

Videoanalyse im Physikunterricht

Für die Studie zweidimensionaler Bewegungen, Kreisbewegungen und Bewegungen mehrerer Objekte in zwei Dimensionen ermöglicht die Vernier Video Analysis®-App Ihren Schüler:innen, Videoanalysen auf einfache Weise durchzuführen.

Vernier Video Analysis® App

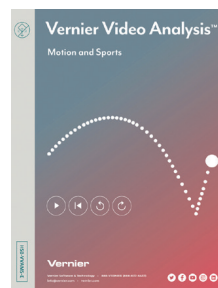
Diese App ist mit mehreren Gerätetypen und Plattformen kompatibel. Studierende können ihre Mobilgeräte im Labor oder im Feld einsetzen, um Videos bewegter Objekte aufzuzeichnen. Diese Videoaufnahmen können sofort an die Video Analysis App übergeben und ausgewertet werden.

In der App können Punkte auf dem Objekt markiert werden, um dessen Bewegung zu verfolgen und Distanzen zu ermitteln. Die App erstellt genaue und visuell ansprechende Grafiken und eine Datentabelle der aufgezeichneten Bewegung.



Bild: Positionen und Geschwindigkeitsvektoren beim Basketballwurf

Vernier Video Analysis: Motion and Sports



Dieses E-Book enthält 12 Untersuchungen mit Vernier Video Analysis, um Geschwindigkeit, Beschleunigung und sportliche Aktivitäten zu erforschen.

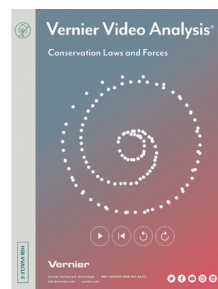


Zum E-Book



Zur Software

Vernier Video Analysis: Conservation Laws and Forces



Dieses E-Book befasst sich mit mechanischen Themen, die über die grundlegende Bewegung hinausgehen, wie z. B. Energieerhaltung sowie Impuls- und Drehimpulserhaltung.



Zum E-Book



Internet-Adressen – *Adresses Internet*

www.vsmp.ch – www.sspmp.ch – www.ssimf.ch

Titelseite – *Page de Titre*

Congruences entre les nombres de Fibonacci. Article à partir de page 38 de ce numéro.

VISION SCIENCE

Kongress für Mittelschullehrpersonen der MINT-Fächer
zu den Möglichkeiten in der Weiterentwicklung der gymnasialen Maturität
unter Einbezug von Bildung für nachhaltige Entwicklung (BNE)

Congrès des enseignant·e·s de gymnases des matières MINT
sur les possibilités de développement de la maturité gymnasiale
en tenant compte de l'éducation au développement durable (EDD)

Congresso per docenti delle scuole medie superiori delle materie MINT
sulle opportunità di sviluppo della maturità liceale
nell'ottica dell'educazione allo sviluppo sostenibile (ESS)

Save the date:

22.–24.01.2026

ETH Zürich

Organisiert in Kooperation mit den MINT-Fachverbänden
Organisée en collaboration avec les sociétés de branche MINT
Organizzato in collaborazione con le società disciplinari MINT



VSN
SSPSN
ASISN

SV!A / SS!E / SS!!



www.visionsscience26.ch

Bulletin N° 158

Inhaltsverzeichnis

AUS DEM VORSTAND	6
Josef Züger Gedanken des Präsidenten/Pensée du président/Pensieri del presidente	6
DEUTSCHSCHWEIZERISCHE PHYSIKKOMMISSION	7
Hans Peter Dreyer IYQ 2025	7
Hans Peter Dreyer Max Planck, Albert Einstein, Arnold Sommerfeld und die frühe Quantenphysik des Lichts	8
Martin Lieberherr Doppelter schiefer Wurf	12
Hans Kammer, Vance Carter und Oliver Gallus Vernier Video Analysis	14
COMMISSION ROMANDE DE PHYSIQUE	18
Thomas Genoud Inégalités de Bell : De La Théorie à l'Expérience	18
WISSENSCHAFTSWETTBEWERBE	22
Malte Uthoff, Eric Schertenleib International Young Physicists' Tournament 2026 in der Schweiz	22
Lara Gafner Hinter den Kulissen im Lager der Physik-Olympiade	24
Lara Gafner Dans les coulisses du camp des Olympiades de physique	26
DEUTSCHSCHWEIZERISCHE MATHEMATIKKOMMISSION	28
Georg Keller Vergleich von Kepler- und Kreisbahn: Eine Ergänzung	28
SMG, DMK, ETH 35. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht	34
ETH Zürich Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht	36
COMMISSION ROMANDE DE MATHÉMATIQUE	38
Alexandre Junod Congruences entre les nombres de Fibonacci	38
CRM 100 ans CRM: Conférence exceptionnelle	43

Josef Züger
Präsident VSMP, praesident@vsmf.ch

Gedanken des Präsidenten

Pensées du président

Pensieri del presidente

Liebe Leserinnen, liebe Leser

Mittlerweile gehört es zur Tradition, dass in Abständen von etwa 5 Jahren ein Kongress für unsere Kolleginnen und Kollegen aus dem MINT-Bereich durchgeführt wird. In dieser Tradition erinnere ich mich an den Kongress SCIENCE – CUISINE 2013 in Sion und an den Kongress SCIENCIAE & ROBOTICA 2018 in Lausanne. Nach einer längeren Pause, an der die Pandemie eine Mitschuld trägt, ist es wieder so weit. Vom 22. bis 24. Januar 2026 organisieren die MINT-Fachverbände SVIA¹, VSGg², VSN³ und VSMP unter dem Titel VISIONSCIENCE einen Kongress für die Sek-Stufe II in Zürich. Das Organisationskomitee ist derzeit daran, ein attraktives Programm mit hochkarätigen Referenten aus den Bereichen Mathematik, Physik, Chemie, Biologie, Informatik und Geografie zusammenzustellen. Dabei ist es uns ein Anliegen, dass im Programm alle Landesteile gebührend vertreten sind. Reservieren Sie sich schon heute das Datum und machen Sie Ihre Kolleginnen und Kollegen auf den Kongress aufmerksam. Ich freue mich darauf, viele Mitglieder des VSMP am Kongress anzutreffen.

Josef Züger, Präsident



Chères lectrices, chers lecteurs,

Environ tous les 5 ans, la SSPMP a pour tradition d'organiser un congrès en collaboration avec les autres disciplines MINT. Je me souviens du congrès SCIENCE – CUISINE en 2013 à Sion, et du congrès SCIENCIAE & ROBOTICA en 2018 à Lausanne. Après une longue pause, dans laquelle la pandémie a sa part de responsabilité, le moment est venu d'organiser à nouveau un congrès en collaboration avec la SSIE⁴, ASEG⁵, SSPSN⁶.

Le congrès «visionScience» aura lieu du 22 au 24 janvier 2026, à Zürich. Il est destiné aux enseignant-e-s du secondaire II. Le comité d'organisation est actuel-

lement en train de mettre sur pied un programme attrayant avec des intervenant-e-s de haut niveau dans les domaines des mathématiques, de la physique, de la chimie, de la biologie, de l'informatique et de la géographie. Il nous tient à cœur que le programme contienne des conférences et des ateliers pour des collègues venant de toutes les régions du pays.

Réservez dès aujourd'hui ces dates et attirez l'attention de vos collègues sur ce congrès.

Je me réjouis d'y rencontrer de nombreux membres de la SSPMP.

Josef Züger, Président



Care lettrici, cari lettori,

è ormai diventata una tradizione proporre a scadenza regolare un congresso per gli insegnanti delle discipline MINT. Rammento con piacere il congresso del 2013 a Sion con il titolo SCIENCE – CUISINE e quello del 2018 SCIENCIAE & ROBOTICA a Losanna. Dopo una pausa, di cui è responsabile anche la pandemia, è arrivato il momento di proporre uno nuovo. Dal 22 al 24 gennaio 2026, le associazioni disciplinari degli insegnanti delle materie MINT, ossia SSII⁷, ASIG⁸, ASSN⁹ e SSIMF organizzano a Zurigo un congresso per il settore medio superiore dal titolo VISIONSCIENCE. Il comitato d'organizzazione sta allestendo un programma accattivante con relatori di prim'ordine provenienti dai settori della matematica, della fisica, della chimica, della biologia, dell'informatica e della geografia. Per noi è importante che tutte le regioni nazionali siano debitamente rappresentate nel programma e vi si possano riconoscere. Vi invitiamo a riservare le date e di trasmettere l'invito di partecipare al congresso ai vostri colleghi. Il comitato d'organizzazione si augura di poter salutare molti membri della SSIMF a Zurigo in questa particolare occasione.

¹ Schweizerischer Verein für Informatik in der Ausbildung

² Verband Schweizerischer Geographielehrpersonen

³ Verein Schweizerischer Naturwissenschaftslehrerinnen und -lehrer

⁴ Société Suisse pour l'Informatique dans l'Enseignement

⁵ Association Suisse des Enseignants de Géographie

⁶ Société Suisse des Professeurs de Sciences Naturelles

⁷ Società Svizzera per l'Informatica nell'Istruzione

⁸ Associazione Svizzera degli Insegnanti di Geografia

⁹ Associazione Svizzera degli Insegnanti di Scienze Naturali

Hans Peter Dreyer
Ebnat-Kappel, hp.dreyer@thurweb.ch

IYQ 2025

Gedanken aus Gymnasialperspektive zum *International Year of Quantum Science and Technology*

Die Mission des Internationalen Jahres der Quantenwissenschaft und -technologie (IYQ) ist es, das 100-jährige Jubiläum der Quantenmechanik im Jahr 2025 zu nutzen, um die Öffentlichkeit für die Bedeutung und Auswirkungen der Quantenwissenschaft und ihrer Anwendungen auf alle Aspekte des Lebens zu sensibilisieren. (UNESCO, übersetzt von der Deutschen Physikalischen Gesellschaft DPG)

Anlass für das Jubiläum ist ein Artikel, der am 29. Juli 1925 bei der *Zeitschrift für Physik* eingeht. Sein Titel: *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen*. Der erst 24-jährige Göttinger Privatdozent Werner Heisenberg setzt sich darin ein kühnes Ziel: *In der Arbeit soll versucht werden, Grundlagen zu gewinnen für eine quantentheoretische Mechanik, die ausschließlich auf Beziehungen zwischen prinzipiell beobachtbaren Größen basiert ist*. Die zu gewinnenden Grundlagen für eine auch in atomaren Dimensionen brauchbare «quantentheoretische Mechanik» soll die Abkehr vom anschaulichen Teilchen auf einer Bahn und die Zuwendung zum abstrakten Quantenobjekt in einem Zustand umfassen. Zusammen mit Born und Jordan erschafft Heisenberg damit die Matrizenmechanik, die schon ein Jahr später mit Schrödingers Wellenmechanik einen mathematisch gleichwertigen Zwilling erhält.

Das Verhältnis zwischen den zwei konkurrierenden Zugängen zur neuen Mechanik klärt Sommerfeld 1930 für seine Münchner Studierenden – in der Erinnerung von Hans Bethe – folgendermassen: *Wir glauben an Heisenberg, aber wir rechnen nach Schrödinger*. Heisenbergs Matrizen sind für die Lösung konkreter Aufgaben viel umständlicher als Schrödingers Differenzialgleichungen. Offensichtlich gibt es auch Diskrepanzen zwischen verschiedenen Interpretationen. Heisenberg will zur *Verbreitung jenes 'Kopenhagener Geistes der Quantentheorie'* beitragen, indem er 1930 *Physikalische Prinzipien der Quantentheorie* als Buch herausgibt. Im Vorwort kündigt er an: *In der Darstellung ist besonderen Wert auf die Gleichberechtigung der Korpuskular- und der Wellenvorstellung gelegt*.

Mir scheint, die vor hundert Jahren von prominenter Seite propagierte Welle-Teilchen-Dualität sowohl des Lichts als auch der Materie helfe auch heute beim Verstehen der Quantenphysik. Eine schwierige, aber nicht selten gestellte Aufforderung lautet: «Bitte erklären Sie mir die Quantenphysik in einem Satz.» Natürlich ist diese Aufgabe unlösbar, aber in erster Näherung könnte man antworten: «Die Quantenphysik beruht darauf, dass Objekte wie Licht oder Elektronen sowohl Teilchen- als auch Welleneigenschaften zeigen.» Das stachelt wirklich Interessierte an, mehr wissen zu wollen, während Small-Talker sich intellektuell bescheideneren Themen zuwenden werden.

Was Quantentechnologie sei, lässt sich noch schlechter in einem Satz festmachen. «Der Mann auf der Strasse» denkt vielleicht nicht an den Laser, wohl aber zuerst an den Quantencomputer. Wird dieser in Zukunft die Verschlüsselungen knacken, die heute Finanztransaktionen schützen und damit erneut zeigen, dass jede Technologie von Kriminellen und autoritären Staaten missbraucht werden kann? Jedenfalls lässt sich «die Frau auf der Strasse» oder der Gymnasiast im Schwerpunkt Spanisch mit dem Quantencomputer kaum für *die Bedeutung und Auswirkungen der Quantenwissenschaft und ihrer Anwendungen auf alle Aspekte des Lebens* sensibilisieren. Auch der Hinweis, dass bereits der gewöhnliche Computer, das Handy oder der Computertomograph im Spital nur dank der Quantenmechanik funktionieren, hilft wenig. Hingegen könnten die Revolution der Beleuchtungstechnik mit den sparsamen LEDs oder die Fotovoltaik-Zellen «grüne» Ausgangspunkte für einen Ausflug in die Hintergründe der Halbleiterphysik oder sogar zu den Energiebändern in Kristallen und damit zu den Grundlagen der Quantenmechanik dienen. Motivierend ist auch Schrödingers Katze, die das ungelöste Messproblem illustriert und eine Gymnasiastin zur begeisterten Feststellung brachte: *Ich finde, Physik ist so philosophisch!*

Die folgende Artikelserie mit historischen Berichten zur Quantenphysik möchte Anstösse geben für Veränderungen auf ein Ziel hin, das die DPG bereits als erreicht sieht: *In der Schule ist die Quantenphysik ein wichtiges Thema, denn sie hat das Weltbild der modernen Physik nachhaltig geprägt. Für den Unterricht können die modernen Quantentechnologien neue Impulse geben, um die öffentliche Aufmerksamkeit und breite Bildung in den Naturwissenschaften insgesamt zu stärken.*

Hans Peter Dreyer
 Ebnat-Kappel, hp.dreyer@thurweb.ch

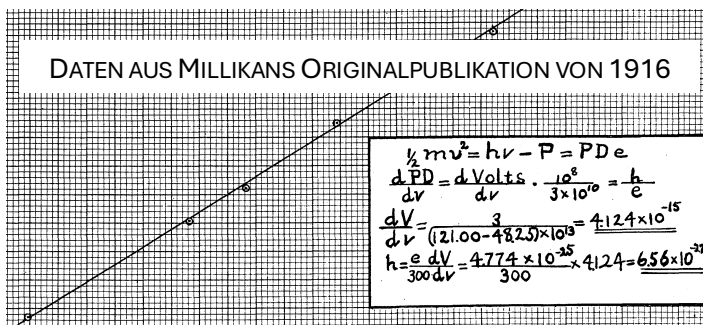
Max Planck, Albert Einstein, Arnold Sommerfeld und die frühe Quantenphysik des Lichts

Die Wellentheorie des Lichtes ist, menschlich gesprochen, Gewissheit. (H. Hertz, 1889)

Der Herrgott hat – wie es scheint – doch den Rank gefunden. (A. Einstein, 1910)

Am 10. Juli 1910 schreibt der junge Extraordinarius Albert Einstein aus Zürich dem etablierten, elf Jahre älteren Ordinarius Arnold Sommerfeld nach München: *Hoch geehrter Herr Kollege! (...) Der Schwerpunkt der ganzen Frage scheint mir darin zu liegen: ‘Lassen sich die Energiequanten einerseits und das Huygens’sche Prinzip andererseits vereinigen?’ Der Schein ist dagegen, aber der Herrgott hat – wie es scheint – doch den Rank gefunden.* Die beiden Physiker haben sich ein Jahr früher, an der Naturforschertagung in Salzburg, persönlich kennengelernt. Dort war Einsteins Vortrag «Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung» der Höhepunkt der Veranstaltung. Nun reist Sommerfeld mit seinem Assistenten Debye nach Zürich und diskutiert – auch in der legendären Öpfelchammer – den Widerspruch zwischen dem vielfach bestätigten Wellenbild und Einsteins revolutionärem Quantenbild des Lichts.

Zwanzig Jahre früher hatte Heinrich Hertz festgehalten: *An diesen Dingen [der Erklärung des Verhaltens der elektromagnetischen Strahlung] ist ein Zweifel nicht mehr möglich, eine Widerlegung dieser Anschauung ist für den Physiker undenkbar. Die Wellentheorie des Lichtes ist, menschlich gesprochen, Gewissheit.* Seit Young und Fresnel bildete die von Huygens entworfene Wellentheorie des Lichts die gültige Lehrmeinung. Newtons Partikeltheorie war überwunden. Diese Geisteshaltung schimmerte auch noch in Plancks Empfehlungsschreiben anlässlich Einsteins Berufung nach Berlin durch: *Dass Einstein in seinen Spekulationen gelegentlich auch einmal über das Ziel hinausgeschossen haben mag, wie z. B. in seiner Hypothese der Lichtquanten, darf man ihm nicht allzu schwer anrechnen; denn ohne einmal ein Risiko zu wagen, lässt sich auch in der exaktesten Naturwissenschaft keine wirkliche Neuerung einführen.*



Einsteins Lichtquanten entstanden aus einer theoretischen Analyse von Plancks Strahlungsgesetz. Direkte experimentelle Evidenz gab es nicht. Andrew Millikan, der jahrelang sorgfältige Messungen zum Photoeffekt durchgeführt und Plancks Konstante mit neuer Genauigkeit bestimmt hatte, kam 1916 zum konservativen Schluss: *Yet the semi-corpuseular theory by*

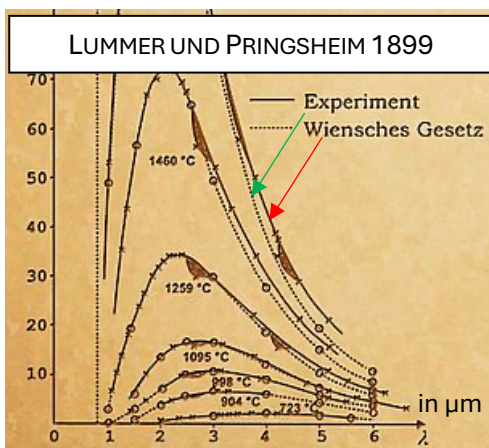
which Einstein arrived at his equation seems at present to be wholly untenable.

