \frac{\log_2\left(\frac{3^{24}}{64}\right)}{\log_2(64)} = \frac{24 \cdot \log_2(3) - 6}{6} = \log_2(81) - 1.$$

Beispiel 3: $S = \int_a^b \sin(x) dx + \int_{\sin(a)}^{\sin(b)} \arcsin(x) dx$ (mit $-\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}$) = ?

Gemäss der Formel wird dieses Integral S gleich $b \cdot \sin(b) - a \cdot \sin(a)$. Einzelne ausgerechnet ergibt das

erste Integral $\cos(a) - \cos(b)$. Das zweite ergibt $\left[\sqrt{1-x^2} + x \cdot \arcsin(x) \right]_{\sin(a)}^{\sin(b)}$, was gleich

$\cos(b) - \cos(a) + \sin(b) \cdot b - \sin(a) \cdot a$ ist. Ihre Summe ergibt das gleiche: $\rightarrow S = b \cdot \sin(b) - a \cdot \sin(a)$.

4. Eine spezielle Formel für Integrale von Funktionen von $\sin(x)$

Behauptung:
$$\int_0^{\pi} x \cdot f(\sin(x)) dx \equiv \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\pi} f(\sin(x)) dx$$

Diese erstaunliche Identität gilt für jede Funktionen f von $\sin(x)$, die im Intervall $[0, \pi]$ stetig ist.

Beweis: Beim Integral $I = \int_0^{\pi} x \cdot f(\sin(x)) dx$ wird die Substitution $u = \pi - x$ angewendet. Dabei wird

$dx = -du$, und wenn $x = 0$ ist, wird $u = \pi$, und wenn $x = \pi$ ist, wird $u = 0$. Somit wird

$$I = \int_{u=\pi}^{u=0} (\pi - u) \cdot f(\sin(\pi - u)) (-du). \text{ Eine erste Vereinfachung ergibt sich daraus, dass } \sin(\pi - u) \text{ und}$$

$\sin(u)$ identisch sind. Die Integration über $(-du)$ vertauscht nun die Integrationsgrenzen, der Ersatz von $(-du)$ durch du macht dies aber wieder rückgängig. Der Integrand wird nun ausmultipliziert. Das führt zu

$$I = \int_0^{\pi} \pi \cdot f(\sin(u)) du - \int_0^{\pi} u \cdot f(\sin(u)) du, \text{ respektive zu } I = \int_0^{\pi} \pi \cdot f(\sin(x)) dx - \underbrace{\int_0^{\pi} x \cdot f(\sin(x)) dx}_{\text{...das ist gleich } I}.$$

werden $2I = \int_0^{\pi} \pi \cdot f(\sin(x)) dx$ und damit $I = \int_0^{\pi} x \cdot f(\sin(x)) dx = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\pi} f(\sin(x)) dx$, was die Behauptung war.

Beispiel 1: $\int_0^{\pi} x \cdot \sin(x) dx$ und $\frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\pi} \sin(x) dx$.

Das erste dieser Integrale ergibt $[-x \cdot \cos(x) + \sin(x)]_0^{\pi} = [\pi]$; das zweite ergibt $\left[-\frac{\pi}{2} \cos[x] \right]_0^{\pi}$, was wie erwartet ebenfalls gleich $[\pi]$ ist.

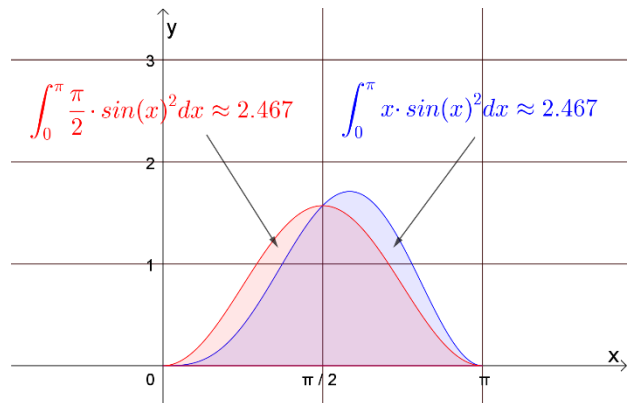
Beispiel 2: $\int_0^{\pi} x \cdot \sin(x)^2 dx$ und $\frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\pi} \sin(x)^2 dx$.