Parallel zu den Arbeiten an der Allgemeinen Relativitätstheorie denkt Einstein unermüdlich und von der Kritik unbeeindruckt über den Teilchenaspekt des Lichts nach und schreibt seinem Patentamt-Freund Michele Besso: *Es ist mir ein prächtiges Licht über die Absorption und Emission der Strahlung aufgegangen. In einem Elementarprozess (...) wird stets der Impuls hf/c auf das Molekül übertragen, und zwar bei Energieaufnahme in*

der Fortpflanzungsrichtung des Lichtbündels, bei der Energieabgabe in der entgegengesetzten Richtung. Lichtquanten sind also nicht nur Energie- sondern auch Impuls-Portionen. In seiner berühmten Biografie findet Abraham Pais, es sei erstaunlich, dass Einstein nicht viel früher auf diesen Gedanken gestossen sei.

Nur langsam setzt sich die Quantentheorie im allgemeinen Physikbetrieb durch. Es vergehen beinahe zwanzig Jahre bis in Stockholm entschieden wird: *The Nobel Prize in Physics 1918 was awarded to Max Karl Ernst Ludwig Planck 'in recognition of the services he rendered to the advancement of Physics by his discovery of energy quanta.'* Die Quantisierung des Lichts wird aber weiterhin nicht als gesichert eingestuft, denn drei Jahre später erhält Einstein den Nobelpreis *für seine Verdienste um die Theoretische Physik und besonders für seine Entdeckung des Gesetzes des photoelektrischen Effekts* – nicht aber für die Entdeckung des Lichtquants, und schon gar nicht für die Relativitätstheorie, wie oft geglaubt wird.

Während Einstein sich in Japan auf einer Weltreise befindet, streiten die Schweiz und das Deutsche Reich darüber, wer die Ehrung stellvertretend entgegennehmen darf. Und im fernen Urbana führt Arthur Holly Compton interessante Experimente mit Röntgenstrahlung durch. Arnold Sommerfeld – auf seiner ersten Amerikareise – macht dort bei einem Treffen den Experimentator mit der Quantenphysik vertraut, analysiert die Daten und folgert daraus in einem Brief an Bohr: *Hiernach würde die Wellentheorie für Röntgenstrahlung fallen zu lassen sein.* Nun kippt die Waage zugunsten des Teilchenaspekts des Lichts. Compton hält 1923 in einer Publikation fest: *This remarkable agreement between experiment and theory indicates clearly that scattering is a quantum phenomenon and can be explained without introducing any new hypothesis as to the size of the electron or any new constants; also that a radiation quantum carries with it momentum as well as energy.* Bald setzt sich für das *radiation quantum* das Wort *Photon* durch. Die von seinem «Erfinder» G. N. Lewis – in einem anderen Umfeld! – angestrebte Ähnlichkeit von **Photon** mit **Elektron** und **Proton** lässt den Teilchenaspekt des Lichts dominieren und verdrängt den gleichberechtigten Wellenaspekt und damit auch die spezifisch quantenphysikalische Welle-Teilchen-Dualität.



Zurück zum Anfang der Quantenphysik! Er zeigt, dass manchmal genaue Messungen ganze Theorien – hier die klassische Thermodynamik – zum Einsturz bringen können: Zur Jahrtausendwende lässt sich Max Planck von seinen mit Wärmestrahlung experimentierenden Kollegen überzeugen, dass das Strahlungsgesetz von Wien (nicht zu verwechseln mit Wiens Verschiebungsgesetz) verbessert werden müsse. Es gibt die Messwerte für grosse Wellenlängen im IR nicht richtig wieder, wie das Bild zeigt. Planck gelingt es, wie er selbst sagte, eine *Krücke zu konstruieren*, eine *glücklich erratene Interpolationsformel*. In seiner berühmten Formel für die Strahlungsleistungsdichte J

verbindet er das Gesetz von Wien, das offenbar bei kurzen Wellenlängen gilt, mit einem Gesetz von Rayleigh, das für grosse Wellenlängen Übereinstimmung mit den Messwerten liefert:

$$J_S(\lambda, T)d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

In Plancks Gesetz taucht erstmals die «Hilfsgrösse h » auf, die später als «Planck'sches Wirkungsquantum» bezeichnet wird und die in der ganzen Quantenphysik eine Rolle spielt. Einstein bezeichnet sie im Gedanken-austausch mit Sommerfeld noch als «zweite universelle Konstante», neben der Lichtgeschwindigkeit c . Die Einzelheiten von Plancks Herleitung sind nur noch für Wissenschaftshistoriker von Bedeutung, denn sie

beruht auf der klassischen Boltzmann-Statistik, die bloss für klassische, unterscheidbare Objekte gilt. Heute ist klar, dass die Photonen ununterscheidbare Quantenobjekte sind, die der Bose-Einstein-Statistik, einer Quantenstatistik, gehorchen müssen. Die Verteilung der Strahlungsleistung auf die Wellenlängen als Funktion der Temperatur herzuleiten, bleibt Aufgabe der Hochschulphysik.

Plancks revolutionärer Gedanke, dass die hypothetischen Erzeuger der Strahlung Energie nur in Portionen, in Energiequanten hf abgeben und aufnehmen sollten, ist allgemein verständlich. Hier setzt im März 1905 der Artikel eines unbekanntenen Patentprüfers aus Bern an. In den Annalen der Physik denkt er *Über einen die Erzeugung und Verwandlung von Licht betreffenden heuristischen Gesichtspunkt* nach. Bei der Analyse der «Erzeugung und Verwandlung von Licht» erweise es sich als zweckmässig, die Lichtenergie selbst als gequantelt zu anzunehmen. Mit dieser Hypothese könne man heuristisch, also mit begrenztem Wissen, zur Erklärung einer ganzen Gruppe von Erscheinungen kommen, nicht nur zu einer besseren Begründung für Plancks Gesetz der Wärmestrahlung. Im Zentrum dieser Gruppe steht nicht der äussere lichtelektrische Effekt, das Herausschlagen von Elektronen durch Einwirkung von Licht, das heute in den Schulen als Ausgangsexperiment dient. Ebenso wichtig ist für Albert Einstein das Gesetz der Fluoreszenz: Dass Fluoreszenzlicht immer eine grössere Wellenlänge hat als das einfallende Licht, ergibt sich daraus, dass die einfallenden Quanten im Kristall Energie verlieren und die Fluoreszenz-Lichtquanten energieärmer sind.

Dieser Artikel ist der einzige, den Einstein selbst als «revolutionär» einstuft. Mit gutem Grund: Als ETH-Physiker weiss er, dass Licht eine elektromagnetische Welle ist. Nun behauptet er, das sei nur die halbe Wahrheit. Licht sei auch körnig: *Es scheint mir nun in der Tat, dass die (...) Erscheinungsgruppen besser verständlich erscheinen unter der Annahme, dass die Energie des Lichtes diskontinuierlich im Raume verteilt sei.* Angesichts des offensichtlichen Paradoxons, dass etwas sowohl wellenartig ausgebreitet als auch teilchenartig lokalisiert sein soll, bleibt er vorsichtig und verwendet Formulierungen wie: *Es scheint mir ... Unter der Annahme ... Nach der Auffassung ...*

Im Verlaufe der nächsten Berner Jahre beschäftigt Einstein sich weiter mit diesem paradoxen Sachverhalt, der damals noch nicht «Welle-Teilchen-Dualität» heisst. Der Wellenaspekt der Strahlung ist unumstritten. Es muss also darum gehen, die experimentelle Basis für den Teilchenaspekt auf eine solidere Grundlage zu stellen. In diesem Zusammenhang erfindet er ein «Maschinchen» zur Messung kleinster Ladungen, das er patentieren lässt. Es erfüllt aber weder prinzipielle noch finanzielle Hoffnungen. Gleichzeitig erhält Einstein von der Universität Bern 1908 die Lehrerlaubnis, nicht aufgrund seiner verschiedenen Publikationen, sondern erst, nachdem er eine separate Schrift eingereicht hat. Ihr Titel lautet: *Folgerungen aus dem Energieverteilungsgesetz der Strahlung schwarzer Körper, die Konstitution der Strahlung betreffend.* Die handgeschriebene Habilitationsarbeit ist verschollen! Man kann aber vermuten, dass es bei der «Konstitution» um die Welle-Teilchen-Dualität geht, die Einstein ein Jahr später beim grossen Auftritt in Salzburg publik macht. Ähnlich wie bei seinen Arbeiten zur Brown'schen Bewegung findet er auf der Basis der Thermodynamik mit einem Gedankenexperiment ein neues Argument für die Gleichberechtigung von Wellen- und Teilchenaspekt. Er vergleicht die Schwankungen des Strahlungsdrucks auf ein Spiegelchen der Fläche A , das nur eine bestimmte Frequenz f reflektiert und für alle übrigen Frequenzen durchlässig ist, mit den Schwankungen des Gasdrucks. Im Feld mit der mittleren Strahlungsdichte ρ findet er für das mittlere Schwankungsquadrat der Energiedichte $\overline{\Delta^2}$ einen Ausdruck mit zwei gleichberechtigten Summanden:

$$\overline{\Delta^2} = \frac{1}{c} \left[h\rho f + \frac{c^3 \rho^2}{8\pi f^2} \right] df A \tau$$

Im gedruckten Kommentar in der Physikalischen Zeitschrift schreibt Einstein: *Wieder müsste sich nach der jetzigen Theorie der Ausdruck auf das zweite Glied reduzieren (Schwankungen durch Interferenz).* Anders gesagt: Die klassische Physik beschreibt nur den reinen Wellenaspekt des Lichts. Der Teilchenaspekt steckt im ersten Summanden mit dem Faktor h , der für die neue Quantenphysik charakteristisch ist: *Wäre das erste Glied alleine vorhanden, so liessen sich die Schwankungen (...) vollständig erklären durch die Annahme, dass die Strahlung aus voneinander unabhängig beweglichen, wenig ausgedehnten Komplexen von der Energie hf bestehe.*

Die beiden Summanden sind mathematisch gleichberechtigt durch ein +-Zeichen verbunden, was Einstein in Salzburg am Schluss seiner Ausführungen zu einer vorsichtigen, aber bemerkenswerten Formulierung veranlasst: *Ich wollte durch dasselbe [Bild mit singulären Punkten, die von einem Kraftfeld umgeben sind] nur kurz veranschaulichen, dass die beiden Struktureigenschaften (Undulationsstruktur und Quantenstruktur), (...) nicht als miteinander unvereinbar anzusehen sind [Hervorhebung HPD].*



Einstein darf am 1. Solvay Kongress, an dem auch Planck und Sommerfeld teilnehmen, das Schlussreferat halten. Hinsichtlich der Dualität bleibt er vorsichtig: *Ich bestehe auf dem provisorischen Charakter dieses Konzepts [von anscheinend teilchenartigen Lichtquanten], das mit den experimentell nachgewiesenen Konsequenzen der*

Wellentheorie nicht verträglich ist.

Erst mehrere Jahrzehnte später ist die Zeit reif für die Synthese in der Quantenelektrodynamik (QED). Sie fasst die bloss qualitative Welle-Teilchen-Dualität der elektromagnetischen Strahlung quantitativ in einer neuartigen Weise mathematisch genau. An der Entwicklung der QED arbeitet eine ganze Gruppe von Physikern. Sie führt zu einem Strauss von Nobelpreisen und öffnet ein weites Feld für die Theoretische und die Experimentalphysik.

Einstein erlebt diese Entwicklung nur noch am Rand. 1955 schreibt er Besso, seinem Freund aus der glücklichen Berner Zeit: *Die ganzen fünfzig Jahre bewusster Grübeleien haben mich der Antwort der Frage ‚Was sind Lichtquanten?‘ nicht nähergebracht. Heute glaubt zwar jeder Lump, er wisse es, aber er täuscht sich.* – Die philosophische Frage nach dem Wesen der Dualität des Lichts bleibt offen. Sie ist auch für Lernende spannend, die sich weniger für mathematisierende Physik begeistern können. Und bestimmt bleibt gültig, was Arnold Sommerfeld im Vorwort einer der vielen Auflagen seines Buchs «Atombau und Spektrallinien» schreibt:

Unter allen erstaunlichen Entdeckungen unseres Jahrhunderts ist sie [die Welle-Teilchen-Dualität aller Quantenobjekte] die erstaunlichste. (A. Sommerfeld, 1930)

Martin Lieberherr
MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

Doppelter schiefer Wurf

1 Einleitung

Was passiert, wenn der schiefe Wurf eines Balls mit der schief gehaltenen Kamera videographiert wird?

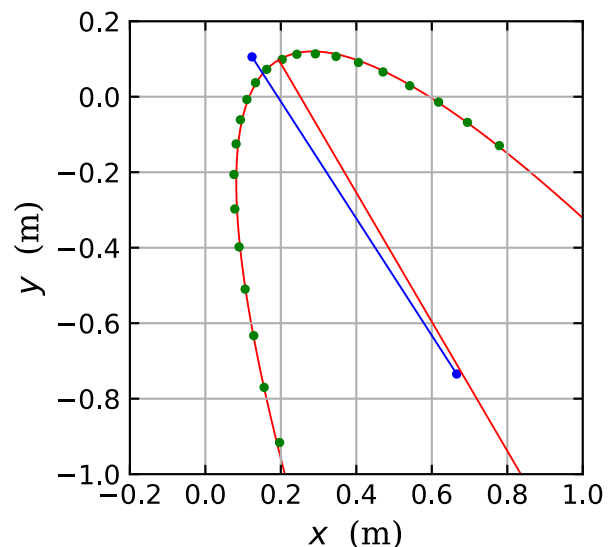
Nachdem mir während einer Phase seniler Bettflucht diese Aufgabe und eine einfache Lösung dazu eingefallen waren, musste ich das natürlich am nächsten Tag gleich ausprobieren. Man kann schliesslich immer Ideen für Unterrichtsprojekte brauchen. Wie so oft hat sich dann die Auswertung als tricky erwiesen.

2 Experiment

Ein 1.00 m langer Massstab wurde vertikal an die Wandtafel gehängt (als Kontrolle). Die Kamera, mein Samsung Galaxy A53 Mobiltelefon, montierte ich schräg davor auf ein Stativ. Die Bildebene wurde von Auge parallel zur Wandtafel orientiert. Der Abstand zur Wandtafel betrug ca. zwei Meter. Die Bildrate belies ich bei den üblichen 30 frames per second.

Nachdem mein Kollege Daniel Keller die Videoaufnahme gestartet hatte, warf ich einen Tennisball vor der Wandtafel auf eine parabolische Bahn. Das Video wurde anschliessend mit Tracker¹ analysiert und die Koordinaten in Python importiert, wo ich Ausgleichsrechnungen durchführen konnte. Mit der Länge des aufgehängten Massstabs wurde die Längeneinheit der Bildkoordinaten kalibriert. Abbildung 1 zeigt das Resultat.

Abbildung 1: Getrackte Positionen eines schiefen Wurfs (grüne Punkte in 33 ms Abständen) mit einer parabolischen Ausgleichsfunktion (rote Linie). Die blaue Linie mit den runden Endmarken stellt einen vertikalen Massstab von 100 cm Länge dar. Aus der Fitfunktion wurde der Scheitel der Parabel sowie deren Symmetrieachse bestimmt. Die berechnete Symmetrieachse ist als rote Gerade durch den Scheitel eingezeichnet.



3 Theorie

Wird die Kamera schief gehalten, so bekommt die Fallbeschleunigung x - und y -Komponenten in den Bildkoordinaten. Die Bewegung ist somit eine gleichmässig beschleunigte Bewegung in x - und y -Richtung.

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$v_x = v_{x0} + a_x t$$

$$g = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$v_y = v_{y0} + a_y t$$

$$\vec{g} = (a_x, a_y)^T$$

Die Anpassung zweier quadratischer Funktionen an die $x_i(t_i)$ - und $y_i(t_i)$ -Datensätze ist eine Standardaufgabe, die sogar ExcelTM beherrscht, wenn nicht gerade die verarmte Webversion verwendet wird.

In Abbildung 1 ist so eine Ausgleichsparabel als rote Kurve eingezeichnet. Am Scheitel bewegt sich der Ball senkrecht zum Beschleunigungsvektor. Damit folgt für den Zeitpunkt des Scheiteldurchgangs:

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = a_x v_x + a_y v_y = 0 \rightarrow a_x \cdot (v_{x0} + a_x t) + a_y \cdot (v_{y0} + a_y t) = 0 \Rightarrow t = -\frac{a_x v_{x0} + a_y v_{y0}}{a_x^2 + a_y^2}$$

Die Richtung des Beschleunigungsvektors ist nur ungefähr parallel zum vertikalen Massstab. Aus den zwei Beschleunigungskomponenten folgt ein Betrag von $g = 11.0 \text{ m/s}^2$, was eindeutig zu hoch ist.

4 Diskussion

Der falsche Wert der Fallbeschleunigung lässt sich zumindest grob erklären: Die Wurfparabel lag geschätzte 20 cm vor der Wandtafel mit dem Massstab. Dies ist ca. 10 % des Abstands Kamera-Wandtafel. Somit erscheinen die Bildkoordinaten und damit die Beschleunigung ebenfalls etwa 10 % zu gross.

Die Ausgleichsrechnung mit einer impliziten Kegelschnittgleichung gestattet einen unabhängigen Test:

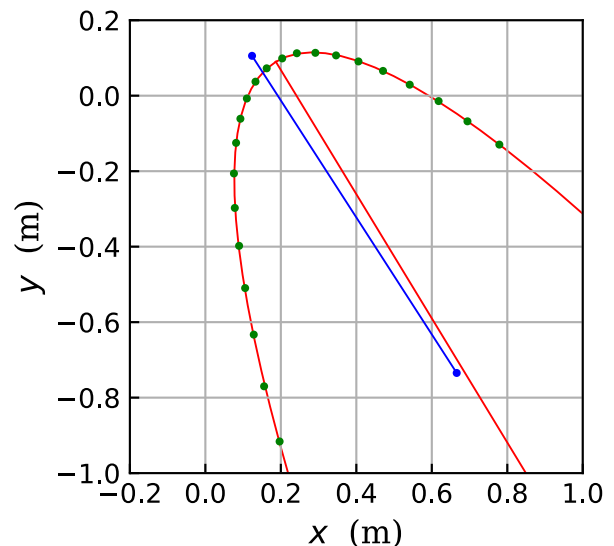
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Für die Rechnung habe ich $F = -1$ gesetzt. Das quadratische Polynom beschreibt eine Ellipse, falls die Diskriminante $B^2 - 4AC$ negativ ist, eine Parabel, falls sie verschwindet und eine Hyperbel, falls sie positiv ist. Spezialfälle sind hier nicht relevant. Die Ausgleichsrechnung ergab als besten Fit eine sehr lang gestreckte Ellipse ($a = 15.1 \text{ m}$, $b = 1.54 \text{ m}$). Ich erachte das als numerischen Zufall, denn die Diskriminante war sehr nahe bei Null. Trotzdem habe ich diese Ausgleichsellipse und ihre grosse Halbachse in Abbildung 2 eingezeichnet.

Abbildung 2: Getrackter schiefer Wurf (grüne Punkte, wie in Abb. 1) mit einer Ausgleichsellipse. Die Richtung der grossen Halbachse (rote Gerade) ist auch hier nicht parallel zum vertikalen Massstab (blaue Linie mit Marken). Die Ellipse passt etwas besser an die Ortsdaten als die Parabel.

Die zentrale Projektion eines Kegelschnitts auf eine nicht parallele Ebene ergibt wieder einen Kegelschnitt, allerdings nicht unbedingt denselben. Der Blick auf einen Doppelkegel, der von Ebenen geschnitten wird, um einen Kegelschnitt zu erzeugen, zeigt das sofort. Die Brennpunkte des projizierten Kegelschnitts sind in der Regel verschieden von den Bildern der Brennpunkte des Urbilds. Es ist zu erwarten, dass die Projektion einer Parabel eine Ellipse oder Hyperbel wird, denn es ist unwahrscheinlich, dass die Parabelebene exakt parallel zur Bildebene ist. Es wäre auch Zufall, wenn die Symmetrieachse des Fits parallel zur Vertikalen ist.

Vor einem analogen Problem stehen die Astronomen, wenn sie extrasolare Bahnen beobachten: Durch die Projektion auf die Himmelssphäre geht die Tiefeninformation verloren. Ohne zusätzliche Angaben ist es nicht mehr möglich, die Neigung der Bahn zu bestimmen.



¹ <https://physlets.org/tracker> (12. September 2024)

Hans Kammer, Vance Carter und Oliver Gallus

WKS Bern, hanskammer@bluewin.ch

EducaTec-Systems GmbH, vance.carter@educatec-systems.ch, oliver.gallus@educatec-systems.ch

Vernier Video Analysis

Mit der Software *Video Analysis* der Firma Vernier können vorgefertigte Unterrichts-Videos oder eigene Handy-Videos in gängigen Formaten (.mp4, .mov, .heif) analysiert und detailliert ausgewertet werden. Es werden drei einfache Unterrichtsbeispiele, die Analyse eines schiefen Wurfs, einer gleichförmigen Kreisbewegung und eines harmonischen Oszillators, vorgestellt. *Video Analysis* ist ein Lehrmittel, das es Lehrkräften, aber auch Schülerinnen und Schülern ermöglicht, praktische Erfahrung bei der Auswertung fremder oder eigener physikalischer Daten zu sammeln. *Video Analysis* erweitert den praktisch orientierten Physikunterricht um ein effektives, modernes und kostengünstiges Lehrmittel, das den Studierenden ein Experimentieren ohne Experimentiermaterial in der Schule, aber auch zu Hause, erlaubt.

1. Video Analysis, ein Lehrmittel für den praktischen Physikunterricht

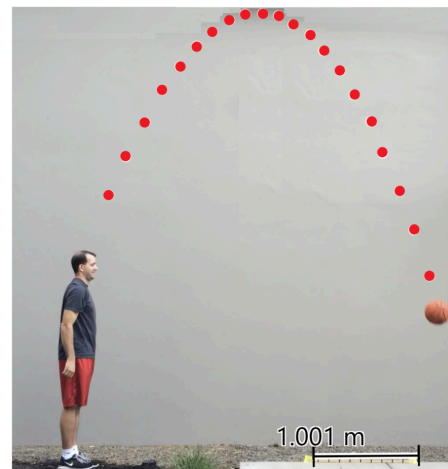
Video Analysis ist ein Software-Tool der Firma Vernier zur Analyse von Bewegungen physikalischer Objekte in digitalen Videos. So kann z.B. der Wurf eines Balls im Sportunterricht oder der Sprung von einer Kraftmessplatte, aber auch eines Astronauten auf dem Mond in einem historischen Film quantitativ analysiert werden. Denkbar sind auch Videos zur geometrischen Optik im Zusammenhang mit dem Brechungsgesetz oder mit Linsen und Prismen.

2. Drei Unterrichtsbeispiele: Schiefer Wurf, gleichförmige Kreisbewegung und harmonischer Oszillator

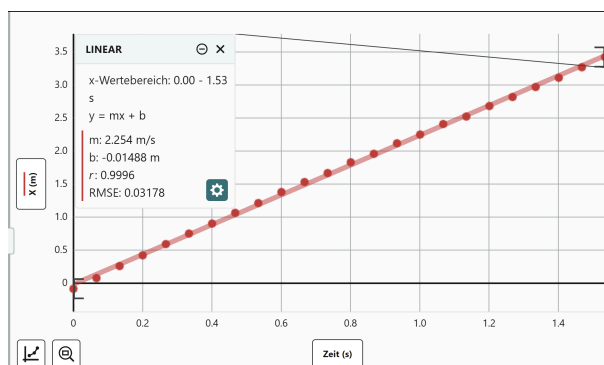
In einem Experimentier-Video, das typischerweise aus ca. 100 Einzel-«Frames» (Bildern) besteht, wird zuerst ein fester Massstab in Metern festgelegt (Figur 1, unten).

Anschliessend wird ein bestimmter Punkt des bewegten Gegenstands, z.B. im Zentrum oder oben am geworfenen Ball, in gleichen zeitlichen Abständen wahlweise mit einer veränderlichen, kreisrunden Visierfläche oder einem präzisen Fadenkreuz markiert (Figur 1).

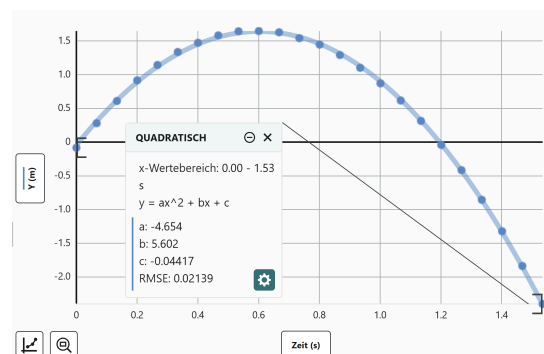
Die zeitlichen Abstände zwischen zwei Messpunkter können im Bereich von 1 bis 50 «Frames» frei gewählt werden. Die Daten werden als Graph und als Tabelle in einem zweiten Fenster aufgezeichnet und können dort analysiert werden (Figuren 2, 3 und 4).



Figur 1: Wurf mit Massstab (unten)
Punktabstand: 2 «Frames»



Figur 2: x-t-Graph



Figur 3: y-x-Graph

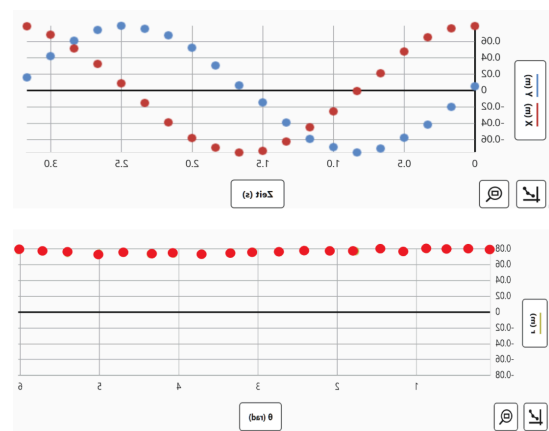
	Datensatz 1							
	Zeit (s)	X (m)	Y (m)	X Geschwin... (m/s)	Y Geschwin... (m/s)	X Akzelerat... (m/s ²)	Y Akzelerat... (m/s ²)	
1	0.00	-0.084	-0.083	2.50	5.29	0.55	-4.70	
2	0.07	0.078	0.281	2.56	5.03	0.16	-5.98	
3	0.13	0.260	0.610	2.55	4.63	-0.35	-7.97	
4	0.20	0.423	0.917	2.50	3.97	-0.70	-9.95	
5	0.27	0.593	1.144	2.45	3.20	-0.86	-10.56	
6	0.33	0.752	1.337	2.36	2.50	-0.66	-10.17	
7	0.40	0.904	1.474	2.35	1.85	-0.30	-9.80	
8	0.47	1.066	1.583	2.34	1.23	-0.17	-9.90	
9	0.53	1.214	1.644	2.34	0.52	-0.26	-9.92	

Figur 4: Datentabelle (Ausschnitt aus total 24 Messpunkten).

Die Figuren 5 und 6 zeigen die Analyse einer gleichförmigen Kreisbewegung einer Markierung (roter Kreis) auf dem Plattenteller eines klassischen LP-Plattenspielers.



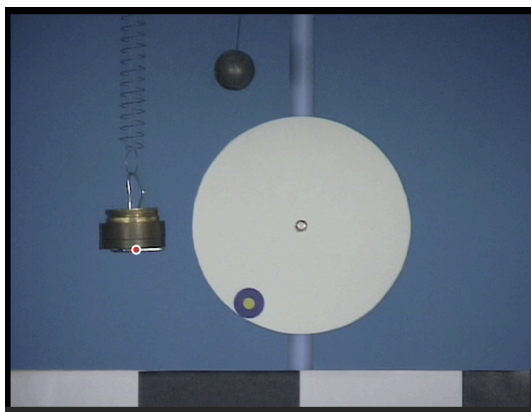
Figur 5: Kreisbewegung auf einem LP-Plattenspieler



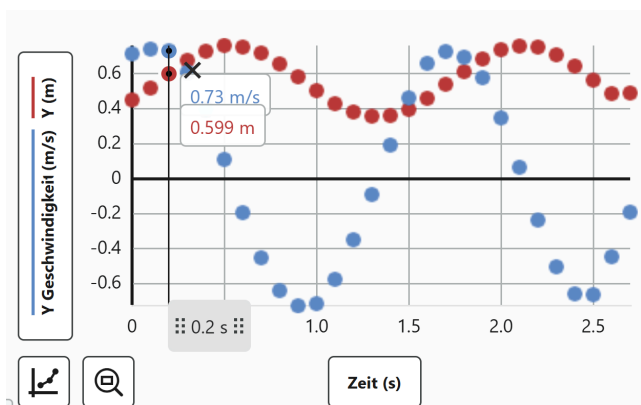
Figur 6 oben: kartesische Koordinaten
unten: Polarkoordinaten

Figur 6 zeigt oben die gleichförmige Kreisbewegung dargestellt in kartesischen Koordinaten $x(t)$ und $y(t)$, unten in Polarkoordinaten $r(\theta)$. r in Meter, θ im Bogenmass (rad).

Figur 7 ist ein Ausschnitt eines Experimentier-Videos zur Untersuchung von Schwingungen eines Federpendels (links), eines Fadenpendels (oben) und der gleichförmigen Kreisbewegung einer Markierung auf einer Kreisscheibe. Die zugehörigen Weg-Zeit- und Geschwindigkeit-Zeit-Diagramme der Oszillation des Federpendels sind in Figur 8 dargestellt.



Figur 7: Video zum harmonischen Oszillator Federpendel (links), Fadenpendel (oben) und Kreisbewegung (Mitte)



Figur 8: Weg-Zeit- und Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm

3. Die Bedeutung von Experimentier-Videos für den Physikunterricht

Weil die Physik seit Galilei eine experimentelle Wissenschaft ist, haben Experimente im Physikunterricht bis heute eine grosse Bedeutung.

Die Auswertung von Videodaten eines physikalischen Prozesses, etwa des Wurfs eines Balls, mit Video Analysis kommt einem realen Experiment viel näher als ein reines Lehrvideo zum schiefen Wurf. Video Analysis ist eine empfehlenswerte Alternative zu einem Experiment, wenn das Geld für Apparaturen oder die Zeit zur Durchführung des Experiments fehlen.

Video Analysis ermöglicht es den Lernenden, sich intensiv und vertieft mit der Datenanalyse und -interpretation eines Experiments auseinanderzusetzen. Video Analysis allein kann aber den handwerklichen Teil der praktischen Durchführung eines Experiments natürlich nicht ersetzen.

4. Unterrichtsmaterial (Texte und Videos)

Für den Unterricht stehen viele Lernvideos von Vernier zur Verfügung. Lehrkräfte oder Schülerinnen und Schüler können aber auch ihre eigenen Videos, z.B. vom Smartphone, hochladen und analysieren.

Vernier stellt in mehreren Publikationen ([1], [2], [3]) «Activities» aus den Bereichen der Mechanik, Wellenlehre, Akustik, Wärmelehre, Elektrizitätslehre und Magnetismus zur Verfügung. Diese beinhalten neben Unterrichts-Hilfsmitteln für Lehrkräfte und Studierende insbesondere auch Videos, die direkt ausgewertet werden können (wie die drei Beispiele in Abschnitt 2.).

5. Zusammenfassung

Mit ihrem Smartphone oder Tablet können Studierende ihre eigenen Videos physikalischer Abläufe in die Vernier Video Analysis™-App hochladen, auswerten und analysieren. Sie markieren einen bestimmten Punkt auf einem bewegten Gegenstand und verfolgen die Bewegung dieses Punkts in Funktion der Zeit. Die Zeitschritte sind dabei, durch die Anzahl Einzelbilder (Frames) des Videos zwischen zwei aufeinanderfolgenden Positionen des gewählten Punkts, gegeben. Diese Zeitschritte können zwischen 1 und 50 Frames frei gewählt werden. Video Analysis erzeugt dann genaue und umfangreiche Grafiken sowie Datentabellen, die die aufgezeichneten Bewegungen wiedergeben.

- Die Vernier Video Analysis® App läuft auf unterschiedlichen Geräten und Plattformen: macOS®, iPadOS™, iOS, Windows® 10/11, Chrome OS™ und Android™
- Die Studierenden können eigene, von der Lehrkraft erstellte oder von Vernier gelieferte Videos einsetzen.
- Die Video Analysis-App ergänzt Unterrichts- und Praxisexperimente. Die Videoanalyse ermöglicht Untersuchungen, die mit Sensoren schwierig zu realisieren sind, etwa die Verfolgung eines Basketballs im Flug.
- Die Analyse ist schnell und einfach zu wiederholen. Die Studierenden können die gesammelten Daten sofort analysieren und kritisch hinterfragen.

6. Literatur

[1] Physics with Video Analysis, Vernier, ISBN 978-1-929075-11-9, 2009, 33 Activities

[2] Vernier Video Analysis: Conservation Laws and Forces, ISBN 978-1-948008-46-4, 2022, 12 Activities

[3] Vernier Video Analysis: Motion and Sports, ISBN 978-1-948008-44-0, 2021, 12 Activities

[4] Vernier Video Analysis, User Manual 2023, Version 2.11, März 2023



Fasziniert von den Sternen?

Die Urania-Sternwarte gehört seit über 100 Jahren zum kulturellen Leben von Zürich. Als Volkssternwarte spricht sie eine breite Bevölkerung an und stösst auf grosses Interesse. Mit dem Teleskop können Himmelsobjekte beobachtet werden und Fachleute erklären mit Computersimulationen das Universum. Die Sternwarte bietet öffentliche Führungen, Schul- und Privatführungen sowie Spezialführungen an.

Zur Ergänzung unseres Teams suchen wir weitere Demonstrator*innen

- Haben Sie solide Grundkenntnisse in der Astronomie und Interesse an aktuellen Entwicklungen?
- Verfügen Sie über didaktisches Flair, Sicherheit und Freude im Umgang mit verschiedenen Besuchergruppen?
- Trauen Sie sich nach einer Einführung den sachgemässen Umgang mit dem historischen Teleskop und den technischen Einrichtungen zu?
- Sind Sie bereit regelmässig öffentliche und private Führungen zu übernehmen?

Engagierte Interessent*innen erhalten eine fundierte Einführung in den Betrieb der Sternwarte.

Wenn Sie die Besucher*innen der Urania-Sternwarte durch Ihre Wissensvermittlung für das Universum begeistern wollen, dann nehmen Sie mit uns via Email an kirsten.meier@urania-sternwarte.ch Kontakt auf.

Thomas Genoud
Collège du Sud, Bulle, thomas.genoud@studentfr.ch

Inégalités de Bell : De La Théorie à l'Expérience

Présentation du Travail de Maturité de Thomas Genoud

Introduction

Malgré ses succès technologiques, la mécanique quantique soulève des interrogations fondamentales sur la nature de la réalité. En particulier, son caractère intrinsèquement probabiliste et l'apparente non-localité de certains phénomènes ont longtemps défié les intuitions héritées du réalisme classique.

Albert Einstein, avec Podolsky et Rosen, soulignait en 1935 cette tension dans le paradoxe EPR, plaidant pour l'existence de variables cachées permettant de rétablir une vision déterministe et locale. À l'opposé, l'interprétation de Copenhague défendait l'idée que la fonction d'onde contient toute l'information physique, et qu'aucune réalité physique n'existe indépendamment de l'acte de mesure.

Ce débat est longtemps resté d'ordre philosophique, jusqu'à ce que John S. Bell montra que toute théorie à variables cachées locales devait obéir à une inégalité vérifiable expérimentalement, dont la mécanique quantique prédit la violation dans certains cas intriqués.

Nous présentons ici une expérience visant à tester ces inégalités. Après avoir exposé le cadre théorique, nous décrivons notre dispositif expérimental, présentons nos résultats et discutons leurs implications sur la localité et le réalisme.

Fondements théoriques

État quantique d'un photon

En mécanique quantique, l'état d'un photon est représenté par un vecteur appartenant à un espace de Hilbert sur les complexes. Ce vecteur peut être décomposé sur une base d'états propres associés à une observable donnée, elle-même modélisée par un opérateur autoadjoint.

Dans notre cas, nous nous intéressons à la polarisation du photon. Elle peut être décrite dans les bases $\{|H\rangle, |V\rangle\}$, correspondant respectivement aux états de polarisation horizontale et verticale.

L'état général d'un photon polarisé peut alors s'écrire sous la forme :

$$|\Psi\rangle = \alpha|H\rangle + \beta|V\rangle \quad \text{avec} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Ce formalisme illustre le principe de superposition. Avant toute mesure, le photon n'a pas de polarisation définie, mais se trouve dans une combinaison cohérente des deux états possibles. La probabilité d'obtenir un résultat donné correspond au carré du module du coefficient associé.

États à deux photons et intrication

Lorsqu'on considère un système constitué de deux photons, l'espace d'état global est donné par le produit tensoriel des espaces de Hilbert individuels. Et la base canonique de ce nouvel espace est formée par les états $|HH\rangle, |HV\rangle, |VH\rangle, |VV\rangle$, où la première lettre correspond à la polarisation du premier photon et la seconde à

celle du second. Certains états de ce système ne peuvent pas être écrits comme un produit de deux états individuels : ce sont les états intriqués. Un exemple typique d'état intriqué est l'état EPR :

$$|\Psi_{\text{EPR}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|HH\rangle + |VV\rangle) .$$

Dans un tel état, chaque photon pris isolément semble non polarisé, mais des corrélations fortes apparaissent lorsque des mesures sont réalisées conjointement. Ce sont précisément ces corrélations, incompatibles avec toute théorie locale à variables cachées, que les inégalités de Bell permettent de tester expérimentalement.