Das erste dieser Integrale ergibt

$$\left[\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} \cos[2x] - \frac{1}{4} x \sin[2x] \right]_0^{\pi} = \boxed{\frac{\pi^2}{4}}; \text{ das}$$

zweite ergibt $\left[\frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x) \right) \right]_0^{\pi}$, was ebenfalls

gleich $\boxed{\frac{\pi^2}{4}}$ ist.



In der oben wiedergegebenen Figur sind diese beiden Integrale graphisch dargestellt.

Beispiel 3: $\int_0^{\pi} x \cdot \left(\sin(x)^2 + \sqrt{1 - \sin(x)^2} \right) dx$ und $\frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\pi} \left(\sin(x)^2 + \sqrt{1 - \sin(x)^2} \right) dx$.

Das erste Integral ergibt $\left[\frac{x^2}{4} + \sqrt{\cos(x)^2} - \frac{1}{8} \cdot \cos(2x) - \frac{1}{4} \cdot x \sin(2x) + x \cdot \sqrt{\cos(x)^2} \cdot \tan(x) \right]_0^{\pi} = \boxed{\frac{\pi^2}{4} + \pi};$

das zweite ergibt $\left[\frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x) + \sqrt{\cos(x)^2} \cdot \tan(x) \right) \right]_0^{\pi}$, was ebenfalls gleich $\boxed{\frac{\pi^2}{4} + \pi}$ ist.

Achtung:

Im Intervall $\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ sind $\sqrt{1 - \sin(x)^2}$ und $\cos(x)$ **nicht** identisch, weshalb die Integrale

$$\int_0^{\pi} x \cdot \left(\sin(x)^2 + \cos(x) \right) dx = \frac{\pi^2}{4} - 2 \text{ und } \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\pi} \left(\sin(x)^2 + \cos(x) \right) dx = \frac{\pi^2}{4} \text{ **nicht** gleich sind!}$$

Literatur:

1. Zur «King's Rule»: <https://www.magnamathematica.com/2024/04/23/kings-rule/>
2. Eine Zusammenstellung von Integrationsformeln: <https://brilliant.org/wiki/integration-tricks/>
3. Ein paar weitere Anwendungen dieser Formeln:
 - Prime Newtons: <https://www.youtube.com/watch?v=v7Lig-Q444E&t=692s>
 - Presh Talwalkar: <https://www.youtube.com/watch?v=BfZObnTIsYk&t=183s>
 - Steve Chow blackpenredpen: <https://www.youtube.com/watch?v=yspp9FSbJlk>
 - Michael Penn: <https://www.youtube.com/watch?v=ExtlUgIxTNY&list=PL22w63XsKjqzJpcuD6InKWZXep2L0z1H8&index=3>

Alexandre Junod

Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), alexandre.junod@rpn.ch

Les équations de Pell-Fermat généralisées

L'équation diophantienne $x^2 - ny^2 = 1$, où n est un entier positif non carré, a suscité l'intérêt des mathématiciens depuis l'Antiquité. En Inde, Brahmagupta (598-668) a montré comment générer une infinité de solutions à partir d'une solution non triviale $(x; y) \neq (\pm 1; 0)$, tandis que Bhāskara II (1114-1185) a développé un algorithme (appelé méthode *chakravala*) permettant de trouver une telle solution initiale. En Europe, ce problème attira également l'attention et fut progressivement relié aux fractions continues, notamment par Pierre de Fermat (1601-1665), William Brouncker (1620-1684), John Wallis (1616-1703), Leonhard Euler (1707-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Évariste Galois (1811-1832) et Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Une introduction est donnée dans [2] et nous améliorons ici l'algorithme présenté dans [1] afin de traiter l'équation plus générale $mx^2 - ny^2 = m$, où $m < n$ sont des entiers positifs dont le produit n'est pas un carré parfait.