Inégalités de Bell

Le théorème de Bell montre que les corrélations observées entre deux systèmes intriqués sont soumises à des contraintes spécifiques si l'on suppose que la nature obéit à une description locale et déterministe. Ces contraintes prennent la forme d'une inégalité statistique, dont la violation, prédite par la mécanique quantique, signifie qu'il est impossible de reproduire les résultats expérimentaux tout en conservant à la fois réalisme et localité.

Cette inégalité fait intervenir un paramètre observable S , construit à partir des fonctions de corrélation $E(a, b)$, qui quantifient la dépendance statistique entre les résultats de mesures effectuées avec différentes orientations a, a', b, b' des polariseurs :

$$S(a, a', b, b') = |E(a, b) - E(a, b')| + |E(a', b) + E(a', b')| .$$

Dans notre cas, ces corrélations sont évaluées à partir des coïncidences de détection. Nous enregistrons les événements où deux photons intriqués sont détectés simultanément après avoir traversé chacun un polariseur orienté selon un angle donné. La fonction $E(a, b)$ correspond alors à l'espérance du produit des résultats binaires (+1 ou -1) issus de ces détections conjointes.

Dans une théorie à variables cachées locales, chaque photon est associé à un paramètre λ contenant toute l'information déterminant le résultat des mesures. Les fonctions $A(a, \lambda)$ et $B(b, \lambda)$, prenant les valeurs ± 1 , modélisent les résultats aux détecteurs en fonction de ce paramètre λ et de leur orientation a ou b . En intégrant sur toutes les valeurs possibles de λ , pondérées par une densité de probabilité $\rho(\lambda)$, on obtient la fonction de corrélation classique

$$E(a, b) = \int A(a, \lambda)B(b, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda .$$

Sous ces hypothèses, la quantité S est toujours bornée par

$$S \leq 2 .$$

En revanche, dans le cadre quantique, où les résultats ne sont pas prédéterminés, la corrélation prédite pour l'état $|\Psi_{\text{EPR}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|HH\rangle + |VV\rangle)$ est donnée par

$$E_{QM}(a, b) = \cos[2(a - b)] ,$$

ce qui permet d'atteindre une valeur maximale de :

$$S \leq 2\sqrt{2} .$$

Une mesure expérimentale donnant $S > 2$ exclut donc toute théorie fondée sur des variables cachées locales. Elle ne valide pas pour autant de manière exclusive la mécanique quantique, mais indique qu'au moins l'un des postulats de réalisme ou de localité doit être abandonné.

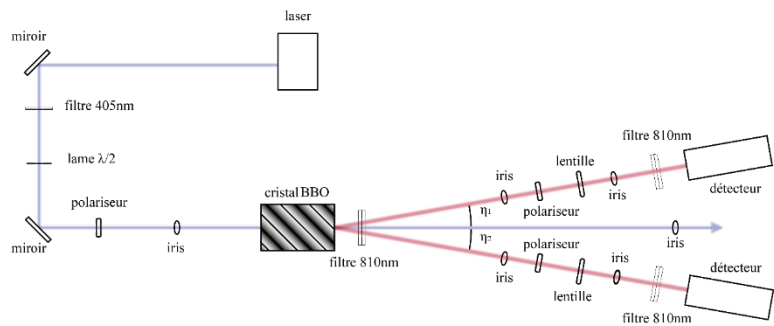
Dispositif Expérimental et Méthodologie

Configuration de l'expérience

Le montage expérimental repose sur un schéma optique standard pour la génération de photons intriqués par conversion paramétrique descendante spontanée (SPDC). Un laser de longueur d'onde 405 nm est d'abord filtré pour supprimer toute lumière parasite, puis traverse une lame demi-onde ($\lambda/2$), qui permet de faire basculer la polarisation linéaire du faisceau dans une direction diagonale, à 45° par rapport à l'axe horizontal. Cette orientation est ensuite contrôlée par un polariseur avant l'entrée dans un cristal non linéaire de β -borate de baryum (BBO).

Au sein du cristal, le processus de SPDC type I produit des paires de photons intriqués dans un état de type EPR, chacun émis dans des directions opposées. Un filtre centré à 810 nm, placé à la sortie, permet de sélectionner les photons convertis en éliminant ceux issus du rayonnement résiduel du laser.

Chaque photon issu de la paire est dirigé vers un bras optique muni d'un polariseur réglable, permettant de définir précisément l'angle de mesure de polarisation. Les photons sont ensuite détectés par des photodiodes capables de détecter des photons uniques grâce au principe d'avalanche dans des semi-conducteurs. Les signaux générés sont ensuite traités pour enregistrer uniquement les coïncidences de détection, indispensables au calcul des corrélations.



Méthodologie de mesure

Pour chaque configuration d'angles α et β des polariseurs, le dispositif enregistre le nombre de coïncidences de détection entre les deux photodiodes durant une période fixe de 20 secondes. Les angles sont ajustés manuellement à l'aide de montures rotatives, puis stabilisés pendant la durée de comptage.

Ces coïncidences correspondent aux événements où deux photons issus d'une même paire sont détectés simultanément, après avoir traversé les polariseurs orientés respectivement selon les angles α et β . Le comptage est ensuite répété pour différentes paires d'orientations (a, b) , (a, b') , (a', b) , (a', b') , afin de permettre le calcul des fonctions de corrélation $E(a, b)$, à partir desquelles la valeur de S est déterminée. Les fonctions de corrélation sont ensuite évaluées selon la relation

$$E(a, b) = \frac{N_{\parallel} - N_{\perp}}{N_{\parallel} + N_{\perp}},$$

où N_{\parallel} correspond aux coïncidences interprétées comme corrélées, et N_{\perp} à celles interprétées comme anticorrélées, en fonction des orientations choisies des polariseurs.

Analyse des Résultats et Discussion

Comparaison des modèles

La figure ci-contre présente les taux de coïncidences mesurés pour $\alpha = 60^\circ$, en fonction de l'angle β , comparés aux prédictions de quatre modèles théoriques, chacun fondé sur une hypothèse différente concernant la polarisation des photons :

QM (mécanique quantique) : prédictions issues d'un état intriqué, non réductible à une description locale ;

Two photons : modèle à variables cachées avec distribution uniforme de la polarisation $\lambda \in [0, \pi]$. Il postule que chaque photon a une polarisation bien définie, mais inconnue ;

50/50 : mélange de paires polarisées horizontalement ($\lambda = 0$), soit verticalement ($\lambda = \pi/2$) ;

All or Nothing (AN) : scénario artificiel où un photon est détecté uniquement si sa polarisation est proche de celle du polariseur.

Visuellement, seul le modèle quantique reproduit fidèlement la structure des données expérimentales. Pour appuyer cette observation, nous avons effectué un test du χ^2 , qui mesure l'écart entre les données et les prédictions de chaque modèle. Pour la série de mesures avec $\alpha = 60^\circ$, nous obtenons

$$\chi_{QM}^2 = 0.071 \quad \chi_{2Ph}^2 = 0.636 \quad \chi_{50/50}^2 = 1.412 \quad \chi_{AN}^2 = 0.190 .$$

Le modèle quantique présente la plus faible divergence statistique. Bien que le modèle AN affiche un χ^2 relativement bas, il n'a aucune base physique réaliste. Ces résultats confirment que, parmi les modèles testés, la mécanique quantique décrit le plus fidèlement les phénomènes observés.

Violation de l'inégalité de Bell

À partir des séries de mesures correspondantes, les fonctions de corrélation $E(a, b)$ ont été calculées selon la méthode décrite dans la section Méthodologie de mesure, puis combinées suivant la formule donnée dans la section Inégalités de Bell. La valeur obtenue est

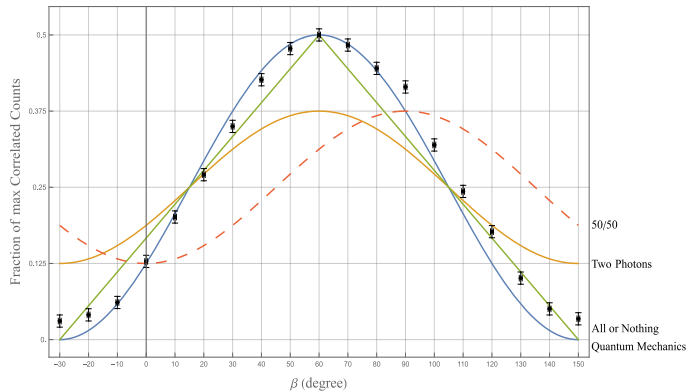
$$S \approx 2.56 \pm 0.12 .$$

Cette valeur dépasse clairement la limite de $S \leq 2$ imposée par les théories locales à variables cachées, confirmant une violation significative des inégalités de Bell.

Signification statistique

Pour estimer la probabilité qu'un tel écart résulte d'une fluctuation aléatoire dans un cadre classique, nous avons appliqué la borne décrite dans *Random numbers certified by Bell's theorem* (Pironio et al., 2010). Cette approche repose sur l'idée de quantifier, à partir d'un ensemble de n essais indépendants, la probabilité d'obtenir une valeur moyenne empirique \hat{I} supérieure au seuil classique fixé (ici, 2) :

$$P(\hat{I} \geq 2 + \delta) \leq \exp\left(-\frac{n(\hat{I}-2)^2}{72}\right) .$$



Malte Uthoff, Eric Schertenleib
 Pro IYPT-CH, malte.uthoff@sypt.ch, eric.schertenleib@sypt.ch

International Young Physicists' Tournament 2026 in der Schweiz

Nach über 20 Jahren wird das **International Young Physicists' Tournament** (IYPT) 2026 wieder in der Schweiz ausgetragen – dieses Mal an der ETH Zürich. Vom 5. bis 12. Juli 2026 werden sich Teams aus rund 40 Ländern von allen Kontinenten treffen, um den alljährlichen Titel der «Physik-Weltmeisterschaft» unter sich auszumachen.

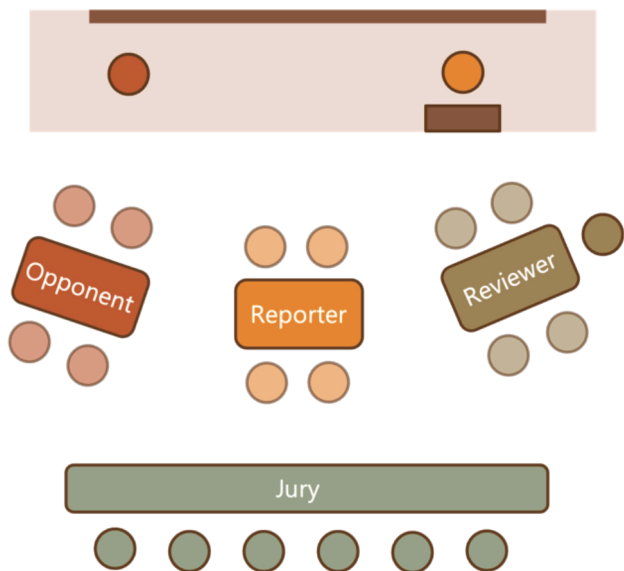
Da sich das projektbasierte Format des IYPT hervorragend für moderne Unterrichtsformen eignet, wird während der Turnierwoche auch eine Weiterbildung organisiert, bei der interessierte Lehrpersonen den Wettbewerb live miterleben können.

Im Zuge des IYPT erweitern wir das jährlich in der Schweiz stattfindende **Swiss Young Physicists' Tournament** (SYPT) um neue Coaching-Angebote. Zusätzlich zur bestehenden Vorbereitungswoche, der **SYPT Physics Week**, laden wir interessierte Schülerinnen und Schüler sowie deren Lehrpersonen zu einem Einführungsseminar zu Beginn des nächsten Schuljahres ein.

Die Voranmeldung für am SYPT 2026 interessierte SchülerInnen und Lehrpersonen sowie genauere Informationen stehen auf www.sypt.ch zur Verfügung.

Was ist das IYPT?

Das IYPT ist ein projektorientierter interaktiver Teamwettbewerb für physikbegeisterte Schülerinnen und Schüler an Gymnasien, typischerweise ab der 2. Klasse des Kurzgymnasiums. Jedes Jahr veröffentlicht ein internationales Komitee **17 offen formulierte Physikprobleme**, an welchen die Teilnehmenden im Vorfeld des Wettbewerbs sowohl experimentell als auch theoretisch forschen.



Schematische Darstellung eines *Physics Fight*

Am Turnier selbst treten die Schülerinnen und Schüler in Fünferteam in sogenannten **Physics Fights** an: Als Erstes präsentiert eine Gruppe (*Reporter*) ihre erarbeitete Lösung zu einem der Probleme, welche dann in einer wissenschaftlichen Debatte vom gegnerischen Team (*Opponent*) hinterfragt und diskutiert wird. Das dritte Team (*Reviewer*) fasst die Präsentation und Diskussion kritisch zusammen. Die Leistungen aller drei Teams werden von einer fachkundigen Jury benotet. Dann werden die Rollen gewechselt und die nächste Runde beginnt.

Somit hebt sich das IYPT von vergleichbaren Wettbewerben dadurch ab, dass nebst physikalischen Kenntnissen auch kommunikative Fähigkeiten, Teamwork und Kritikfähigkeit eine wichtige Rolle spielen.

Swiss Young Physicists' Tournament 2026

Nach dem Vorbild des IYPT findet jedes Jahr in der Schweiz das SYPT statt, an dem die Teilnehmerinnen und Teilnehmer während eines Wochenendes in Dreier-Teams antreten. Die Teilnahme steht Schülerinnen und Schülern von Schweizer Gymnasien offen und ist kostenlos. Es können sich sowohl komplette Dreier-Teams als auch einzelne Schülerinnen und Schüler anmelden.

Das SYPT 2026 wird am **7./8. März** in Zürich stattfinden.

Den bestplatzierten SchülerInnen am SYPT steht zudem die Teilnahme am internationalen IYPT offen, wo sie sich mit Physikinteressierten aus der ganzen Welt austauschen können.

Die Problemstellungen für das SYPT 2026 werden kurz vor Beginn des neuen Schuljahres auf unserer Website, sypt.ch, veröffentlicht. Um interessierten SchülerInnen sowie auch betreuenden Lehrpersonen den Einstieg zu erleichtern, veranstalten wir dieses Jahr zum ersten Mal ein **Einführungsseminar**, an dem wir das SYPT und seine Problemstellungen genauer vorstellen. Die **Voranmeldung** ist ebenfalls online verfügbar.

Es würde uns sehr freuen, wenn Sie die Klassen oder einzelne motivierte SchülerInnen an Ihrer Schule über den Anlass informieren könnten. Gerne stellen ehemalige Teilnehmende das SYPT persönlich an Ihrer Schule vor. Melden Sie sich, wenn wir helfen können.

Dank Einführungsseminar und Physics Week sind wir zuversichtlich, dass auch Teams von Schulen, die zum ersten Mal am SYPT teilnehmen, sehr gut abschneiden können. Zur zusätzlichen Unterstützung bieten wir allen Teilnehmenden auch **Online-Coaching** an.

Bei Fragen zum SYPT können Sie sich jederzeit gerne an mich wenden (malte.uthoff@sypt.ch).

Förderung Projektbasierten Unterrichts

Während der Vorbereitung für das SYPT/IYPT lernen die Schülerinnen und Schüler physikalische Konzepte nicht aus dem Theoriebuch, sondern individuell an realen Beispielen kennen. Dadurch eignet sich das IYPT ideal für **moderne projektorientierte und interdisziplinäre Unterrichtsgefässe**. Einerseits bieten die teils komplexen Problemstellungen reichlich Schnittmengen mit den Fächern Mathematik oder Informatik, andererseits verlangen die Debatten am Wettbewerb auch sprachliche Kompetenzen.

Insbesondere im Zusammenhang mit der Weiterentwicklung der gymnasialen Maturität möchten wir mehr Lehrpersonen auf dieses Format aufmerksam machen und konkret aufzeigen, wie dieses in verschiedene Unterrichtsgefässe integriert werden kann.

Dazu planen wir die Organisation einer **Lehrpersonenweiterbildung**, welche parallel zum IYPT stattfindet, sodass die Teilnehmenden den Wettbewerb auch gleich besuchen können.

Bei Interesse können Sie gerne bereits jetzt die Voranmeldung fürs SYPT ausfüllen oder sich direkt bei uns melden (info@sypt.ch). Weitere Informationen folgen Anfang 2026 auf sypt.ch.

SYPT/IYPT 2026: Wichtige Termine

August 2025	Veröffentlichung der Probleme für SYPT/IYPT 2026
September 2025	Einführungsseminar SYPT 2026
ab Januar 2026	Anmeldung Lehrpersonenweiterbildung
7./8. März 2026	SYPT 2026 an der ETH Zürich
29. Juni – 4. Juli 2026	IYPT 2026 an der ETH Zürich



Where tomorrow's scientists meet.

Lara Gafner
Wissenschafts-Olympiade, l.gafner@olympiad.ch

Hinter den Kulissen im Lager der Physik-Olympiade

Eine Woche Physik

Das “Galadinner” ist eröffnet. Im grossen Saal des Gruppenhauses sitzen 66 Teenager an langen Tischen, viele in schicken Hemden oder eleganten Kleidern. Ein mehrgängiges Menü wird serviert - zubereitet in der Lagerküche, aber angerichtet wie im Sternerestaurant. Als alle fertig gegessen haben, betritt Professor Thierry Giammarchi von der Universität Genf die Bühne. Er illustriert Konzepte aus der Quantenmechanik mit Kartentricks. Es ist der zweite Abend des einwöchigen Lagers der Physik-Olympiade im November 2024. Eingeladen sind Jugendliche, die es in der ersten Runde unter die besten 144 von 865 geschafft haben. Jedes Jahr regen Lehrpersonen aus der ganzen Schweiz junge Talente dazu an, den Online-Test der ersten Runde zu lösen, oder führen diesen im Unterricht durch. Die Schülerinnen und Schüler, die weiterkommen, vertrauen sie danach ganz den jungen Freiwilligen der Physik-Olympiade an.

Eine davon ist Alexandra Smirnova. Die Genfer Physikstudentin findet es wichtig, dass Lehrpersonen sich vorstellen können, wie ein typischer Lagertag aussieht: Vormittags und nachmittags findet jeweils eine Vorlesung statt, danach vertiefen die Teilnehmenden die gelernte Theorie mit Übungen. Sie arbeiten alleine oder in kleinen Gruppen und können Fragen stellen, wenn sie nicht weiterkommen. Nach dem Abendessen werden manchmal weitere Aktivitäten angeboten, die etwas mit Physik zu tun haben. In den Vorlesungen und Übungen werden Grundlagen der Physik erarbeitet: Mathematik, Mechanik, Schwingungen und Wellen, spezielle Relativität, Elektro-, Hydro- und Thermodynamik, Optik. “Wir kriegen hier in kurzer Zeit sehr kompakten Physikunterricht über sehr viele Themen”, meint Jonas von der Kantonsschule Zug. Vergessen die Teilnehmenden all diesen Stoff nicht direkt wieder? “Aus eigener Erfahrung weiss ich, dass man sehr viel mitnimmt”, so Alexandra, die 2019 als Teilnehmerin im Lager war. “Wenn etwas ganz neu ist, versteht man es vielleicht nicht auf Anhieb. Wenn man es aber schonmal gehört hat, lernt man es besser.” Das findet auch Noelia von der Kantonsschule Glarus, die schon zum wiederholten Mal dabei ist und am Finale im März 2025 Silber gewinnen wird: “Wir lernen hier jedes Jahr die gleiche Theorie, aber jedes Mal bleibt etwas mehr hängen”. Neben Noelia sitzt David von der Kantonsschule Alpenquai, ebenfalls erfahrener Teilnehmer und Erstplatzierte im Finale.

Den Artikel über das Finale der Physik-Olympiade 2025 finden Sie unter physics.olympiad.ch/de/aktuell. Lagerleben gibt's auch in **Mathematik**, z.B. im internationalen Trainingscamp für die Teilnehmerinnen der European Girls' Mathematical Olympiad im Februar in Les Diablerets.. Mehr dazu und Updates von der Mathematik-Olympiade unter mathematical.olympiad.ch/de/news.

Er weiss genau, welche Stellen des 400-seitigen, von Freiwilligen der Physik-Olympiade verfassten Skripts im Vergleich zum Vorjahr revidiert wurden. Er zeigt auch gerne, welche Tippfehler ein weiteres Jahr überlebt haben. Für Fortgeschrittene wie David und Noelia werden erstmals Workshops angeboten: Wer die Vorlesungen schon kennt, kann parallel dazu in einer kleinen Gruppe Aufgaben auf dem Niveau der Internationalen Physik-Olympiade lösen.

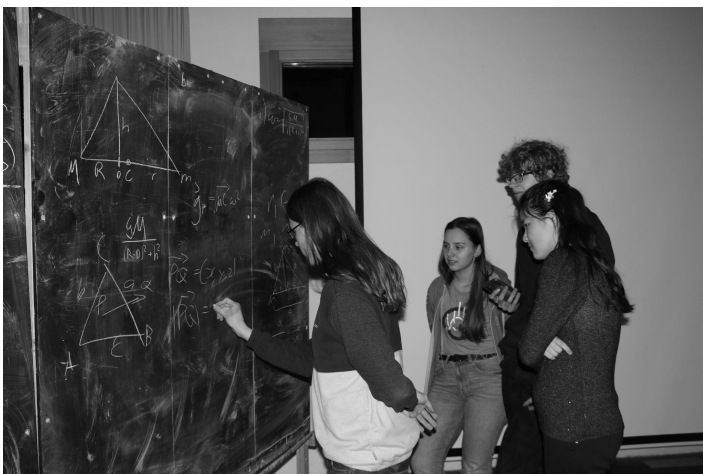
Nichts läuft ohne Freiwillige

Alexandra kümmert sich um die 30 Freiwilligen, die für das Physiklager ins aargauische Vordemwald kommen - teilweise auch nur für ein paar Stunden, z.B. um eine Vorlesung zu geben oder in der Küche auszuhelfen. Küchenchef Eliot Donnadiou und sein wechselnder Stab von Helferinnen und Helfern beschränken sich dabei nicht auf Spaghetti. Die Physikerinnen und Physiker wagen auch bei sechzig

hungrigen Teenagern aufwändige Gerichte. Der dritte im Bunde ist Etienne Gilgien, der im Camp für die Teilnehmenden zuständig ist. In den Pausen trifft man ihn oft draussen vor dem Gruppenhaus an, wo er die Teilnehmenden anregt, durch sein Teleskop Sonnenflecken zu erspähen. Neben seinem Einsatz für die Physik-Olympiade gehört der ETHZ-Student auch zu den Freiwilligen, die 2024 die Schweizer Astronomie-Olympiade neu gegründet haben. “Während des Lagers behalte ich den Überblick und stelle sicher, dass nichts ausser Kontrolle gerät”, erklärt Etienne. Als Teilnehmende eines Abends versuchen, eine selbstgebastelte Jakobsleiter in Betrieb zu nehmen, greift er beispielsweise ein - ohne den Erfindergeist im Keim zu ersticken. Er beurteilt, welcher Stromanschluss sicher ist und weist die Teilnehmenden an, einen Sicherheitsabstand einzuhalten, während er das aus einem Holzblock, Kupferdrähten und einer Rechaudkerze bestehende Gebilde einsteckt - immer nur für ein paar Sekunden. Das elektrische Flackern der Kupferdrähte sorgt für Applaus, mehr und mehr Teilnehmende scharen sich um das Spektakel. Im Lager liegt der Fokus auf der Theorie, doch auch die Praxis ist ein Teil der Physik-Olympiade. Technisch wird es auch am Dienstag, als ein Ausflug ins Atomkraftwerk Gösgen auf dem Programm steht. Das Reaktorgebäude kann nicht besucht werden, doch die Jugendlichen werden in kleinen Gruppen durch den Rest der Anlage geführt. Sie beobachten die Reaktoroperateure durch die Glastüren des Kontrollraums und erkunden den warmen, lauten Maschinenraum.

Mehr als nur Wissen

2024 sind über 20 der 66 Teilnehmenden im Physiklager französischsprachig, im Vorjahr waren es nur 12. Einige Vorlesungen finden für alle zusammen auf Englisch statt. Manchmal gibt es die Vorlesung auf Deutsch im grossen Saal, während im zweiten Stock dasselbe Thema auf Französisch behandelt wird. Nicht nur die Romands, sondern auch weibliche Teilnehmerinnen sind im Lager eine Minderheit: 2024 kommen 24 Mädchen auf 42 Jungs. Ideal wäre natürlich ein Verhältnis von 50:50, sagt Alexandra, aber das hänge nicht nur von der Physik-Olympiade ab, sondern auch von gesellschaftlichen Verhältnissen. Trotzdem bemüht sich die Physik-Olympiade mit Erfolg darum, mehr junge Frauen zu erreichen: Einige der Teilnehmerinnen im Lager kennen sich schon vom "Women's Weekend", einem offenen Wochenende im September, das Schülerinnen in ihren naturwissenschaftlich-technischen Interessen bestärken und zur Teilnahme an der Olympiade motivieren soll. Die Organisatorinnen des Women's Weekend, Olivia Parisi und Rebecca Stadler, sind auch im Lager mit dabei. An einem der Abende führen sie eine Podiumsdiskussion durch, bei der sie und andere ehemalige Teilnehmende von ihren eigenen Erfahrungen erzählen. Es gehe ihnen vor allem darum, zu zeigen, dass es normal sei, sich manchmal unsicher zu fühlen. Einen ähnlichen Zweck erfüllt eine Umfrage, der die Teilnehmenden zu Beginn des Lagers ihre Erwartungen und ihre Unsicherheiten gestehen können, die dann anonym für alle lesbar sind. Jemand fürchtet, nicht in die Gruppe zu passen, andere zweifeln daran, dass sie “schlau genug” sind. Bei den Erwartungen werden einzelne physikalische Themen genannt, über die man etwas lernen möchte, aber es sind vor allem Begegnungen mit Gleichgesinnten, auf die die Teilnehmenden sich freuen.



Alexandra betont, dass es im Lager eben nicht nur darum gehe, Wissen mitzunehmen. Der Kontakt zu gleichgesinnten Peers sei für viele Teilnehmende sehr inspirierend. “Diese Erfahrung hat auch bei meiner Berufswahl eine Rolle gespielt”, so Alexandra. “Wir sehen, dass die Teilnehmenden es geniessen, sie sagen es uns auch”, meint Etienne. Beispielsweise mit dem Feedbackformular, das nach dem Lager verschickt wird. Dort geben die Teilnehmenden kritische Rückmeldungen ab, zum Beispiel zu schwer verständlichen Vorlesungen. Doch sie teilen auch viel Lob und danken den Freiwilligen für ihr Engagement. Ein Kommentar lautet: “Eine der besten Wochen meines Lebens!”

Lara Gafner
Wissenschafts-Olympiade, l.gafner@olympiad.ch

Dans les coulisses du camp des Olympiades de physique

Une semaine pleine de physique

Le « dîner de gala » commence. Dans la grande salle de l'auberge où a lieu le camp des Olympiades de physique de 2024, 66 adolescent-e-s sont assis-e-s à de longues tables, dont beaucoup portent des chemises chics ou des robes élégantes. Un menu à plusieurs plats est servi, préparé dans la cuisine du camp, mais dressé comme dans un restaurant raffiné. Lorsque tout le monde a fini de manger, Thierry Giamarchi, remarquable professeur de l'Université de Genève, entre en scène. Il illustre des concepts de la mécanique quantique avec des tours de cartes. C'est la deuxième soirée de ce camp d'une semaine qui a lieu chaque mois de novembre, ouvert aux jeunes qui ont réussi à se classer parmi les 144 meilleurs sur 865 lors du premier tour. Chaque année, des enseignant-e-s de toute la Suisse encouragent leurs étudiant-e-s à résoudre le test du premier tour en ligne ou l'organisent en classe. Les élèves qui progressent sont ensuite entièrement guidé-e-s par les bénévoles des Olympiades de physique, dont la plupart sont des étudiant-e-s universitaires.

Alexandra Smirnova est l'une des bénévoles. Cette étudiante de physique genevoise est convaincue qu'il est important que les enseignant-e-s puissent s'imaginer à quoi ressemble une journée de camp typique: le matin et l'après-midi, il y a toujours un cours magistral. Ensuite, les participant-e-s approfondissent la théorie apprise avec des exercices: elles et ils travaillent seul-e-s ou en petits groupes et peuvent poser des questions. Après le dîner, d'autres activités sont proposées. Ces cours et ces exercices permettent d'acquérir les bases nécessaires: mathématiques, mécanique, vibrations et ondes, relativité restreinte, électrotechnique, hydrodynamique et thermodynamique, optique. « On nous donne ici des cours de physique très compacts sur de très nombreux sujets en peu de temps », explique Jonas de l'école cantonale de Zoug. Les participant-e-s n'oublient-ils pas directement toute cette matière? « Par expérience personnelle, je sais que l'on retient beaucoup de choses », répond Alexandra, qui a également participé au camp en 2019. « Si quelque chose est tout nouveau, on ne le comprend peut-être pas du premier coup. Mais si on l'a déjà entendu plusieurs fois, on finit par le retenir ». C'est également l'avis de Noelia, de l'école cantonale de Glaris, qui a déjà participé plusieurs fois : « chaque année au camp j'apprends la même théorie, mais à chaque fois, je retiens quelque chose de plus ». À côté de Noelia se trouve David, de l'école cantonale Alpenquai, également un participant expérimenté et gagnant de la finale en mars 2025.

Vous trouverez l'article sur la finale des Olympiades de physique 2025 sur physics.olympiad.ch/fr/actuel. Visitez mathematical.olympiad.ch/fr/news pour des mises à jour sur les Olympiades de mathématiques, par exemple sur le camp d'entraînement international pour les participantes aux European Girls' Mathematical Olympiad qui a eu lieu aux Diablerets en février.

Il sait exactement quels passages du script de 400 pages rédigé par des bénévoles des Olympiades de physique ont été révisés par rapport à l'année précédente. Il se fait également un plaisir de montrer quelles coquilles ont survécu une année de plus. Pour les élèves avancé-e-s comme David et Noelia, qui connaissent déjà les cours, des ateliers sont proposés pour la première fois : résoudre en parallèle, en petit groupe, des tâches du niveau des Olympiades internationales de physique.

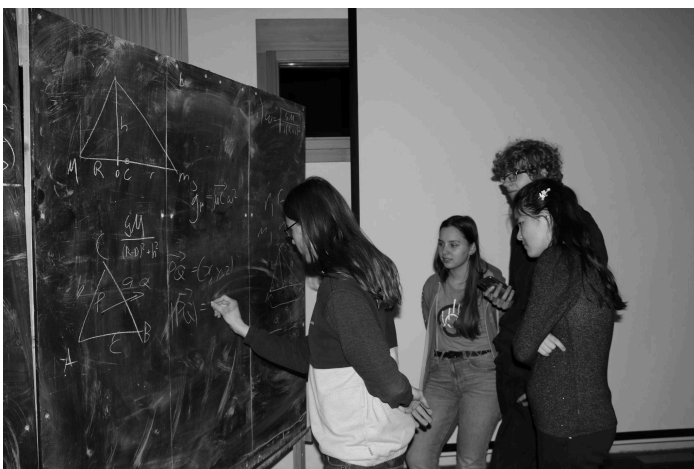
Rien ne marcherait sans le bénévoles

Alexandra s'occupe des 30 bénévoles qui viennent à Vordemwald, en Argovie, pour le camp de physique – parfois pour quelques heures seulement, par exemple pour donner un cours ou aider dans la cuisine. Le chef de cuisine Eliot et son équipe de bénévoles ne se limitent pas aux spaghettis – ces physicien-ne-s osent

également des plats élaborés pour la soixantaine d'adolescent-e-s affamés que sont les participant-e-s. Le troisième membre du groupe est Etienne Gilgien, principalement responsable du bien-être des participant-e-s. Pendant les pauses, on le retrouve souvent dehors, où il les invite à observer les tâches solaires à travers son télescope. Outre son engagement pour les Olympiades de physique, l'étudiant de l'EPFZ fait partie des bénévoles qui ont fondé les Olympiades suisses d'astronomie en 2024. « Pendant le camp, je garde une vue d'ensemble et m'assure que rien n'échappe à mon contrôle », explique Etienne. Lorsque des participant-e-s tentent un soir de mettre en service une échelle de Jacob fabriquée par leurs soins, il intervient de manière ponctuelle – sans pour autant étouffer l'esprit d'invention. Il évalue quelle prise de courant est sûre et demande aux participant-e-s de garder une distance de sécurité pendant qu'il branche l'objet composé d'un bloc de bois, de fils de cuivre et d'une bougie de réchauffement. Le scintillement électrique des fils de cuivre provoque des applaudissements et de plus en plus de participant-e-s se rassemblent autour du spectacle. Dans le camp, l'accent est mis sur la théorie, mais la pratique fait aussi partie des Olympiades de physique. La technique est également au programme du mardi, avec une excursion à la centrale nucléaire de Gösgen. Le bâtiment du réacteur ne peut pas être visité, donc les jeunes sont guidés en petits groupes à travers les installations et les autres bâtiments. Elles et ils observent les opérateurs du réacteur derrière les portes vitrées de la salle de contrôle et explorent la salle des machines, chaude et bruyante.

Plus que du savoir

En 2024, plus de 20 des 66 participant-e-s du camp sont francophones, alors qu'ils n'étaient que 12 l'année précédente. Deux cours ont lieu en anglais pour tout le monde. Sinon, les cours sont donnés en allemand et en français séparément. Les Romand-e-s ne sont pas les seuls à être en minorité, les participantes sont également moins nombreuses dans le camp : en 2024, il y avait 24 filles et 42 garçons. Sans doute, l'idéal serait un rapport de 50/50, comme le dit Alexandra, mais cela ne dépend pas seulement des Olympiades de physique, mais aussi des conditions sociales. Malgré tout, les Olympiades de physique s'efforcent avec succès d'atteindre les jeunes femmes : certaines des participantes se connaissent déjà grâce au *Women's Weekend*, un week-end en septembre qui vise à renforcer l'intérêt des filles pour les sciences et la technologie et à les motiver à participer aux Olympiades. Les organisatrices du *Women's Weekend*, Olivia Parisi et Rebecca Stadler, sont également présentes au camp. Lors d'une des soirées, elles organisent une table ronde au cours de laquelle elles et d'autres anciennes participantes racontent leurs propres expériences. Il s'agit avant tout pour elles de montrer qu'il est normal de se sentir parfois peu sûr de soi, que l'on n'est pas seul dans ce cas, expliquent Olivia et Rebecca. Un sondage remplit un objectif similaire : au début du camp, les participant-e-s peuvent faire part de leurs attentes et de leurs incertitudes, qui peuvent alors être lues par tous anonymement. Certain-e-s craignent de ne pas s'intégrer au groupe, d'autres doutent d'être « assez intelligent-e-s ». En ce qui concerne les attentes, certaines thématiques de physique sont mentionnées, sur lesquelles l'on aimerait apprendre quelque chose, mais ce sont surtout des rencontres avec d'autres personnes partageant les mêmes intérêts que les jeunes anticipent le plus.



Alexandra souligne que le camp ne se limite pas à l'acquisition de nouvelles connaissances: le contact avec d'autres qui partagent la même passion pour la physique est en effet très inspirant. « Cette expérience a joué un rôle dans mon choix de carrière » – partage Alexandra. « Nous voyons que les participant-e-s apprécient, ils nous le disent aussi », ajoute Etienne. Par exemple via le formulaire de feedback qui est envoyé après le camp : les participant-e-s y font certes part de leurs critiques, tels que des cours magistraux difficiles à comprendre, mais ils et elles font aussi beaucoup d'éloges et remercient les bénévoles pour leur engagement. Un commentaire dit : « Une des meilleures semaines de ma vie ! ».

Georg Keller
Kantonsschule Schaffhausen, georg.keller@kanti.sh.ch

Vergleich von Kepler- und Kreisbahn: Eine Ergänzung

Im Schwerpunktfach „Anwendungen der Mathematik“ widme ich einen Teil des letzten Schuljahres vor der Matur einer naturwissenschaftlichen Perle: Wir untersuchen einige mathematisch-physikalisch relevante Aspekte erstens der 3 Keplerschen Gesetze und zweitens des Newtonschen Gravitationsgesetzes, und anschliessend studieren wir eine auf dem Newtonschen Gravitationsgesetz basierende Herleitung der 3 Keplerschen Gesetze. Der erste Unterrichtsteil, d.h. das Untersuchen der 3 Keplerschen Gesetze, ist wie folgt aufgebaut:

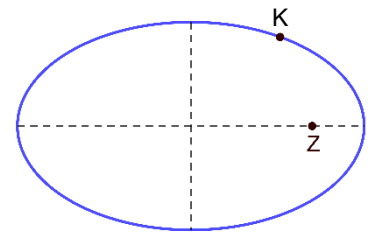
- Als Vorbereitung werden einige den Grundlagenfachunterricht ergänzende Kenntnisse über Kegelschnitte und Differentialrechnung / Vektorgeometrie erarbeitet, zum Beispiel dass ...
 - die Ellipsenfläche gleich $\pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ ist (a, b sind die grosse resp. kleine Halbachse der Ellipse, $\varepsilon := \frac{c}{a}$ ist die numerische Exzentrizität, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ die lineare Exzentrizität).
 - die Flächengeschwindigkeit $\dot{F}(t)$ eines Körpers K , welcher auf einer ebenen Bahn einen Zentralkörper Z umläuft, gemäss

$$\dot{F}(t) = \frac{1}{2} |\overrightarrow{ZK}(t) \times \vec{v}(t)| \quad (1)$$

berechnet werden kann, wobei $\vec{v}(t)$ der Geschwindigkeitsvektor von K zur Zeit t ist.