1 Algorithme

On considère deux entiers positifs $m < n$ dont le produit n'est pas un carré parfait et un algorithme :

Initialisation :

$$\begin{array}{ccc|c} a_{i-1} & b_{i-1} & c_{i-1} & \\ \hline a_i & b_i & c_i & \end{array} = \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & n & \\ \hline 1 & 0 & m & \end{array} \text{ pour } i = 0.$$

Itération :

$$\begin{array}{ccc|c} a_{i+1} = q_i a_i + a_{i-1} & b_{i+1} = q_i b_i + b_{i-1} & c_{i+1} = 2q_i \sqrt{mn - c_{i-1}c_i} + c_{i-1} - q_i^2 c_i & \\ \hline & & & \end{array} \text{ avec } q_i = \left\lfloor \frac{\sqrt{mn - c_{i-1}c_i} + \sqrt{mn}}{c_i} \right\rfloor$$

Nous allons établir les faits suivants.

- Il existe un indice s tel que $q_s = 2q_0$. On a alors $c_s = m$ et la fraction continue périodique

$$\sqrt{\frac{n}{m}} = [q_0; q_1, q_2, \dots] = [q_0; \overline{q_1, \dots, q_s}] = [q_0; \underbrace{q_1, \dots, q_1}_{\text{palindrome}}, 2q_0].$$

- Pour chaque indice $i \geq 0$, on a $ma_i^2 - nb_i^2 = (-1)^i c_i$ ainsi que $\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} = [q_0; q_1, \dots, q_i]$.

Exemple. Trouver deux nombres impairs consécutifs dont le produit est 23 fois un carré parfait. Ce problème conduit à l'équation de Pell-Fermat classique $x^2 - 23y^2 = 1$, où x est un nombre pair (les deux nombres impairs étant alors $x \pm 1$). Avec $m = 1$ et $n = 23$, l'algorithme fournit la fraction continue $\sqrt{23} = [4; \overline{1, 3, 1, 8}]$ et la première solution $(x; y) = (24; 5)$. Les nombres 23 et 25 répondent donc au problème (la prochaine solution sera 55'223 et 55'225). Notons encore que $\frac{24}{5} = [4; 1, 4] = [4; \overline{1, 3, 1}]$.

i	a_i	b_i	c_i	q_i
-1	0	1	23	← initialisation
0	1	0	1	$q_0 = \lfloor (0 + \sqrt{23})/1 \rfloor = 4$
1	4	1	7	$q_1 = \lfloor (4 + \sqrt{23})/7 \rfloor = 1$
2	5	1	2	$q_2 = \lfloor (3 + \sqrt{23})/2 \rfloor = 3$
3	19	4	7	$q_3 = \lfloor (3 + \sqrt{23})/7 \rfloor = 1$
4	24	5	1	$q_4 = \lfloor (4 + \sqrt{23})/1 \rfloor = 8$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Raccourci. Pour résoudre une équation classique $x^2 - ny^2 = 1$, on peut arrêter l'algorithme dès que c_i divise $2a_i$: la relation $a_i^2 - nb_i^2 = (-1)^i c_i$ implique la solution $x = \frac{2a_i^2}{c_i} + (-1)^{i+1}$ et $y = \frac{2a_i b_i}{c_i}$.

Remarque. Pour visualiser une matrice identité, on peut initialiser l'algorithme comme ci-contre. On a alors $q_{-1} = 0$ (car $m < n$) et la suite est la même.

$$\begin{bmatrix} a_{-2} & b_{-2} & c_{-2} \\ a_{-1} & b_{-1} & c_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \end{bmatrix}$$

2 Pertinence

Proposition 1. Les nombres c_{i-1} , c_i , q_i sont des entiers strictement positifs et $\sqrt{mn - c_{i-1}c_i}$ est aussi un entier (autrement dit $mn - c_{i-1}c_i$ est un carré parfait).

Preuve. L'assertion est vraie pour $i = 0$ et on procède par récurrence : on suppose qu'elle est vraie pour un indice i et on prouve sa validité pour l'indice $i + 1$.