- Danach verwenden wir die neuen Kenntnisse, um den 3 Keplerschen Gesetzen einige physikalisch interessierende Eigenschaften von Keplerbahnen zu entnehmen, notabene ohne jegliche Verwendung der klassischen Mechanik und Gravitationstheorie, also mit einem Physikverständnis, welches Keplers Zeit nachempfunden ist. Ein Beispiel:

- Wir betrachten einen Körper K (vgl. rechtsstehende Abbildung), welcher einen Zentralkörper Z auf einer Bahn umläuft, welche den 3 Keplerschen Gesetzen gehorcht. Aufgrund des 1. Keplerschen Gesetzes ist die Umlaufbahn elliptisch und Z befindet sich in einem der beiden Ellipsenbrennpunkte. Gemäss 2. Keplerschem Gesetz ist diejenige Fläche $F(t)$, welche ab einem beliebigen Anfangszeitpunkt und bis zur Zeit t von \overrightarrow{ZK} überstrichen wird, eine lineare Funktion von t . Die t -unabhängige Steigung \dot{F} des Graphen von $F(t)$ kann daher entweder via (1) berechnet werden (wobei t beliebig gewählt werden kann), oder mit Hilfe von irgendeinem Steigungsdreieck, z.B. einem Steigungsdreieck, welches einem vollen Umlauf von K um Z entspricht, was zu ($T :=$ Umlaufszeit von K)

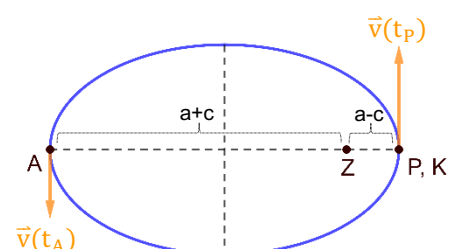


$$\dot{F} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{T} \quad (2)$$

führt. Aufgrund von (1), (2) gilt also

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{ZK}(t) \times \vec{v}(t)| = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{T} \quad (t = \text{beliebig}). \quad (3)$$

- Jetzt werten wir (3) für denjenigen Zeitpunkt t_P aus, wo sich K im Perizentrum P seiner Umlaufbahn befindet (vgl. rechtsstehende Abbildung; der Umlaufssinn von K sei positiv): Offenbar steht $\overrightarrow{ZK}(t_P)$ (mit Betrag $a - c = a(1 - \varepsilon)$) senkrecht auf $\vec{v}(t_P)$ (dessen Betrag wir $v(t_P)$ nennen); daher lautet (3) für $t = t_P$



$$\frac{1}{2} a(1 - \epsilon) \cdot v(t_P) = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}}{T} \quad ,$$

woraus wir für $v(t_P)$ erhalten:

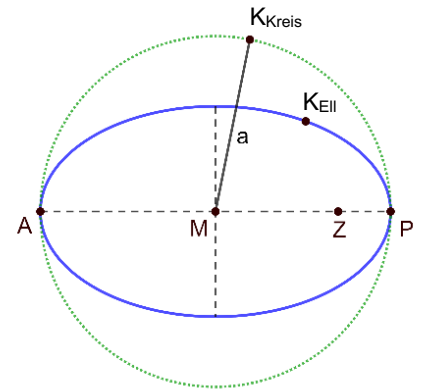
$$v(t_P) = \frac{2\pi a}{T} \cdot \sqrt{\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}} \quad . \quad (4)$$

- In analoger Weise erhält man für das Apozentrum A von K's Umlaufbahn (vgl. vorherige Abbildung)

$$v(t_A) = \frac{2\pi a}{T} \cdot \sqrt{\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}} \quad . \quad (5)$$

Die Geschwindigkeitsberechnungsformeln (4), (5) können wie folgt gelesen werden:

- Der auf der rechten Seite von (4) auftretende Faktor $\frac{2\pi a}{T}$ kann physikalisch als die Geschwindigkeit eines fiktiven Körpers interpretiert werden, welcher sich mit konstanter Geschwindigkeit auf der nebenstehend gezeichneten Kreisbahn mit Mittelpunkt M (= Ellipsenmittelpunkt) und Radius a und mit K's Umlaufzeit T bewegt. Um die Geometrie der Umlaufbahn des fiktiven Körpers deutlich hervorzuheben, werden wir ihn K_{Kreis} nennen; und aus gleichem Grund nennen wir K ab jetzt K_{Ell} .
- Wir können uns vorstellen, dass sich K_{Ell} und K_{Kreis} zur Zeit $t = 0$ bei P befinden, danach innerhalb der Zeitspanne T (z.B. im Gegenuhrzeigersinn) einen (im Falle von K_{Ell}) elliptischen Umlauf um Z resp. (im Falle von K_{Kreis}) kreisförmigen Umlauf um M absolvieren und sich daher zur Zeit $t = T$ wieder bei P begegnen.
- Bezüglich dieser beiden Umlaufbewegungen macht (4) die Aussage, dass sich K_{Ell} am Punkt P um den Faktor $\sqrt{\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}}$ schneller bewegt als der fiktive Körper K_{Kreis} . Und (5) besagt, dass zur Zeit $t = \frac{T}{2}$ (zu welcher sich K_{Ell} und K_{Kreis} am Punkt A treffen) der Körper K_{Ell} um den Faktor $\sqrt{\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}}$ langsamer ist als der fiktive Körper K_{Kreis} .



Angesichts dieser Lesart von (4), (5) drängt sich die Frage auf, wie „synchron“ die Umlaufbewegungen von K_{Ell} und K_{Kreis} *zwischen* den Punkten P und A verlaufen. Konkret stellt sich z.B. die ...

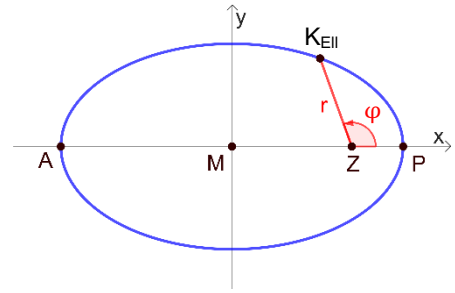
Frage: Ist es richtig, dass auf dem Weg von P nach A, und in x-Richtung gesehen, K_{Ell} jederzeit K_{Kreis} voraus ist, oder gibt es „Überholmanöver“? (6)

Das Ziel dieses Beitrags ist, die obige Frage schwerpunktfachtauglich zu beantworten. Dazu werden wir als Vorbereitung in den nächsten zwei Kapiteln eine entsprechende, vertiefte Auswertung des 1. und 2. Keplerschen Gesetzes resp. der Bewegung von K_{Kreis} vornehmen, was uns dann in den letzten zwei Kapiteln zur erfreulich einfachen Antwort und zu weiteren interessanten Einsichten führen wird. Dies könnte mithelfen, sowohl das qualitative als auch das quantitative Verständnis der Schülerinnen und Schüler für den Bewegungsverlauf auf einer Keplerbahn zu verbessern.

Anmerkung: Vor ca. 400 Jahren verglich Kepler selbst die Keplerbahn von K_{Ell} mit der Kreisbahn von K_{Kreis} , um die Funktion $\varphi(t)$ (φ ist K_{Ell} 's Polarwinkel; vgl. nächste Seite) zu berechnen. $\varphi(t)$ konnte aber nicht in geschlossener Form ausgedrückt werden. Dieser Mangel wurde erst vor ca. 50 Jahren behoben, wobei das Resultat viel zu kompliziert ist, um praktisch von Nutzen zu sein (vgl. z.B. W. Neusch, K. Scherer: Celestial Mechanics. BI Wissenschaftsverlag (1992)). Die Umkehrfunktion $t(\varphi)$ ist zwar deutlich „kundenfreundlicher“, aber immer noch so kompliziert, dass man nicht hinreichend rasch und problemlos scheinbar harmlose Fragen wie (6) beantworten kann. Solche Fragen, oder wenigstens die bemerkenswert unkomplizierten, hilfreichen und z.T. überraschenden Antworten (17)-(20), scheinen leider kaum Eingang in die gymnasiale oder akademische Literatur gefunden zu haben, denn meine Literatursuche führte zu keinerlei Treffern.

Vorbereitung 1: Position und Geschwindigkeit auf der Keplerbahn

- *Wahl geeigneter Koordinaten:* Wir legen ein kartesisches Koordinatensystem über die Bahnellipse von K_{EII} , sodass es im Mittelpunkt der Ellipse zentriert ist und die x-Achse so auf der grossen Ellipsenachse liegt, dass Z (und P) auf der positiven x-Achse liegen. Wir ergänzen dieses xy-Koordinatensystem um eine z-Achse, welche aus der Blattebene heraus gegen den Leser gerichtet ist (und der Einfachheit halber *nicht* gezeichnet wird, weil wir sie nur für eine kurze Rechnung verwenden werden). In der xy-Ebene wählen wir ausserdem ebene Polarkoordinaten r, φ , zentriert bei Z, wobei das Perizentrum $\varphi = 0$ entspricht.



- *Position und Geschwindigkeit von K_{EII} in Polarkoordinaten:* Bekanntlich ist in unsern Polarkoordinaten die Lage der Ellipsenpunkte dadurch charakterisiert, dass der Radius r wie folgt vom Polarwinkel φ abhängt: $r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi)}$, wobei das Ellipsen-Quermass p gemäss $p = \frac{b^2}{a} = a(1 - \varepsilon^2)$ durch die Halbachsen resp. durch a, ε ausgedrückt werden kann. Damit kann der Positionsvektor \vec{ZK}_{EII} im räumlichen kartesischen Koordinatensystem als

$$\vec{ZK}_{\text{EII}} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi)} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

geschrieben werden. Ableiten nach t ergibt den mit \vec{v}_{EII} bezeichneten Geschwindigkeitsvektor von K_{EII}

$$\vec{v}_{\text{EII}} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi)} \cdot \dot{\varphi} \cdot \left[\frac{\varepsilon \cdot \sin(\varphi)}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi)} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \right], \quad (8)$$

wobei, wegen des als positiv angenommenen Umlaufsinns von K_{EII} , offenbar $\dot{\varphi} > 0$ ist.

- *Auswertung der Vektoren \vec{ZK}_{EII} und \vec{v}_{EII} :*

- Erstens: Für die linke Seite von (3) erhalten wir via (7) und (8) und wegen $\dot{\varphi} > 0$:

$$\frac{1}{2} |\vec{ZK}_{\text{EII}}(t) \times \vec{v}_{\text{EII}}(t)| = \frac{1}{2} \left(\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi)} \right)^2 \cdot \dot{\varphi} \quad (9)$$

Aufgrund von (3) und (9) ist also zu allen Zeiten t

$$\dot{\varphi} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{(1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi))^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \quad (10)$$

- Zweitens: Gemäss (8) lautet die x-Komponente der Geschwindigkeit von K_{EII} ¹

$$\begin{aligned} v_{\text{EII},1} &\stackrel{(8)}{=} \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi)} \cdot \dot{\varphi} \cdot \left[\frac{\varepsilon \cdot \sin(\varphi)}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi)} \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \right] \\ &= - \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi))^2} \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\varphi) \\ &\stackrel{(10)}{=} - \frac{2\pi a}{T} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \cdot \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (11)$$

¹ Statt $v_{\text{EII},x}$ schreiben wir lieber $v_{\text{EII},1}$, weil wir später die Abhängigkeit dieser Grösse von der x-Koordinate untersuchen werden, wo die vielleicht problematische Schreibweise $v_{\text{EII},x}(x)$ vermieden werden soll.

- Drittens: Weil die x-Koordinate von Z gleich $c \equiv a \cdot \varepsilon$ ist, lautet wegen (7) die x-Koordinate von K_{Ell}

$$x = a \cdot \varepsilon + \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi)} \cdot \cos(\varphi) \quad .$$

Diese Gleichung lösen wir nach $\cos(\varphi)$ auf und erhalten

$$\cos(\varphi) = \frac{x-\varepsilon \cdot a}{a-\varepsilon \cdot x} \quad . \tag{12}$$

Mit Hilfe von (11), (12) und $\sin(\varphi) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(\varphi)}$ sehen wir schliesslich, in welcher Weise $v_{Ell,1}$ von x abhängt:

$$v_{Ell,1}(x) = \mp \frac{2\pi a}{T} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x-\varepsilon \cdot a}{a-\varepsilon \cdot x}\right)^2} = \mp \frac{2\pi a}{T} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{1-\varepsilon \cdot \frac{x}{a}} \tag{13}$$

(das Vorzeichen ist „-“ für eine Bewegung von P nach A, „+“ falls umgekehrt)

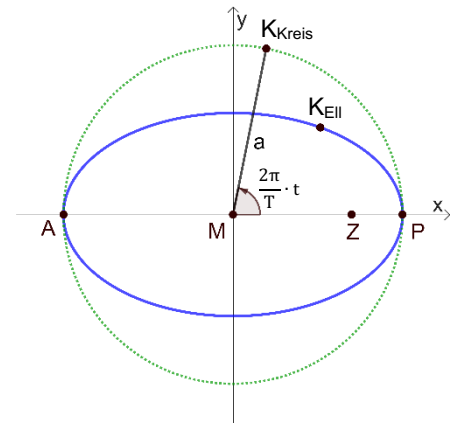
Vorbereitung 2: Position und Geschwindigkeit auf der Kreisbahn

In ähnlicher Weise gehen wir im viel einfacheren Fall des fiktiven Körpers K_{Kreis} vor, der sich mit konstanter Geschwindigkeit auf der erwähnten Kreisbahn (vgl. rechtsstehende Abbildung) bewegt und (vgl. „Einleitung“) zur Zeit $t = 0$ beim Punkt P befindet und positiven Umlaufssinn hat: Offenbar ist

$$\vec{MK}_{Kreis}(t) = a \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \end{pmatrix} \tag{14}$$

und daher

$$\vec{v}_{Kreis}(t) = \frac{2\pi a}{T} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \end{pmatrix} \quad . \tag{15}$$



Gemäss (15) ist $v_{Kreis,1}(t) = -\frac{2\pi a}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$. Wegen (14) kann die x-Koordinate von K_{Kreis} als $x = a \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ geschrieben werden, d.h. $\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = \frac{x}{a}$. Daher sehen wir nun, wie $v_{Kreis,1}$ von x abhängt:

$$v_{Kreis,1}(x) = \mp \frac{2\pi a}{T} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \tag{16}$$

(wieder ist das Vorzeichen „-“ für eine Bewegung von P nach A, „+“ falls umgekehrt)

Antwort auf die Frage (6)

Aufgrund von (13) und (16) erhalten wir die überraschend einfache Beziehung

$$v_{Ell,1}(x) \stackrel{(13,16)}{\cong} v_{Kreis,1}(x) \cdot \frac{1}{1-\varepsilon \cdot \frac{x}{a}} \quad , \quad -a \leq x \leq a \quad , \tag{17}$$

zwischen der x-Komponente der Ellipsenbahn- resp. der Kreisbahn-Geschwindigkeit. Für nichttriviales ε , d.h. für $\varepsilon > 0$, führt dies für die Bewegung von P nach A (wo $v_{\text{Ell},1}(x) < 0$ und $v_{\text{Kreis},1}(x) < 0$ ist, für $-a < x < a$) zu Folgendem:

- Für $0 < x < a$: Hier gilt $\frac{1}{1-\varepsilon \cdot \frac{x}{a}} > 1$, also ist $v_{\text{Ell},1}(x) \stackrel{(17)}{\lesssim} v_{\text{Kreis},1}(x)$; dies besagt, dass in x-Richtung K_{Ell} je länger desto mehr K_{Kreis} voraus sein wird.
- Für $-a < x < 0$: Hier gilt $\frac{1}{1-\varepsilon \cdot \frac{x}{a}} < 1$, also ist $v_{\text{Ell},1}(x) \stackrel{(17)}{\gtrsim} v_{\text{Kreis},1}(x)$, was besagt, dass in x-Richtung K_{Ell} je länger desto mehr von K_{Kreis} eingeholt wird. Das Einholen wird genau bei $x = -a$ geschehen; nicht vorher, weil ansonsten K_{Kreis} , in x-Richtung gesehen, auf dem restlichen Weg von der Überholstelle bis zu $x = -a$ einen immer grösseren Vorsprung erlangen würde, was aber nicht möglich ist, weil zur Zeit $t = \frac{T}{2}$ K_{Ell} und K_{Kreis} simultan beim Punkt A ankommen werden. Es gibt also keine „Überholmanöver“.

In analoger Weise sieht man ein, dass für den Rückweg, d.h. für die Bewegung von A nach P (wo $v_{\text{Ell},1}(x) > 0$ und $v_{\text{Kreis},1}(x) > 0$ ist, für $-a < x < a$), für $\varepsilon > 0$ gilt:

- Für $-a < x < 0$: In x-Richtung wird K_{Kreis} je länger desto mehr K_{Ell} voraus sein.
- Für $0 < x < a$: In x-Richtung wird K_{Kreis} je länger desto mehr von K_{Ell} eingeholt. Es gibt aber keine „Überholmanöver“, d.h. das Einholen geschieht genau bei $x = a$.

Ergänzungen

Die bisherigen Überlegungen führen zu einigen weiteren, intuitiv z.T. unerwarteten Einsichten:

- (11) $\Rightarrow v_{\text{Ell},1}(\varphi)$ ist symmetrisch bezgl. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (und bezgl. $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, ...)
- (11) $\Rightarrow |v_{\text{Ell},1}|_{\text{max}} = \frac{2\pi a}{T} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, erreicht bei $x = c$
- (16) $\Rightarrow |v_{\text{Kreis},1}|_{\text{max}} = \frac{2\pi a}{T}$, erreicht bei $x = 0$
- (17) $\Rightarrow v_{\text{Ell},1}(x=0) = v_{\text{Kreis},1}(x=0)$
- Für die Bewegung von K_{Ell} von P nach A, z.B. für $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$, entspricht (13) der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = -\frac{2\pi a}{T} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{1-\varepsilon \cdot \frac{x}{a}}$ für die x-Koordinate von K_{Ell} . Die Lösung dieser Differentialgleichung (mit der Anfangsbedingung $x(t=0) = a$) lautet

$$t = T \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right) . \tag{18}$$

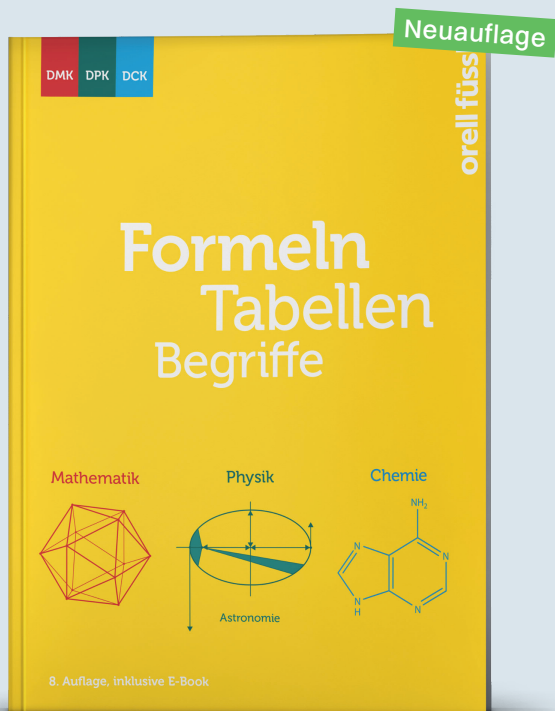
Via (18) kann man für einige spezielle x-Werte die entsprechenden, exakten t-Werte rasch von Hand bestimmen, z.B. $t(x = \frac{a\sqrt{3}}{2}) = T \cdot \left(\frac{1}{12} - \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \right)$, $t(x = \frac{a}{\sqrt{2}}) = T \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$, $t(x = \frac{a}{2}) = T \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, $t(x = 0) = T \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2\pi} \right)$. Und: Die ersten beiden Summanden auf der rechten Seite von (18) ergeben genau diejenige Zeit $t_{\text{Kreis}}(x)$, welche via Kreisbahn von a bis x vergeht. Daher kann (18) zwecks Vergleichs von Ellipsen- und Kreisbahn noch prägnanter als

$$t_{\text{Ell}}(x) = t_{\text{Kreis}}(x) - \varepsilon \cdot \frac{T}{2\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \tag{19}$$

geschrieben werden. (19) bestätigt die weiter oben gefundene Antwort auf die Frage (6) in erstaunlich einfacher und quantitativ noch präziserer Weise: Die via Ellipsenbahn von a bis x vergehende Zeit ist, für $-a < x < a$ und $\varepsilon > 0$, kürzer als via Kreisbahn (und die entsprechende Zeitdifferenz ist bei $x = 0$ am grössten, wo sie $\varepsilon \cdot \frac{T}{2\pi}$ beträgt). Via (19) erkennen wir auch, dass für die Bewegung von x nach (-x) erstaunlicherweise gilt:

$$\Delta t_{\text{Ell}}|_{\text{von } x \text{ nach } (-x)} = \Delta t_{\text{Kreis}}|_{\text{von } x \text{ nach } (-x)} \tag{20}$$

Unsere Neuauflagen aus der DMK-Reihe



Formeln, Tabellen, Begriffe

Mathematik - Physik - Chemie

(Print inkl. E-Book MoLib, Neuauflage 2025)

Wenn Mittelschülerinnen und -schüler von «der Formelsammlung» reden, meinen sie dieses Buch - eine Mittelschullaufbahn ohne «Formeln, Tabellen, Begriffe» ist kaum vorstellbar. «Formeln, Tabellen, Begriffe» ist das kompakte Standard-Nachschlagewerk für Mathematik, Physik und Chemie. Konzipiert wurde es primär für den Unterricht am Gymnasium. Aufgrund seiner inhaltlichen Vielfalt wird es auch an universitären Hochschulen und Fachhochschulen eingesetzt. Das Werk ist als praktisches Arbeitsinstrument mit zahlreichen illustrativen Grafiken und einem umfangreichen Stichwortverzeichnis versehen. Die grundlegende Revision des Einheitensystems durch die Generalkonferenz für Mass und Gewicht wurde berücksichtigt, und die allgemeinen Konstanten wurden dementsprechend angepasst.

9. Auflage 2025 | 264 Seiten, Broschur |
ISBN 978-3-0355-2825-1 | CHF 31.-

→ Erscheint im Juli 2025



Analysis

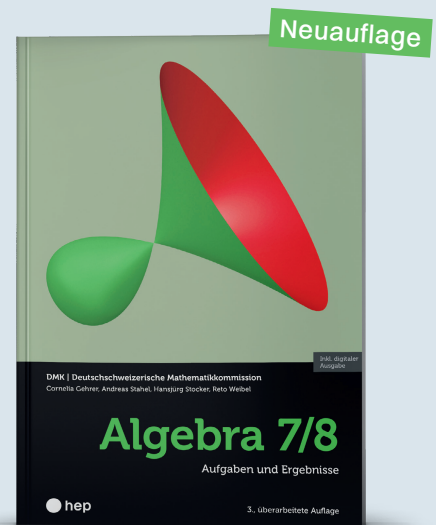
Aufgaben (Print inkl. E-Book MoLib)

2. Auflage 2025 | 288 Seiten, Broschur |
ISBN 978-3-0355-2535-9 | CHF 41.-

Ausführliche Lösungen (Print inkl. E-Book MoLib)

ISBN 978-3-0355-2537-3 | CHF 59.-

→ Erscheinen im Mai 2025



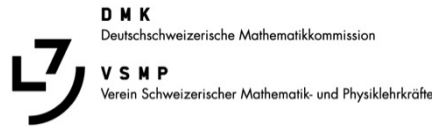
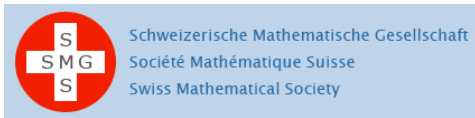
Algebra 7/8

Aufgaben und Ergebnisse (Print inkl. E-Book MoLib)

3. Auflage 2025 | 316 Seiten, Broschur |
ISBN 978-3-0355-2812-1 | CHF 43.-

→ Erscheint im Mai 2025

Bequem online bestellen
hep-verlag.ch



35. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht

Die Schweizerische Mathematische Gesellschaft SMG, die Deutschschweizerische Mathematikkommission DMK und die ETH Zürich laden Sie herzlich zu dieser Weiterbildungsveranstaltung ein.

- Ort:** Kantonsschule am Burggraben, St. Gallen
Datum: Mittwoch, 10. September 2025
Organisation: Marcel Leupp (KS am Burggraben), Angelika Rupflin (KS am Burggraben), Simon Knaus (KS am Burggraben), Sonja Greutmann (KS am Burggraben), Olaf Schnürer (KS am Burggraben), Lorenz Halbeisen (ETH), Norbert Hungerbühler (ETH)
Kurskosten: Gegen Entrichtung der Tagungsgebühr von 30 CHF erhalten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer einen Bon für das Mittagessen. Es besteht die Möglichkeit, mit TWINT zu bezahlen. Sonst gern 30 CHF bar passend.
Anmeldung: bis 31. August 2025

Programm (Die Zeitangaben und das Programm sind provisorisch.)

Check-in beim Eingang der Aula Neubau (ausgeschildert): Kaffee, Tee, Orangensaft, Wasser und Gipfeli; Einziehen der Tagungsgebühr	09:45 – 10:30 Uhr
Musikalische Einstimmung in der Aula Neubau Begrüssung: Rektor Michael Lütolf Einführung: Norbert Hungerbühler	10:30 – 10:50 Uhr
Plenarvortrag in der Aula Neubau Tobias Fissler (ETH Zürich, Gymnasium Lerbermatt) <i>Was macht eine gute Vorhersage aus?</i>	10:50 – 11:50 Uhr
Workshops bzw. Vorträge im kleineren Kreis 1: siehe unten	12:00 – 13:00 Uhr
Mittagessen in der Mensa	13:00 – 14:10 Uhr
Workshops bzw. Vorträge im kleineren Kreis 2: siehe unten	14:15 – 15:15 Uhr
Kaffeepause (eingeladen von der Fachschaft Mathematik der KSBG)	15:15 – 15:45 Uhr
Plenarvortrag in der Aula Neubau Wolfgang Soergel (Albert-Ludwigs-Universität Freiburg) <i>Die Euklidische Ebene neu frisiert und Cirkellimits</i>	15:45 – 16:30 Uhr
Ende der Veranstaltung	16:30 Uhr

Workshops

- Workshop A
Symmetrie in Mathematik, Architektur und Kunst
Martin Huber (ZHAW & Universität Zürich)
- Workshop B
Die chaotischen Eigenschaften des logistischen Wachstums
Hermann Biner (Zermatt)
- Workshop C
Einfache Experimente zur Bereicherung des Mathematik-Unterrichts
Jochen Kalser (KSBG)
- Workshop D
Mathematische Fundstücke: Überraschendes für den Unterricht
Olaf Schnürer (KSBG)
- Workshop E
Streifzug durch die Welt der Pensionskassen
Marco Cincera (Pensionskassenexperte, Toptima AG)
- Workshop F
Verstärkung von Erbkrankheiten – Wahrscheinlichkeiten in der Genetik
Raj Spielmann (Gymnasium Kirchenfeld)
- Workshop G
Zeta – Episoden au seiner unendlichen Serie
Martin Mattmüller (Riehen)

Weitere Informationen zu den Vorträgen, Workshops, Anreise sowie das Anmeldeformular finden Sie unter: www.math.ch/TMU2025



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht Programm Herbstsemester 2025

Die Vorträge finden jeweils am Donnerstag um 17.15 Uhr im Hauptgebäude der ETH Zürich im Raum HG G 19.1 statt.

Donnerstag, 23. Oktober 2025

Zwei Schwestern: Mathematik und Informatik im Fluss der Zeit
Tobias Kohn (KIT Karlsruhe)

Donnerstag, 6. November 2025

Computational Physics – Beispiele aus Schülerprojekten und Unterrichtsvorbereitung
Martin Lieberherr (MNG Rämibühl)

Donnerstag, 20. November 2025

Variationsrechnung, Symmetrien und Erhaltungssätze
Fabian Ziltener (ETH Zürich)

Donnerstag, 4. Dezember 2025

Die Mathematik als Hilfsmittel des Taschenrechners
Guido Lob (Liceo cantonale di Locarno)

Herzlich laden ein: M. Akveld, D. Grawehr, N. Hungerbühler, D. Komm, P. Spindler

Diese und weitere Veranstaltungshinweise finden Sie unter:
math.ch/mathematics@school

La science donne des arguments.

Découvrez le magazine suisse de la recherche Horizons.

Pour vous abonner à l'édition papier:
revue-horizons.ch/abonner



Wissenschaft schafft Argumente.

Entdecken Sie das Schweizer Forschungsmagazin Horizonte.

Hier abonnieren Sie die Printausgabe:
horizonte-magazin.ch/abo



Alexandre Junod

Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), alexandre.junod@rpn.ch

Congruences entre les nombres de Fibonacci

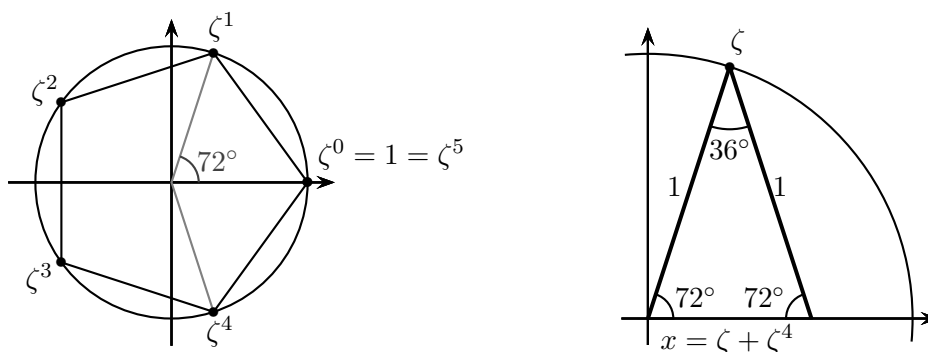
Cet article est dédié à Alain M. Robert, Professeur émérite de l'Université de Neuchâtel, décédé le 7 mars 2025 à l'âge de 83 ans. Auteur de nombreuses publications, dont des ouvrages de référence en analyse non standard et en analyse p-adique, il a dirigé plusieurs thèses concernant des congruences.

Un nombre premier p et un entier $n \geq 1$ étant donnés, nous établissons entre les nombres de Fibonacci quelques congruences modulo $np\mathbb{Z}_{(p)}$, où $\mathbb{Z}_{(p)}$ est l'ensemble des nombres rationnels dont le dénominateur n'est pas divisible par p . Un lien avec les périodes de Pisano est ensuite établi.

1 La formule de Binet revisitée

Les nombres de Fibonacci sont définis par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 2$. La formule de Binet permet d'exprimer $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \widehat{\varphi}^n)$, où $\varphi > \widehat{\varphi}$ sont les solutions de l'équation $x^2 = x + 1$. Elle peut être démontrée facilement par soustraction avec les relations $\varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}$ et $\widehat{\varphi}^n = F_n\widehat{\varphi} + F_{n-1}$ pour $n \geq 1$ (voir [1]). Nous donnons une reformulation à l'aide des racines cinquièmes de l'unité, en nous basant sur un échange trouvé dans un forum sur internet (<https://math.stackexchange.com/questions/3162413>).

D'un point de vue géométrique, les puissances de $\zeta = \cos(72^\circ) + i\sin(72^\circ)$ forment sur le cercle trigonométrique un pentagone régulier symétrique par rapport à l'axe réel (voir la figure de gauche ci-dessous). On a la relation $1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = 0$ car $z = \zeta$, qui ne vaut pas 1, annule le polynôme $P(z) = z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$.



Le nombre $x = \zeta + \zeta^4 = \zeta + \bar{\zeta} = 2\operatorname{Re}(\zeta) = 2\cos(72^\circ)$ est un réel positif et on peut remarquer que $x^2 + x - 1 = (\zeta^2 + 2\zeta^5 + \zeta^8) + (\zeta + \zeta^4) - 1 = \zeta^2 + 2 + \zeta^3 + \zeta + \zeta^4 - 1 = 1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = 0$. On en déduit que $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (l'autre solution de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ est négative) et donc

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2x+1}{5}, \quad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1+x, \quad \widehat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -x.$$

Comme $x = \zeta + \zeta^4 = -(1 + \zeta^2 + \zeta^3)$, la formule de Binet devient

$$F_n = \frac{1 + 2\zeta + 2\zeta^4}{5} \left((1 + \zeta + \zeta^4)^n - (1 + \zeta^2 + \zeta^3)^n \right).$$

Comme $(1+\zeta+\zeta^4)(1+\zeta^2+\zeta^3) = (1+x)(-x) = -(x^2+x) = -1$, les nombres $1+\zeta+\zeta^4$ et $-(1+\zeta^2+\zeta^3)$ sont inverses réciproques. On retrouve ainsi la relation $F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$ pour tout entier $n \geq 0$.

2 Congruences

On considère de manière générale un ensemble \mathcal{A} muni de trois lois de composition :

- une “addition” $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} ((x; y) \mapsto x + y)$ commutative, associative, qui admet un élément neutre (noté $0_{\mathcal{A}}$) et telle que tout élément $x \in \mathcal{A}$ admet un inverse (noté $-x$) dans \mathcal{A} ,
- une “multiplication externe” $\mathbb{Z} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} ((n; x) \mapsto n \cdot x)$, définie par $0 \cdot x = 0_{\mathcal{A}}$, $n \cdot x = \underbrace{x + x + \dots + x}_{n \text{ termes}}$ et $(-n) \cdot x = n \cdot (-x)$ si $n > 0$,
- une “multiplication interne” $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} ((x; y) \mapsto xy)$ qui est associative et \mathbb{Z} -bilinéaire, c’est-à-dire telle que $(m \cdot x_1 + x_2)(n \cdot y_1 + y_2) = mn \cdot (x_1y_1) + m \cdot (x_1y_2) + n \cdot (x_2y_1) + (x_2y_2)$ pour tous les nombres $m, n \in \mathbb{Z}$ et éléments $x_i, y_i \in \mathcal{A}$.

On note $\mathcal{A}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathcal{A}, b \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z} \right\}$ (anneau de fractions formelles). Par exemple, si $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$, alors $\mathcal{A}_{(p)} = \mathbb{Z}_{(p)}$ est l’ensemble des nombres rationnels dont le dénominateur n’est pas divisible par p (“nombres p -entiers”). Au niveau des ensembles de polynômes, si $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[x]$, alors $\mathcal{A}_{(p)} = \mathbb{Z}_{(p)}[x]$.

Proposition. On considère un nombre premier p , deux entiers $m, n \geq 0$ ainsi que deux éléments $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ qui commutent (c’est-à-dire tels que $\alpha\beta = \beta\alpha$). Si m est divisible par p et si $\alpha \equiv \beta \pmod{m\mathcal{A}}$, alors $\alpha^n \equiv \beta^n \pmod{mn\mathcal{A}_{(p)}}$. La congruence est valable modulo $mn\mathcal{A}$ si n est une puissance de p .

PREUVE. Les conditions initiales permettent d’écrire $\alpha = \beta + m\gamma$ où γ est un élément de \mathcal{A} qui commute avec β . Comme p divise m , on a

$$\alpha^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \beta^{p-k} m^k \gamma^k = \beta^p + mp\beta^{p-1}\gamma + m^2(\dots) = \beta^p + mp\tilde{\gamma} \text{ avec } \tilde{\gamma} \in \mathcal{A}.$$

On a donc $\alpha^p \equiv \beta^p \pmod{mp\mathcal{A}}$ et, par induction, $\alpha^{p^k} \equiv \beta^{p^k} \pmod{mp^k\mathcal{A}}$ pour tout entier $k \geq 0$. En écrivant $n = lp^k$ avec l non divisible par p , on obtient ainsi $\alpha^n = (\alpha^{p^k})^l \equiv (\beta^{p^k})^l = \beta^n \pmod{mp^k\mathcal{A}}$. Comme $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{(p)}$, la congruence est valable modulo $mp^k\mathcal{A}_{(p)}$ et comme p ne divise pas l , on a $\mathcal{A}_{(p)} = l\mathcal{A}_{(p)}$. La congruence est donc valable modulo $mn\mathcal{A}_{(p)}$. \square

Exemple 1. La congruence $5^n \equiv 1 + 4n \pmod{8n\mathbb{Z}}$ est valable pour $n = 1$ et pour toute puissance de deux car elle impliquerait (avec la proposition) que $5^{2^n} \equiv (1 + 4n)^2 = 1 + 8n + 16n^2 \equiv 1 + 8n \pmod{16n\mathbb{Z}}$ (on conclut par induction).

Exemple 2. La congruence $(1 + x)^p \equiv 1 + x^p \pmod{p\mathbb{Z}[x]}$ est bien connue :

pour $k \in \{1, 2, \dots, p - 1\}$, le coefficient binomial $\binom{p}{k} = \frac{p}{k} \binom{p-1}{k-1}$ se trouve dans $\mathbb{Z} \cap p\mathbb{Z}_{(p)} = p\mathbb{Z}$.

Avec la proposition, on a alors $(1 + x)^{np} \equiv (1 + x^p)^n \pmod{np\mathbb{Z}_{(p)}[x]}$ pour tout entier $n \geq 0$. Cela signifie que $\binom{np}{kp} \equiv \binom{n}{k} \pmod{np\mathbb{Z}_{(p)}}$ alors que $\binom{np}{k} \equiv 0 \pmod{np\mathbb{Z}_{(p)}}$ si p ne divise pas k .