- $\sqrt{mn - c_i c_{i+1}}$ est un entier

Le polynôme $P(x) = c_i x^2 - 2\sqrt{mn - c_{i-1}c_i}x + c_{i+1} - c_{i-1}$ s'annule au moins une fois (lorsque $x = q_i$). Son discriminant $\Delta = 4(mn - c_{i-1}c_i) - 4c_i(c_{i+1} - c_{i-1}) = 4(mn - c_i c_{i+1})$ est donc positif ou nul et $\sqrt{mn - c_i c_{i+1}}$ est bien défini. On peut vérifier que $|c_i q_i - \sqrt{mn - c_{i-1}c_i}| = \sqrt{mn - c_i c_{i+1}}$ car les deux membres de l'égalité ont le même carré. On en déduit que $\sqrt{mn - c_i c_{i+1}}$ est un entier.

- c_{i+1} est un entier strictement positif

La relation évidente $0 < \frac{\sqrt{mn - c_{i-1}c_i} + \sqrt{mn}}{c_i} - q_i < 1$ peut s'écrire sous la forme

$$-\sqrt{mn} < \underbrace{\sqrt{mn - c_{i-1}c_i} - c_i q_i}_{\pm \sqrt{mn - c_i c_{i+1}}} < c_i - \sqrt{mn} \quad (*)$$

car $c_i > 0$. Comme $q_i \geq 1$ et $c_i c_{i-1} > 0$, on a $c_i \leq c_i q_i < \sqrt{mn - c_{i-1}c_i} + \sqrt{mn} < 2\sqrt{mn}$ et l'encadrement (*) implique $\sqrt{mn - c_i c_{i+1}} < \sqrt{mn}$. Il s'ensuit que $c_i c_{i+1} > 0$ et que le nombre c_{i+1} est un entier strictement positif.

- q_{i+1} est un entier strictement positif

La fonction $x \mapsto x^2 - c_i x - mn$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; \frac{1}{2}c_i]$. On peut l'appliquer à (*) en inversant les inégalités (car $c_i - \sqrt{mn} < c_i - \frac{1}{2}c_i = \frac{1}{2}c_i$). On obtient

$$c_i \sqrt{mn} > -c_i c_{i+1} + c_i^2 q_i - c_i \sqrt{mn - c_{i-1}c_i} > -c_i \sqrt{mn},$$

c'est-à-dire $|c_{i+1} + \sqrt{mn - c_{i-1}c_i} - c_i q_i| < \sqrt{mn}$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on en déduit

$$c_{i+1} = |c_{i+1}| \leq |c_{i+1} + \sqrt{mn - c_{i-1}c_i} - c_i q_i| + |c_i q_i - \sqrt{mn - c_{i-1}c_i}| < \sqrt{mn} + \sqrt{mn - c_i c_{i+1}},$$

donc l'entier évident q_{i+1} est strictement positif. $\square$

On a remarqué que les entiers $c_i q_i - \sqrt{mn - c_{i-1}c_i}$ et $\sqrt{mn - c_i c_{i+1}}$ sont égaux ou opposés. On peut maintenant montrer qu'ils sont réellement les mêmes :

- si $c_i > \sqrt{mn}$, alors $c_i q_i - \sqrt{mn - c_i c_{i+1}} > \sqrt{mn} - \sqrt{mn - c_i c_{i+1}} > 0$;
- si $c_i < \sqrt{mn}$, alors (*) montre que $c_i q_i - \sqrt{mn - c_{i-1}c_i} > \sqrt{mn} - c_i > 0$.

Comme mn n'est pas un carré parfait, le cas $c_i = \sqrt{mn}$ ne se pose pas.