Exemple 3. Reprenant le contexte de la section 1, on considère $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[\zeta]$, des entiers $a, b, n \geq 1$ et un nombre premier $p \neq 5$. Les nombres de Fibonacci sont alors des éléments de $\mathcal{A}_{(p)}$. Comme

$$(1 + \zeta^a + \zeta^b)^p \equiv 1 + (\zeta^a + \zeta^b)^p \equiv 1 + \zeta^{ap} + \zeta^{bp} \pmod{p\mathcal{A}},$$

on a $(1 + \zeta^a + \zeta^b)^{np} \equiv (1 + \zeta^{ap} + \zeta^{bp})^n \pmod{np\mathcal{A}_{(p)}}$. On peut ainsi écrire

$$\begin{aligned} F_{np} &= \frac{1 + 2\zeta + 2\zeta^4}{5} \left((1 + \zeta + \zeta^4)^{np} - (1 + \zeta^2 + \zeta^3)^{np} \right) \\ &\equiv \frac{1 + 2\zeta + 2\zeta^4}{5} \left((1 + \zeta^p + \zeta^{4p})^n - (1 + \zeta^{2p} + \zeta^{3p})^n \right) \pmod{np\mathcal{A}_{(p)}}. \end{aligned}$$

Comme $\zeta^5 = 1$, on peut réduire modulo 5 les exposants de ζ . Si $p \equiv 1$ ou $p \equiv 4$ modulo 5, on a

$$F_{np} \equiv \frac{1 + 2\zeta + 2\zeta^4}{5} \left((1 + \zeta + \zeta^4)^n - (1 + \zeta^2 + \zeta^3)^n \right) = F_n \pmod{np\mathcal{A}_{(p)}},$$

alors que si $p \equiv 2$ ou $p \equiv 3$ modulo 5, on obtient

$$F_{np} \equiv \frac{1 + 2\zeta + 2\zeta^4}{5} \left((1 + \zeta^2 + \zeta^3)^n - (1 + \zeta + \zeta^4)^n \right) = -F_n \pmod{np\mathcal{A}_{(p)}}.$$

Les congruences finales $F_{np} \equiv \pm F_n$ modulo $np\mathbb{Z}_{(p)}[\zeta]$ mettent en relation des nombres entiers, elles sont donc valables modulo $np\mathbb{Z}_{(p)}$ sans référence à ζ . On a la reformulation suivante (pour $n \geq 1$).

$$\frac{F_{np} - F_n}{np} \text{ est } p\text{-entier si } p \equiv \pm 1 \text{ modulo } 5, \quad \frac{F_{np} + F_n}{np} \text{ est } p\text{-entier si } p \equiv \pm 2 \text{ modulo } 5.$$

Avec $n = 1$, on trouve un résultat plus connu : $F_p - 1$ est divisible par p lorsque $p \equiv \pm 1$ modulo 5, alors que $F_p + 1$ est divisible par p lorsque $p \equiv \pm 2$ modulo 5.

Améliorations. On peut écrire $(1 + \zeta^a + \zeta^b)^{m+np} \equiv (1 + \zeta^a + \zeta^b)^m (1 + \zeta^{ap} + \zeta^{bp})^n \pmod{np\mathcal{A}_{(p)}}$ (même si $m < 0$ lorsque $(a; b) = (1; 4)$ ou $(a; b) = (2; 3)$) et adapter le raisonnement précédent.

1) Si $p \equiv \pm 1$ modulo 5, c'est-à-dire si $p \equiv \pm 1$ modulo 10 (puisque p est impair), on trouve

$$F_{m+np} \equiv \frac{1 + 2\zeta + 2\zeta^4}{5} \left((1 + \zeta + \zeta^4)^{m+n} - (1 + \zeta^2 + \zeta^3)^{m+n} \right) = F_{m+n} \pmod{np\mathcal{A}_{(p)}}.$$

La congruence finale $F_{m+np} \equiv F_{m+n}$ est valable modulo $np\mathbb{Z}_{(p)}$, et même modulo $np\mathbb{Z}$ si n est une puissance de p . En particulier, pour un entier $k \geq 0$, on a

$$F_{m+(p-1)p^k} = F_{(m-p^k)+p^k \cdot p} \equiv F_m \pmod{p^{k+1}\mathbb{Z}}.$$

La suite de Fibonacci modulo p^{k+1} est donc périodique et sa période divise $(p-1)p^k$. (*)

2) Dans le cas $p \equiv \pm 2$ modulo 5, c'est-à-dire $p = 2$ ou $p \equiv \pm 3$ modulo 10, on trouve

$$F_{m+np} \equiv \frac{1 + 2\zeta + 2\zeta^4}{5} \left((1 + \zeta + \zeta^4)^m (1 + \zeta^2 + \zeta^3)^n - (1 + \zeta^2 + \zeta^3)^m (1 + \zeta + \zeta^4)^n \right) \pmod{np\mathcal{A}_{(p)}}.$$

Comme $(1 + \zeta + \zeta^4)(1 + \zeta^2 + \zeta^3) = \varphi \cdot \widehat{\varphi} = -1$, on a

$$F_{m+np} \equiv \frac{1 + 2\zeta + 2\zeta^4}{5} (-1)^n \left((1 + \zeta + \zeta^4)^{m-n} - (1 + \zeta^2 + \zeta^3)^{m-n} \right) = (-1)^n F_{m-n} \pmod{np\mathcal{A}_{(p)}}.$$

La congruence finale $F_{m+np} \equiv (-1)^n F_{m-n}$ est valable modulo $np\mathbb{Z}_{(p)}$, et même modulo $np\mathbb{Z}$ si n est une puissance de p . En particulier, pour un entier $k \geq 0$, on a

$$F_{m+2(p+1)p^k} = F_{(m+2p^k)+2p^k \cdot p} \equiv F_m \pmod{2p^{k+1}\mathbb{Z}}.$$

La suite de Fibonacci modulo p^{k+1} est donc périodique et sa période divise $2(p+1)p^k$. (*)

3 Période de Pisano

On considère un entier $n \geq 2$. Comme il n'y a que n^2 réductions modulo n possibles des paires $(F_a; F_{a+1})$, il existe deux paires différentes qui ont la même réduction, c'est-à-dire deux indices $b > a \geq 0$ tels que $F_b \equiv F_a$ et $F_{b+1} \equiv F_{a+1}$ modulo n . Par soustraction, on trouve $F_{b-1} \equiv F_{a-1}$, et ainsi de suite jusqu'à obtenir $F_{b-a+1} \equiv F_1 = 1$ et $F_{b-a} \equiv F_0 = 0$. On alors $F_{b-a+k} \equiv F_k$ modulo n pour tout entier k . La suite de Fibonacci modulo n est donc périodique et la période divise $b - a$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
F_k	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584
mod 2	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
mod 3	0	1	1	2	0	2	2	1	0	1	1	2	0	2	2	1	0	1	1
mod 4	0	1	1	2	3	1	0	1	1	2	3	1	0	1	1	2	3	1	0

La période de Pisano $\pi(n)$ est le plus petit entier positif qui vérifie $F_{k+\pi(n)} \equiv F_k \pmod{n}$ pour tout entier k . On a en particulier $F_{\pi(n)} \equiv 0$ et $F_{1+\pi(n)} \equiv 1$ modulo n et ces deux congruences suffisent pour caractériser $\pi(n)$. Ainsi, dans le programme Python ci-dessous, on calcule $(F_c \pmod{n}; F_{c+1} \pmod{n})$ à partir de $(F_1; F_2)$ jusqu'à obtenir $(0; 1)$ ou $(1; 0)$, ce dernier cas engendrant $(0; 1)$ à l'étape suivante.

```
def pisano(n):
    a = b = c = 1
    while a+b != 1 :
        a, b, c = b, (a+b)%n, c+1
    return(c+a)
print([pisano(k) for k in range(2,21)])
```

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\pi(n)$	3	8	6	20	24	16	12	24	60	10	24	28	48	40	24	36	24	18	60

Résultats principaux

- 1) Si m divise n , alors $\pi(m)$ divise $\pi(n)$;
- 2) Si m et n sont premiers entre eux, alors $\pi(mn) = \text{ppmc}(\pi(m), \pi(n))$.

Tout entier $n \geq 2$ admet une unique factorisation en nombres premiers, disons $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ avec $p_1 < p_2 < \dots < p_m$, et on a alors $\pi(n) = \text{ppmc}(\pi(p_1^{k_1}), \pi(p_2^{k_2}), \dots, \pi(p_m^{k_m}))$. Il suffit donc d'étudier $\pi(p^k)$ pour tout nombre premier p et tout entier $k \geq 1$.

- 3) $\pi(p^k) = \pi(p)p^s$ avec un certain nombre $s = s_p(k) \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$;
- 4) $\pi(2) = 3$ et $s_2(k) = k - 1$, autrement dit $\pi(2^k) = 3 \cdot 2^{k-1}$;
- 5) $\pi(5) = 20$ et $s_5(k) = k - 1$, autrement dit $\pi(5^k) = 20 \cdot 5^{k-1} = 4 \cdot 5^k$;
- 6) Si $p \equiv \pm 1 \pmod{10}$, alors $\pi(p)$ divise $p - 1$;
- 7) Si $p \equiv \pm 3 \pmod{10}$, alors $\pi(p)$ divise $2(p + 1)$.

PREUVES (inspirées de [2], section 3.1)

1) Si m divise n , les congruences $F_{\pi(n)} \equiv 0$ et $F_{1+\pi(n)} \equiv 1$ modulo n sont aussi valables modulo m .

2) Par le résultat 1), $\pi(mn)$ est divisible par $\pi(m)$ et par $\pi(n)$, donc par leur plus petit multiple commun. A l'inverse, $\pi(mn)$ divise $\mathbf{p} = \text{ppmc}(\pi(m), \pi(n))$ car pour tout entier k , on a $F_{\mathbf{p}+k} \equiv F_k$ modulo m et modulo n , donc modulo mn puisque m et n sont premiers entre eux (si un entier est divisible par deux entiers premiers entre eux, alors il est divisible par leur produit).

Pour la suite, on considère l'ensemble \mathcal{A} des matrices 2×2 à coefficients entiers. On peut montrer par induction que les puissances de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont $M^k = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}$ et $M^k \equiv I \pmod{n\mathcal{A}}$ signifie que $\pi(n)$ divise k .

3) Pour $k \geq 1$, on a $M^{\pi(p^k)} \equiv I$ modulo $p^k\mathcal{A}$. Par la proposition de la section 2, on en déduit que $M^{p\pi(p^k)} = (M^{\pi(p^k)})^p \equiv I$ modulo $p^{k+1}\mathcal{A}$, donc $\pi(p^{k+1})$ divise $p\pi(p^k)$. Il existe un nombre entier n tel que $n\pi(p^{k+1}) = p\pi(p^k)$ et ceci divise $p\pi(p^{k+1})$ par le résultat 1). Il s'ensuit que n divise p , donc $\pi(p^{k+1}) = \pi(p^k)$ ou $\pi(p^{k+1}) = p\pi(p^k)$. On conclut facilement en itérant le raisonnement.

4) L'assertion est vérifiée pour $k \in \{1, 2\}$ et on considère ici un entier $k \geq 3$. Dans l'exemple 1 de la section 2, il a été établi que $5^n \equiv 1 + 4n$ modulo $8n\mathbb{Z}$ lorsque n est une puissance de deux. Comme $M^6 = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \equiv 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ modulo $8\mathcal{A}$, on en déduit

$$M^{3 \cdot 2^{k-2}} = M^{6 \cdot 2^{k-3}} = (M^6)^{2^{k-3}} \equiv 5^{2^{k-3}} I \equiv (1 + 2^{k-1})I \pmod{2^k\mathcal{A}}.$$

On a en particulier $M^{3 \cdot 2^{k-2}} \not\equiv I \pmod{2^k\mathcal{A}}$ et $\pi(2^k)$ ne divise pas $3 \cdot 2^{k-2}$. Par le résultat 3), on sait que $\pi(2^k) = 3 \cdot 2^s$ avec $s = s_2(k) \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. La seule possibilité est alors $s_2(k) = k-1$.

5) L'assertion est valable pour $k = 1$ et on considère ici un entier $k \geq 2$. On peut vérifier que

$$(x - y)^5 = x^5 - y^5 - 5xy(x - y)^3 - 5(xy)^2(x - y).$$

En posant $x = \varphi^n$ et $y = \widehat{\varphi}^n$, puis en divisant par $\sqrt{5}$, on obtient (par la formule de Binet "classique") $25F_n^5 = F_{5n} - 25(-1)^n F_n^3 - 5F_n$, autrement dit

$$F_{5n} = 5F_n(5F_n^4 + 5(-1)^n F_n^2 + 1).$$

La plus grande puissance de 5 qui divise F_{5n} est alors $v_5(F_{5n}) = 1 + v_5(F_n)$, donc

$$v_5(F_{4 \cdot 5^{k-1}}) = 1 + v_5(F_{4 \cdot 5^{k-2}}) = \dots = k - 1 + v_5(F_4) = k - 1.$$

Cela signifie que $F_{4 \cdot 5^{k-1}}$ se divise par 5^{k-1} mais pas par 5^k . En particulier, $\pi(5^k)$ ne divise pas $4 \cdot 5^{k-1} = 20 \cdot 5^{k-2}$. Par le résultat 3), on sait que $\pi(5^k) = 20 \cdot 5^s$ avec $s = s_5(k) \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. La seule possibilité est alors $s_5(k) = k-1$.

6) et 7) découlent des faits (*) établis dans la section 2 (paragraphe "Améliorations") avec $k = 0$. \square

Références

- [1] ALEXANDRE JUNOD, *Nombres de Fibonacci et approximation diophantienne*, Bulletin de la SSPMP N° 152 (mai 2023)
- [2] MARC RENAULT, *The Fibonacci Sequence Under Various Moduli*, 1996 <http://webpace.ship.edu/msrenault/fibonacci/FibThesis.pdf>

CRM¹⁰⁰ \cong 2025

Pour fêter ses 100 ans d'existence, la Commission Romande de Mathématique (CRM) organise une conférence exceptionnelle à destination des enseignantes et enseignants de mathématiques et de physique.

Mercredi 17 septembre 2025 dès 15h00

Auditoire Mathias Mayor du CHUV à Lausanne

Inscriptions sur <https://crm.sspmp.ch/cours/> avant le 15 juillet 2025

- ∞ 15h00-15h20 : Accueil
- ∞ 15h20-15h30 : Mot de bienvenue
- ∞ 15h30-16h30 : Exposé de Hugo Duminil-Copin
- ∞ 16h30-16h45 : Pause
- ∞ 16h45-17h45 : Exposé de Kathryn Hess Bellwald
- ∞ 17h45 : Apéritif

Hugo Duminil-Copin (UNIGE, IHES)

AnaLogique : ce qui se cache derrière le raisonnement mathématique.

L'analogie est au cœur de la pensée mathématique. Elle représente un outil essentiel pour manipuler et comprendre les concepts complexes qui structurent cette discipline. Inversement, les mathématiques excellent dans la construction et l'exploration de ces ponts invisibles, reliant des idées parfois si éloignées. Dans cet exposé, nous vous proposons de découvrir, à travers les yeux d'un mathématicien, l'importance fondamentale de l'analogie dans le processus mathématique. Nous vous convions à un voyage à travers l'immensité du monde mathématique, où l'analogie devient le véhicule permettant de franchir, en un instant, des distances infinies séparant les concepts abstraits.

Kathryn Hess Bellwald (EPFL)

Aventures mathématiques en biologie

Malgré leur nom, il s'avère que les mathématiques "pures" ne sont en fait pas dépourvues d'applications réelles et significatives. Pendant cet exposé, je présenterai quelques exemples d'applications probantes de maths "pures" en biologie, notamment en neuroscience et en biologie du cancer.

Impressum

Herausgeber — *Éditeur*

VSMP – SSPMP – SSIMF

Korrespondenz — *Correspondance*

Franz Meier franz.meier@vsmp.ch
Werner-Kälin-Strasse 1 Tel. 041 210 25 58
8840 Einsiedeln

Layout — *Mise en page*

Samuel Byland samuel.byland@vsmp.ch
Weinbergstrasse 48b Tel. 079 728 63 97
5000 Aarau

Inserateverwaltung — *Publicité*

Hansjürg Stocker hjstocker@vsmp.ch
Friedheimstrasse 11 Tel. 044 780 19 37
8820 Wädenswil

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

— *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:

ganzseitig Fr. 500.–
halbseitig Fr. 300.–

Beilagen:

bis 20 g Fr. 500.–
über 20 g nach Vereinbarung

Adressänderungen — *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder — Membres de la SSPMP:
VSG – SSPES – SSISS
Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)
Monbijoustrasse 36
3011 Bern
Tel. 031 382 52 33
information@vsg-sspes.ch

übrige Abonnenten — autres abonnés:

Franz Meier franz.meier@vsmp.ch
Werner-Kälin-Str. 1 Tel. 041 210 25 58
8840 Einsiedeln

Auflage — *Tirage*

800 Exemplare
erscheint dreimal jährlich

Präsident VSMP — SSPMP — SSIMF

Josef Züger praesident@vsmp.ch
Via Salens Tel. 081 641 10 94
7402 Bonaduz

Deutschscheizerische Mathematikkommission

Andrea Peter praesidium@dmk.vsms.ch
Kantonsschule Sursee
Moosgasse 11
6210 Sursee

Deutschscheizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@vsmp.ch
Gymnasium Burgdorf Tel. 031 638 03 03
Pestalozzistrasse 17
3400 Burgdorf

Commission Romande de Mathématique

Sylvie Luisier sylvie.luisier@vsmp.ch
39, ch. des Sellières Tél. 078 689 34 11
1219 Aïre

Commission Romande de Physique

Yves Oestreicher yves.oestreicher@vsmp.ch
Malvand 13 Tél. 079 796 69 95
1292 Chambésy

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Guido Lob guido.lob@vsmp.ch
Via Borghese 14 Tel. 078 663 13 37
6600 Locarno

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

— *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 159 31.07.2025 (Ende September)
Nr. 160 30.11.2025 (Ende Januar)
Nr. 161 31.03.2026 (Ende Mai)

Druck und Versand — *Imprimerie*

Niedermann Druck AG
Letzistrasse 37
9015 St. Gallen
www.niedermanndruck.ch

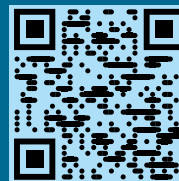
Internet:

www.vsms.ch – www.sspmp.ch – www.ssimf.ch

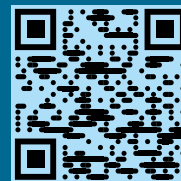


VSMP
SSPMP
SSIMF

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica



Online-Anmeldung



Inscription en Ligne