3 Fraction continue de $\sqrt{n/m}$

Théorème 1. *Il existe un indice s tel que $q_s = 2q_0$. La suite $(q_i)_{i \geq 1}$ est alors s -périodique et on a la fraction continue périodique*

$$\sqrt{\frac{n}{m}} = [q_0; q_1, q_2, \dots] = [q_0; \overline{q_1, \dots, q_s}] = [q_0; \underbrace{q_1, \dots, q_1}_{\text{palindrome}}, 2q_0].$$

Preuve. Considérons le nombre réel positif $\theta_i = \frac{\sqrt{mn - c_{i-1}c_i} + \sqrt{mn}}{c_i}$ présent dans la définition de q_i . Comme $\sqrt{mn - c_{i-1}c_i} = c_i q_i - \sqrt{mn - c_i c_{i+1}}$, on a

$$\theta_i = \frac{c_i q_i - \sqrt{mn - c_i c_{i+1}} + \sqrt{mn}}{c_i} = q_i + \frac{\sqrt{mn} - \sqrt{mn - c_i c_{i+1}}}{c_i}$$

et en amplifiant la dernière fraction par $\sqrt{mn} + \sqrt{mn - c_i c_{i+1}}$, on obtient

$$\theta_i = q_i + \frac{c_i c_{i+1}}{c_i(\sqrt{mn} + \sqrt{mn - c_i c_{i+1}})} = q_i + \frac{c_{i+1}}{\sqrt{mn} + \sqrt{mn - c_i c_{i+1}}} = q_i + \frac{1}{\theta_{i+1}}$$

Comme tous les q_i sont des entiers strictement positifs, on a alors $\theta_i = [q_i; q_{i+1}, q_{i+2}, \dots]$.

De la même manière, les nombres $\theta'_i = \frac{\sqrt{mn - c_{i-1}c_i} + \sqrt{mn}}{c_{i-1}}$ satisfont

$$\theta'_{i+1} = \frac{\sqrt{mn - c_i c_{i+1}} + \sqrt{mn}}{c_i} = q_i + \frac{\sqrt{mn} - \sqrt{mn - c_{i-1}c_i}}{c_i} = q_i + \frac{1}{\theta'_i}$$

donc $\theta'_{i+1} = [q_i, q_{i-1}, \dots, q_0, \theta'_0]$ avec $\theta'_0 = \sqrt{mn}$. On peut aussi en déduire que $q_i = \lfloor \theta'_{i+1} \rfloor$.

- *Périodicité*

Comme la suite $(c_i)_{i \geq 0}$ d'entiers est bornée, on peut trouver deux indices $s > i \geq 0$ avec i minimal, tels que $c_s = c_i$ et $c_{s+1} = c_{i+1}$. On a alors les égalités $\theta'_{s+1} = \theta'_{i+1}$, $q_s = \lfloor \theta'_{s+1} \rfloor = \lfloor \theta'_{i+1} \rfloor = q_i$ et $c_{s-1} = q_s^2 c_s - 2q_s \sqrt{mn - c_s c_{s+1}} + c_{s+1}$ coïncide avec c_{i-1} . Pour respecter la minimalité de i , on en déduit que $i = 0$, donc $c_s = c_0 = m$ et $c_{s+1} = c_1 = n - m q_0^2$. On a aussi la fraction continue

$$\theta_{s+1} = \theta_1 = [q_1, q_2, \dots, q_s, \theta_{s+1}] = [\overline{q_1, q_2, \dots, q_s}].$$

- *Palindromie*

On peut vérifier que $\theta'_1 = \sqrt{n/m} + q_0$ et que $\theta_1 = \frac{\sqrt{m}(\sqrt{n} + \sqrt{m}q_0)}{n - m q_0^2} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n} - \sqrt{m}q_0} = \frac{1}{\theta'_1 - 2q_0}$.

Avec la fraction continue ci-dessus, on a $\theta'_1 - 2q_0 = [0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_s}]$, donc $\theta'_1 = [2q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_s}]$.

En comparant avec

$$\theta'_1 = \theta'_{s+1} = [q_s, q_{s-1}, \dots, q_1, \theta'_1] = [\overline{q_s, q_{s-1}, \dots, q_1}],$$

on obtient $q_s = 2q_0$, $q_{s-1} = q_1$, $q_{s-2} = q_2$, et ainsi de suite. $\square$

4 Equation de Pell généralisée

Théorème 2. *Pour chaque indice $i \geq 0$, on a $ma_i^2 - nb_i^2 = (-1)^i c_i$ et $\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} = [q_0; q_1, \dots, q_i]$.*

Preuve. Avec les relations $a_{i+1} = q_i a_i + a_{i-1}$ et $\theta_{i+1} = \frac{1}{\theta_i - q_i}$, on obtient

$$a_{i+1}\theta_{i+1} + a_i = \theta_{i+1}(q_i a_i + a_{i-1} + a_i(\theta_i - q_i)) = \theta_{i+1}(a_i \theta_i + a_{i-1})$$

et une relation similaire est valable pour les nombres b_i . En itérant le raisonnement et en utilisant les valeurs initiales $a_0 \theta_0 + a_{-1} = \theta_0 = \sqrt{n/m}$, respectivement $b_0 \theta_0 + b_{-1} = 1$, on peut écrire

$$a_{i+1}\theta_{i+1} + a_i = \theta_{i+1}\theta_i \cdots \theta_2 \theta_1 \sqrt{n/m} \quad \text{et} \quad b_{i+1}\theta_{i+1} + b_i = \theta_{i+1}\theta_i \cdots \theta_2 \theta_1$$

On a donc $(a_i \theta_i + a_{i-1}) = (b_i \theta_i + b_{i-1}) \sqrt{n/m}$. Explicitons θ_i et multiplions cette relation par mc_i :

$$(a_i \sqrt{mn - c_{i-1}c_i} + c_i a_{i-1})m + ma_i \sqrt{mn} = (b_i \sqrt{mn - c_{i-1}c_i} + c_i b_{i-1})\sqrt{mn} + mnb_i.$$

Comparons maintenant les parties purement irrationnelles et les parties purement entières :

$$ma_i = b_i \sqrt{mn - c_{i-1}c_i} + c_i b_{i-1} \quad \text{et} \quad nb_i = a_i \sqrt{mn - c_{i-1}c_i} + c_i a_{i-1}.$$

En multipliant la première équation par a_i , la seconde par b_i et en soustrayant les relations obtenues, on trouve $ma_i^2 - nb_i^2 = c_i(a_i b_{i-1} - a_{i-1} b_i)$. En considérant le déterminant dans la relation matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{i+1} & a_i \\ b_{i+1} & b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & a_{i-1} \\ b_i & b_{i-1} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice identité}} = \cdots = \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} \\ b_0 & b_{-1} \end{pmatrix}}_{\text{Matrice identité}} \begin{pmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on voit que $a_{i+1}b_i - a_i b_{i+1} = (-1)^{i+1}$ et la première partie du théorème est démontrée.

Étant donné une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et un nombre x , on définit $M * x = \frac{ax + b}{cx + d}$. On a par exemple

$\begin{pmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * x = q + \frac{1}{x}$ et on peut vérifier que $M_1 * (M_2 * x) = M_1 M_2 * x$. En appliquant $M \mapsto M * x$

à la relation matricielle ci-dessus, on trouve $\frac{a_{i+1}x + a_i}{b_{i+1}x + b_i} = [q_0; q_1, \dots, q_i, x]$. La deuxième partie du théorème est démontrée en prenant la limite lorsque x tend vers l'infini. $\square$

Corollaire. Soit s la longueur de la période de la fraction continue de $\sqrt{n/m}$ comme définie dans le théorème 1. On a alors $c_{ks} = c_0 = m$ et $ma_{ks}^2 - nb_{ks}^2 = (-1)^{ks}m$ pour tout entier $k \geq 0$.

Pour résumer, lorsque $n > m \geq 1$, l'équation $mx^2 - ny^2 = c$

- est toujours résoluble pour $c = m$ (en choisissant des valeurs paires de k si s est impair),
- est résoluble pour $c = -m$ lorsque s est impair (en considérant des valeurs impaires de k).

Remarque 1. Supposons que l'équation $mx^2 - ny^2 = c$ admette une solution $(x; y)$ avec $x > y > 0$. On a alors

$$\left| \frac{x}{y} - \sqrt{\frac{n}{m}} \right| = \left| \frac{\sqrt{m}x - \sqrt{n}y}{\sqrt{m}y} \right| = \left| \frac{c}{(\sqrt{m}x + \sqrt{n}y)\sqrt{m}y} \right| < \frac{|c|}{(\sqrt{m} + \sqrt{n})\sqrt{m}y^2} \stackrel{(*)}{<} \frac{1}{2y^2}$$

l'inégalité $(*)$ étant valable lorsque $2|c| < m + \sqrt{mn}$. Ceci implique alors (par un résultat bien connu en théorie des fractions continues) que x/y est une réduite de $\sqrt{n/m}$. On en déduit que si $|c| < \frac{m + \sqrt{mn}}{2}$ (en particulier si $c = \pm m$), l'algorithme pourra trouver toute solution éventuelle. Si $|c| > 2\sqrt{mn}$, il n'en trouvera aucune car on a montré que $c_i < 2\sqrt{mn}$ dans la section 2. Pour les autres valeurs de c , rien ne garantit qu'il trouvera des solutions, même s'il en existe.

Remarque 2. Lorsque $m > n \geq 1$, l'équation se réécrit $ny^2 - mx^2 = -c$ et on peut échanger les rôles de m et n , ainsi que ceux de x et y , tout en considérant la constante opposée. On obtient donc la règle suivante : si $m > n \geq 1$, l'équation $mx^2 - ny^2 = c$ est toujours résoluble pour $c = -n$, et est résoluble pour $c = n$ lorsque la période de la fraction continue de $\sqrt{m/n}$ est de longueur impaire.

Exemple. L'équation diophantienne $7X - 11Y = 7$ admet la solution générale $X = 1 + 11k$ et $Y = 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Trouver des valeurs $k > 0$ pour lesquelles ces deux nombres sont des carrés parfaits.

Le problème revient à résoudre l'équation $7x^2 - 11y^2 = 7$ (on pourrait également s'intéresser à $x^2 - 77y^2 = 1$). En considérant $m = 7$ et $n = 11$ dans l'algorithme (voir ci-contre), on trouve la solution non triviale $(x; y) = (351; 280)$. Elle correspond à $X = x^2 = 123'201$ et $Y = y^2 = 78'400$, donc à $k = 11'200$. La prochaine valeur possible sera $k = 5'519'404'800$.

On voit que l'algorithme peut résoudre l'équation $7x^2 - 11y^2 = c$ pour $c \in \{7, -4, 13, -1\}$ mais pas pour $c = -7$: la fraction continue $\sqrt{11/7} = [1; \overline{3, 1, 16, 1, 3, 2}]$ a une période de longueur paire.

i	a_i	b_i	c_i	q_i
-1	0	1	11	
0	1	0	7	1
1	1	1	4	3
2	4	3	13	1
3	5	4	1	16
4	84	67	13	1
5	89	71	4	3
6	351	280	7	2
7	791	631	4	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Le programme suivant, écrit en Python, indique les premières éventuelles solutions $(x; y)$ d'une équation $mx^2 - ny^2 = c$ que l'algorithme permet de trouver en moins de 100 itérations.

```
def Pell(m,n,c) :
    print(f"Equation {m}x^2 - {n}y^2 = {c}")
    nbIter = nbSol = 0
    if c*c < 4*m*n :
        a0, b0, c0, a1, b1, c1 = 0, 1, n, 1, 0, m
        while (nbSol != 5 and nbIter != 100) :
            if (1-2*(nbIter%2))*c1 == c :
                print(f"x = {a1} et y = {b1}")
                nbSol += 1
            nbIter += 1
            q1 = int((m*n - c0*c1)**(1/2) + (m*n)**(1/2)) // c1
            a2 = q1*a1 + a0
            b2 = q1*b1 + b0
            c2 = 2*q1*int((m*n - c0*c1)**(1/2)) + c0 - q1*q1*c1
            a0, b0, c0, a1, b1, c1 = a1, b1, c1, a2, b2, c2
        if nbSol == 0: print("Aucune solution trouvée")
```

Pell(1,29,1) : $x^2 - 29y^2 = 1$ pour (1;0), (9'801;1'820), (192'119'201;35'675'640), etc.

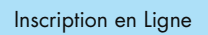
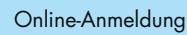
Pell(1,29,-1) : $x^2 - 29y^2 = -1$ pour (70;13), (137'2210;254'813), etc.

Pell(7,11,7) : $7x^2 - 11y^2 = 7$ pour (1;0), (351;280), (246'401;196'560), etc.

Pell(7,11,-7) : $7x^2 - 11y^2 = -7$, Aucune solution trouvée

Références (articles personnels)

- [1] "An Algorithm to Solve a Pell Equation", General Mathematics Notes, Vol. 28, No. 2, Juin 2015
www.emis.de/journals/GMN/volumes/all_volumes-page1_2015.html
- [2] "Initiation aux équations de Pell-Fermat", Bulletin de la SSPMP n° 138, septembre 2018
www.vsmf.ch/bulletin/suche/Artikel/138/138_Junod.pdf



Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematikund Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und Gymnasiallehrer (VSG) werden.

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

www.vsg-sspes.ch

Bulletin N° 160

Impressum

Herausgeber — Éditeur

VSMP – SSPMP – SSIMF

Korrespondenz — Correspondance

Franz Meier franz.meier@vsmp.ch
Werner-Kälin-Strasse 1 Tel. 041 210 25 58
8840 Einsiedeln

Layout — Mise en page

Samuel Byland samuel.byland@vsmp.ch
MNG Rämibühl Tel. 079 728 63 97
Rämistrasse 58
8001 Zürich

Inserateverwaltung — Publicité

Yves Roisin yves.roisin@vsmp.ch
Route de Josaphat 69 Tel. 078 696 03 69
1763 Granges-Paccot

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

— Tarifs pour les annonces et les annexes

Inserate:

ganzseitig Fr. 500.–
halbseitig Fr. 300.–

Beilagen:

bis 20 g Fr. 500.–
über 20 g nach Vereinbarung

Adressänderungen — Changement d'adresse

VSMP Mitglieder — Membres de la SSPMP:
VSG – SSPES – SSISS
Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)
Monbijoustrasse 36
3011 Bern
Tel. 031 382 52 33
information@vsg-sspes.ch

übrige Abonnenten — autres abonnées:

Franz Meier franz.meier@vsmp.ch
Werner-Kälin-Str. 1 Tel. 041 210 25 58
8840 Einsiedeln

Auflage — Tirage

800 Exemplare
erscheint dreimal jährlich

Präsidentin VSMP — SSPMP — SSIMF

Tatiana Mantuano tatiana.mantuano@vsmp.ch
Grand'Rue 16 Tel. 078 629 12 36
2075 Wavre

Deutschschweizerische Mathematikkommission

Andrea Peter praesidium@dmk.vsms.ch
Kantonsschule Beromünster
Am Sandhübel 12
6215 Beromünster

Deutschschweizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@vsmp.ch
Gymnasium Burgdorf Tel. 031 638 03 03
Pestalozzistrasse 17
3400 Burgdorf

Commission Romande de Mathématique

Sylvie Luisier sylvie.luisier@vsmp.ch
39, ch. des Sellières Tél. 078 689 34 11
1219 Acère

Commission Romande de Physique

Yves Oestreich yves.oestreich@vsmp.ch
Malvand 13 Tél. 079 796 69 95
1292 Chambésy

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Guido Lob guido.lob@vsmp.ch
Via Borghese 14 Tel. 078 663 13 37
6600 Locarno

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

— Délais de rédaction (de parution)

Nr. 161 31.03.2026 (Ende Mai)
Nr. 162 31.07.2026 (Ende September)
Nr. 163 30.11.2026 (Ende Januar)

Druck und Versand — Imprimerie

Niedermann Druck AG
Letzistrasse 37
9015 St. Gallen
www.niedermanndruck.ch

Internet:

www.vsms.ch – www.sspmp.ch – www.ssimf.ch



V S M P
S S P M P
S S I M F

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica