

Neugründung: EducaTec – Systems GmbH

Mehr Support, Training & Services für Messtechniksysteme in Schullaboren

Die EducaTec – Systems GmbH wurde von Vance Carter, Oliver Gallus und Patrick Koch als Schwesterfirma der EducaTec AG gegründet, um Schullaboren in der Schweiz und Liechtenstein noch gezieltere Dienstleistungen wie Support, Training und andere Services für Vernier Science Education sowie andere Messtechniksysteme anzubieten.

Seit Februar 2024 hat EducaTec – Systems GmbH die Produktlinien Vernier und Ohaus von der EducaTec AG übernommen und führt sie weiter. Sarah Carter hat die EducaTec AG übernommen und wird die übrigen Produkte weiterentwickeln. Beide Unternehmen werden weiterhin zusammenarbeiten.

Oliver Gallus und Vance Carter sind erfahrene Elektroingenieure, wobei Herr Gallus zusätzlich einen PhD in Physik hat. Patrick Koch übernimmt die Geschäftsleitung.

Unsere langjährige Erfahrung in diesem Bereich ermöglicht es uns, Sie kompetent zu beraten. Unsere Mission ist es, Ihnen die notwendigen Werkzeuge an die Hand zu geben, um die wissenschaftliche Neugier bei den Studierenden zu wecken.

Wir bieten Service und Training vor Ort nach Bedarf. Reparaturen, Garantiarbeiten und Support versuchen wir, so weit wie möglich alles in der Schweiz vorzunehmen.



Von links:
Oliver Gallus
Patrick Koch
Vance Carter

Vernier Graphical Analysis® Pro

In Echtzeit wissenschaftliche Daten sammeln, graphisch aufbereiten und analysieren

Vernier Graphical Analysis® Pro unterstützt Schüler:innen, die Zusammenhänge zwischen abstrakten wissenschaftlichen Konzepten und der physischen Welt zu verstehen.

Die Software ist mit praktisch allen Vernier-Sensoren kompatibel, inklusive der kabellosen Bluetooth-Sensoren. Die Pro-Version ist als 1- oder 3-Jahres-Standortlizenz erhältlich. Vernier bietet auch eine kostenlose Version an.



Oliver Gallus
Physiklehrer und Vernier-Spezialist
oliver.gallus@educatec-systems.ch

Der Vergleich mit Logger Pro 3

Logger Pro 3 ist punkto Datenanalyse eine bewährte All-in-one-Lösung. Sie beinhaltet bspw. Spektrometrie-Funktionen, die in Graphical Analysis nur separat verfügbar sind. Im Gegensatz zu Graphical Analysis ist Logger Pro jedoch nicht mit den kabellosen Go-Direct-Sensoren kompatibel.

Übersicht der neusten Analyse-Tools von Vernier

- Vernier Graphical Analysis® Pro oder Basic
- Vernier Video Analysis
- Vernier Spectral Analysis® (kostenlos)
- Vernier Instrumental Analysis® (kostenlos)

Da Logger Pro 3 künftig noch gepflegt, aber nicht weiterentwickelt wird, empfehlen wir mittelfristig den Umstieg auf Vernier Graphical Analysis®:

«Vernier Graphical Analysis ist einfacher in der Handhabung und intuitiver. Zudem unterstützt die App alle wichtigen Betriebssysteme und ist gut ausgerüstet fürs BYOD. Die Templates zu den Experiment-Büchern sind teilweise schon vorhanden und werden laufend hinzugefügt.»

EducaTec – Systems GmbH

Telefon +41 31 511 87 40
info@educatec-systems.ch
www.educatec-systems.ch

Business Office
Grossächerstrasse 2
8966 Oberwil-Lieli

Service Center
Bahnhof 1
3313 Büren zum Hof

Bulletin N° 157

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| AUS DEM VORSTAND | 5 |
| Josef Züger Gedanken des Präsidenten/Pensée du président/Pensieri del presidente | 5 |
| DEUTSCHSCHWEIZERISCHE MATHEMATIKKOMMISSION | 6 |
| Beat Jaggi Noch mehr Rätsel von Sam Loyd und Diophantische Gleichungen | 6 |
| Herbert Bruderer Historische Vermessungsgeräte | 13 |
| René Fehlmann Ewiger Quadrupel-Lauf in der Sekantenmethode | 18 |
| Hans-Jürgen Elschenbroich und Wilfried Dutkowski „Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer“ vor 25 Jahren und heute | 22 |
| DEUTSCHSCHWEIZERISCHE PHYSIKKOMMISSION | 30 |
| Martin Lieberherr Saitenpendel | 30 |
| COMMISSION ROMANDE DE MATHÉMATIQUE | 33 |
| Jean-Marie Urfer Cryptologie | 33 |
| Christian Aebi L'irrationalité d'une pyramide régulière | 34 |
| COMMISSIONE DI MATEMATICA DELLA SVIZZERA ITALIANA | 36 |
| Guido Lob La risoluzione grafica di equazioni – Il metodo di Lill | 36 |

Internet-Adressen – *Adresses Internet*

www.vsmp.ch – www.sspmp.ch – www.ssimf.ch

Titelseite – *Page de Titre*

Ewiger Quadrupellauf. Artikel auf Seite 18 in dieser Ausgabe.

Josef Züger

Präsident VSMP, praesident@vsmp.ch

Gedanken des Präsidenten

Pensées du président

Pensieri del presidente

Liebe Leserinnen, liebe Leser

Wir stehen am Anfang des Kalenderjahres 2025. In vielen Kantonen wird dieses wegweisend für die Ausgestaltung der zukünftigen Maturitätslehrgänge sein. In einigen Kantonen wurden bereits erste Ideen und Beschlüsse zur Umsetzung der WEGM bekanntgegeben, in anderen Kantonen sind noch keine Details bekannt. Aus meiner Sicht ist es jetzt wichtig, dass die Lehrpersonen für Mathematik und Physik in ihren Kantonen und an ihren Schulen Einfluss nehmen und das Ziel verfolgen, dass unsere Fächer die ihr zustehende Wichtigkeit behalten und die dafür notwendige Anzahl Lektionen in den Stundentafeln erhalten. Zudem ist darauf zu achten, dass unsere Fächer im Bereich der Schwerpunkt- und Ergänzungsfächer angeboten werden, sei es in der bisherigen Kombination von Physik und Anwendungen der Mathematik oder sei es im Rahmen von neuen Angeboten, wenn dadurch die MINT-Ausbildung an den Gymnasien gestärkt werden kann.

Es ist jetzt der Zeitpunkt in den Kantonen und Schulen den Stellenwert unserer Fächer einzufordern. Die Erfahrung zeigt, was einmal weg ist, kommt in naher Zukunft nicht mehr zurück. Die letzte grosse Revision der Maturitätslehrgänge liegt bereits 30 Jahre zurück. Wo wir es jetzt nicht schaffen, genügend Lektionen für unsere Fächer in die Ausbildungsgänge einzubauen, werden diese wohl für die kommenden 30 Jahre verloren sein.

Josef Züger, Präsident VSMP



Chères lectrices, chers lecteurs,

Nous sommes au début de l'année civile 2025. Dans de nombreux cantons, celle-ci sera déterminante pour la conception des futures filières de maturité. Dans certains cantons, les premières idées et décisions concernant la mise en œuvre du nouveau RRM ont déjà été annoncées, dans d'autres cantons, les détails ne sont pas encore connus. De mon point de vue, il est maintenant important que les enseignant-e-s de mathématiques et de physique exercent une influence dans leur canton et leurs écoles et soient attentifs-ves à ce que nos disciplines conservent l'importance qui leur revient et obtiennent ou maintiennent le nombre de leçons nécessaires dans les grilles horaires. Il faut en outre veiller à ce que nos disciplines soient proposées dans le domaine des options spécifiques et complé-

mentaires, que ce soit dans la combinaison actuelle de la physique et de l'application des mathématiques ou dans le cadre de nouvelles offres, si cela permet de renforcer la formation MINT dans les gymnases.

C'est le moment de souligner, dans les cantons et les écoles, la valeur importante de nos disciplines dans la formation des étudiant-e-s. L'expérience montre que ce qui a été supprimé ne reviendra pas dans un avenir proche. La dernière grande révision des filières de maturité remonte déjà à 30 ans. Si nous ne parvenons pas maintenant à intégrer suffisamment de leçons pour nos matières dans les cursus de formation, celles-ci seront probablement perdues pour les 30 années à venir.

Josef Züger, Président de la SSPMP



Care lettrici, cari lettori,

siamo all'inizio dell'anno civile 2025. In molti cantoni quest'anno sarà determinante per la progettazione dei futuri percorsi di maturità. In alcuni cantoni le prime idee e decisioni sull'attuazione del ORM sono già state annunciate; in altri invece i dettagli non sono ancora stati precisati. A mio avviso ora è importante che gli insegnanti di matematica e fisica esercitino la loro influenza nei loro cantoni e nelle loro scuole e perseguano l'obiettivo di garantire che le nostre materie conservino l'importanza che meritano. Fondamentale sarà dunque riuscire a mantenere o aumentare il numero di ore-lezione all'interno delle griglie orarie. Altrettanto importante sarà assicurare che le nostre materie continuino ad essere offerte come opzioni specifiche e complementari, sia nell'attuale combinazione di fisica e applicazioni della matematica sia come parte di nuove offerte, se ciò può rafforzare l'istruzione STEM nei licei.

È il momento di sottolineare nei cantoni e nelle scuole l'importanza delle nostre materie per la formazione dei nostri studenti e delle nostre studentesse. L'esperienza dimostra infatti che una volta che qualcosa è sparito non tornerà in un futuro prossimo. L'ultima importante revisione dei programmi di maturità risale a 30 anni fa: se non riusciamo a inserire nei programmi di studio un numero sufficiente di ore-lezione per le nostre materie il rischio è che queste vadano perse per i prossimi 30 anni.

Josef Züger, Presidente SSIMF

Noch mehr Rätsel von Sam Loyd und Diophantische Gleichungen

1 Einleitung

Im Bulletin N⁰156 [1] wurden Rätsel von Sam Loyd präsentiert, die auf lineare Diophantische Gleichungen führen.

In Folgenden geht es um Rätsel, die auf nichtlineare Diophantische Gleichungen führen. Auch diese Rätsel sind in den beiden Büchern [2] und [3] von Martin Gardner enthalten.

Zur Erinnerung: Diophantische Gleichungen, benannt nach dem griechischen Mathematiker Diophantes von Alexandria (um 100 - 350 ?), sind algebraische Gleichungen, für die nur ganzzahlige Lösungen gesucht sind. In den allermeisten Fällen hat eine Diophantische Gleichung mindestens zwei Unbekannte.

2 Nichtlineare Diophantische Gleichungen

Mrs. Wiggs Kohlköpfe (Aufgabe 53 in [3])

Mrs. Wiggs erklärte der lieben Mary, dass sie jetzt ein grösseres quadratisches Kohlbeet habe als im letzten Jahr und dass sie von nun an 211 Kohlköpfe mehr anpflanzen werde. Wer von den Mathematikern und Landwirten unter uns kann daraus ersehen, wieviele Kohlköpfe Mrs. Wiggs in diesem Jahr ernten wird?

Lösung: Ist x^2 die Zahl der angepflanzten Kohlköpfe in diesem Jahr, y^2 diejenige des letzten Jahres, so erhält man die folgende Gleichung:

$$x^2 - y^2 = 211$$

211 ist eine Primzahl, mit $(x - y)(x + y) = 211$ muss $x - y = 1$ und $x + y = 211$ gelten. Dieses Gleichungssystem hat die Lösung $x = 106$ und $y = 105$.

Antwort: Mrs. Wiggs wird in diesem Jahr $106^2 = 11'236$ Kohlköpfe anpflanzen, was gegenüber den $105^2 = 11'025$ Kohlköpfen des vergangenen Jahres tatsächlich einer Zunahme von 211 Kohlköpfen entspricht.

Rätsel um Diamanten und Rubine (Aufgabe 39 in [2])

Man sollte vielleicht wissen, dass Diamanten proportional zum Quadrat ihres Gewichtes und Rubine proportional zur dritten Potenz ihres Gewichtes im Wert steigen. Beispielsweise wäre, wenn ein reiner Diamant mit einem Karat 100 Dollar wert ist, ein zweikarätiger Stein der gleichen Qualität 400 Dollar wert und ein dreikarätiger von gleicher Reinheit 900 Dollar. Wenn ein reiner orientalischer Rubin mit einem Karat 200 Dollar wert ist, wäre ein zweikarätiger 1600 Dollar wert.

Ein angesehenener Kaufmann, der sich in den Diamantenminen von Brasilien, Cape Colony und anderen auf unserem Globus gut auskannte, zeigte mir ein Paar Ohringe, die er gegen zwei verschieden grosse Diamanten auf der Basis eines Karats im Werte von 100 Dollar, wie bereits erklärt, eingetauscht hatte. Können Sie abschätzen, wie gross die beiden Steine verschiedener Grösse waren, die er gegen ein Paar Ohringe gleicher Grösse eintauschte? Natürlich gibt es darauf viele Antworten, daher sollen Sie die kleinstmöglichen Grössen der Steine herausfinden, die dem Wert zweier von verschiedener Grösse entsprechen, ohne jedoch mit Bruchteilen eines Karats zu rechnen.

Lösung: Wir setzen x : Anzahl Karat des grösseren Diamanten, y : Anzahl Karat des kleineren Diamanten und z : Anzahl Karat eines Ohrings.

Wir bekommen die Gleichung

$$(100x)^2 + (100y)^2 = 2(100z)^2 \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = 2z^2 \quad (1)$$

Es ist schon lange bekannt, dass die Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{mit} \quad x, y, z \in \mathbb{N} \quad (2)$$

unendlich viele (nichttriviale) Lösungen hat, die Pythagoräischen Zahlentripel:

$x = r^2 - s^2, y = 2rs, z = r^2 + s^2$ mit natürlichen Zahlen $r > s$. Siehe zum Beispiel auf Seite 231 in [4].

Mit einem Trick können wir die Gleichung (1) auf (2) zurückführen:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2z^2 \\ 2x^2 + 2y^2 &= 4z^2 \\ x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 &= 4z^2 \\ (x + y)^2 + (x - y)^2 &= (2z)^2 \end{aligned}$$

Also muss $x + y = r^2 - s^2$, $x - y = 2rs$ und $2z = r^2 + s^2$ sein mit natürlichen Zahlen $r > s$, siehe oben.

$$\text{Daraus berechnet man schliesslich} \quad x = \frac{r^2 + 2rs - s^2}{2}, \quad y = \frac{r^2 - 2rs - s^2}{2} \quad \text{und} \quad z = \frac{r^2 + s^2}{2}$$

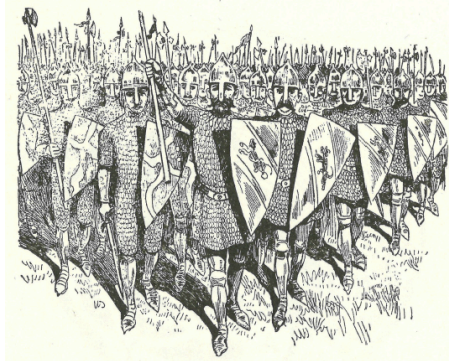
Damit x, y, z ganzzahlig werden, müssen r und s die gleiche Parität haben. Die kleinsten Werte ergeben sich für $r = 3$ und $s = 1$. So wird $x = 7$, $y = 1$ und $z = 5$.

Antwort: Der grössere Diamant hat 7 Karat (im Wert von 4900 Dollar), der kleinere Diamant hat 1 Karat (im Wert von 100 Dollar), die beiden Ohringe je 5 Karat (im Wert von je 2500 Dollar).

Eine weitere Lösung wäre übrigens $x = 17$, $y = 7$, $z = 13$, mit $r = 5$ und $s = 1$.

Die Schlacht von Hastings (Aufgabe 68 in [2])

Alle Studenten der Geschichte wissen um die geheimnisvollen und fragwürdigen Umstände der unvergesslichen Schlacht an jenem schicksalhaften 14. Oktober 1066. Durch den Sieg Wilhelms des Eroberers bei Hastings über den Angelsachsen Harold II. kam England unter normannische Herrschaft. Dieses Rätsel beschäftigt sich mit einem kuriosen Teil der Geschichte dieser Schlacht, dem bis heute nicht die Aufmerksamkeit zuteil geworden ist, die ihm gebührt.



Die fragliche Stelle, auf die Professor Dudeney besonders verweist, lautet: „Harolds Mannen waren in Reih und Glied aufmarschiert und bildeten 13 Quadrate, jedes mit der gleichen Anzahl Männer, und wehe dem verwegenen Normannen, der gewagt hätte, ihre Befestigungen zu betreten, denn schon ein einziger Stoss eines angelsächsischen Kriegsbeils würde genügen, seine Lanze zu brechen und seinen Panzer zu durchbohren“.

Wenn Harolds Streitkräfte, die in 13 Quadrate aufgeteilt waren, mit ihm zusammen auch ein einziges grosses Quadrat hätten bilden können, wieviel Männer müssen es dann gewesen sein? Dieses Rätsel ist derart schwierig, dass wahrscheinlich nur wenige Mathematiker in der Lage sind, die richtige Lösung zu finden.

Anmerkung: Der ursprüngliche Text wurde gekürzt.

Lösung: Bezeichnen wir mit y die Anzahl Männer an jeder Seite der 13 Quadrate und x ist Anzahl Männer an der Seite des einen grossen Quadrates, dann muss

$$13y^2 + 1 = x^2 \quad \text{oder} \quad x^2 - 13y^2 = 1 \quad (3)$$

gelten.

Leonhard Euler (1707-1783) hat Gleichungen dieses Typs irrtümlich nach dem Mathematiker John Pell (1611–1685) benannt; sie wurde aber zuerst von Pierre de Fermat (1607-1665) vorgestellt.

Lösungen der obigen Gleichung lassen sich mit der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{13}$ finden, siehe [4], Seite 351 ff.

Für diese Kettenbruchentwicklung wenden wir den Euklidischen Algorithmus auf $\sqrt{13}$ und 1 an:

$$\begin{aligned} \sqrt{13} &= 3 \cdot 1 + (\sqrt{13} - 3) \quad \text{mit } \sqrt{13} - 3 < 1 \\ 1 &= 1 \cdot (\sqrt{13} - 3) + (4 - \sqrt{13}) \quad \text{mit } 4 - \sqrt{13} < \sqrt{13} - 3 \\ \sqrt{13} - 3 &= 1 \cdot (4 - \sqrt{13}) + (2\sqrt{13} - 7) \quad \text{mit } 2\sqrt{13} - 7 < 4 - \sqrt{13} \\ 4 - \sqrt{13} &= 1 \cdot (2\sqrt{13} - 7) + (11 - 3\sqrt{13}) \quad \text{mit } 11 - 3\sqrt{13} < 2\sqrt{13} - 7 \\ 2\sqrt{13} - 7 &= 1 \cdot (11 - 3\sqrt{13}) + (5\sqrt{13} - 18) \quad \text{mit } 5\sqrt{13} - 18 < 11 - 3\sqrt{13} \\ 11 - 3\sqrt{13} &= 6 \cdot (5\sqrt{13} - 18) + (119 - 33\sqrt{13}) \quad \text{mit } 119 - 33\sqrt{13} < 5\sqrt{13} - 18 \end{aligned}$$

Die Terme werden scheinbar immer komplizierter, aber es gilt

$$\frac{5\sqrt{13} - 18}{119 - 33\sqrt{13}} = \frac{(5\sqrt{13} - 18)}{(119 - 33\sqrt{13})} \cdot \frac{(119 + 33\sqrt{13})}{(119 + 33\sqrt{13})} = \frac{3 + \sqrt{13}}{4} = \frac{1}{\sqrt{13} - 3} \quad (\text{Vergleiche mit Zeile 2 oben.})$$

und damit werden sich die Schritte in der obigen Entwicklung wiederholen!!

Der Kettenbruch von $\sqrt{13}$ lautet also

$$[3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}] = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}}}}}}$$

Die ersten Näherungsbrüche von $\sqrt{13}$ sind

$$3 = \frac{3}{1} = 3; \quad 3 + \frac{1}{1} = \frac{4}{1} = 4; \quad 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{7}{2} = 3.5; \quad 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{11}{3} = 3.\overline{6}; \quad 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = \frac{18}{5} = 3.6 ;$$

$$3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}}} = \frac{119}{33} = 3.\overline{60}; \quad 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1}}}}} = \frac{137}{38} \approx 3.6052; \quad 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}}} = \frac{256}{71} \approx 3.6056;$$

und schliesslich

$$3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}}} = \frac{393}{109} \approx 3.605504587; \quad 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}}} = \frac{649}{180} \approx 3.60\overline{5}$$

Für die Zähler und Nenner dieser Brüche gilt:

$$\begin{aligned} 3^2 - 13 \cdot 1^2 &= -4 \\ 4^2 - 13 \cdot 1^2 &= 3 \\ 7^2 - 13 \cdot 2^2 &= -3 \\ 11^2 - 13 \cdot 3^2 &= 4 \\ 18^2 - 13 \cdot 5^2 &= -1 \\ 119^2 - 13 \cdot 33^2 &= 4 \\ 137^2 - 13 \cdot 38^2 &= -3 \\ 256^2 - 13 \cdot 71^2 &= 3 \\ 393^2 - 13 \cdot 109^2 &= -4 \\ 649^2 - 13 \cdot 180^2 &= 1 \end{aligned}$$

Die kleinste ganzzahlige Lösung der Gleichung $x^2 - 13y^2 = 1$ lautet also $x = 649, y = 180$.

Antwort: Die 13 Quadrate, in die Harolds Streitkräfte aufgeteilt waren, bestanden aus je 180^2 Männern, was insgesamt $421'200$ Krieger ergibt. Mit Harold zusammen waren es dann $421'201$ Männer, die ein Quadrat mit 649 Mann an jeder Seite bildeten.

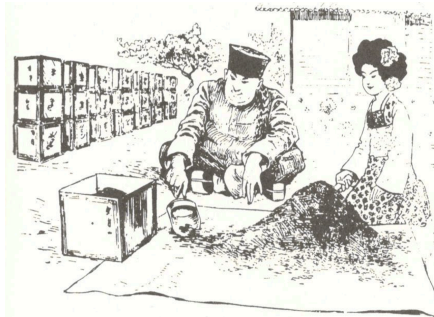
Bemerkungen:

- 421'200 Krieger! Fast nicht zu glauben, dass die Angelsachsen unter Harold II. die Schlacht bei Hastings dennoch verloren haben!! Da hat Sam Loyd doch etwas übertrieben. Nach historischen Quellen sollen es „nur“ etwa 7500 Krieger gewesen sein!
Offenbar hat Sam Loyd diese Aufgabe vom englischen Rätselexperten Henry Dudeney „geborgt“, siehe auch die entsprechende Stelle oben im Rätseltext. Bei Dudeney ist ursprünglich von 61 Quadraten die Rede. Die kleinste Lösung der Gleichung $x^2 - 61y^2 = 1$ lautet $x = 1'766'319'049$, $y = 226'153'980$, siehe bei der Antwort zu Aufgabe 68 in [2].
- Die Behauptung im Rästeltext, dass nur wenige Mathematiker in der Lage sind, die richtige Lösung zu finden, stimmt nur bedingt: Mit einem Tabellenkalkulationsprogramm entsteht in wenigen Sekunden die nachstehende Tabelle, in der für die ersten 181 natürlichen Zahlen y der Ausdruck $\sqrt{1 + 13y^2}$ berechnet wird.

| y | WURZEL(1+13*y^2) |
|------------|------------------|
| 1 | 3.741657387 |
| 2 | 7.280109889 |
| 3 | 10.86278049 |
| 4 | 14.45683229 |
| ... | ... |
| 178 | 641.7889061 |
| 179 | 645.394453 |
| 180 | 649 |
| 181 | 652.605547 |

Bei $y = 180$ taucht erstmals ein Ergebnis auf, das ebenfalls natürlich ist: $\sqrt{1 + 13 \cdot 180^2} = 649$.

Mischtee (Aufgabe 70 in [2])



Im Orient ist das Mischen von Tee eine derart exakte Wissenschaft, dass die Kombination verschiedener Teearten bis auf den millionstel Teil einer Unze ausgewogen wird! Man sagt, dass die Rezepte einiger berühmter und angesehener Teepflanzer hunderte von Jahren geheimgehalten wurden und nicht nachvollziehbar sind. Nur um die Komplikationen zu demonstrieren, die sich bei der Wissenschaft des Teemischens ergeben, und um zu zeigen, wie schwierig es ist, das Geheimnis zu durchdringen, das diese Kunst umgibt, möchte ich Ihre Aufmerksamkeit auf ein simples Rätsel lenken, das sich auf nur zwei Mischungen bezieht. Der Teemischer hat zwei Kisten erhalten, beide in Form eines Würfels, aber verschieden gross. Der grössere Würfel enthält schwarzen Tee, der kleinere grünen. Er hat den Inhalt beider vermischt und festgestellt, dass sich damit genau 22 würfelförmige Kisten gleicher Grösse füllen lassen. Angenommen, die Innenmasse aller Kisten können bis auf die letzte Dezimalstelle benannt werden, können Sie dann sagen, in welchem Verhältnis der grüne zum schwarzen Tee steht?
(Mit andern Worten: Finden Sie zwei verschiedene ganze Zahlen, und zwar derart, dass nach Addition ihrer dritten Potenzen die daraus resultierende Summe durch 22 teilbar ist, um eine Zahl zu erhalten, die eine ganzzahlige Kubikwurzel besitzt.)

Lösung: Bezeichnen wir die drei Zahlen mit x, y, z , dann gilt:

$$x^3 + y^3 = 22z^3$$

Eine Lösung lautet $x = 25'469$, $y = 17'299$ und $z = 9'954$.

Der schwarze und der grüne Tee müssen im Verhältnis $25'469^3 : 17'299^3 \approx 3.19 : 1$ gemischt werden.

Nach Betrachtung des Bildes muss davon ausgegangen werden, dass die Teekisten die Seitenlängen von 25.469 Zoll für den Schwarztee, 17.299 Zoll für den Grüntee und 9.954 Zoll für den Mischtee haben. (1 Zoll entspricht 2.54 Zentimeter.)

Beat Jaggi (jaggibe@outlook.com) nimmt Hinweise entgegen, wie wohl Sam Loyd diese Zahlen gefunden haben könnte - notabene ohne Taschenrechner und Computer!

Zum Schluss noch ein Rätsel, welches auf ein Diophantisches Gleichungssystem führt:

Lisas Pferch (Aufgabe 45 in [3])

Wie uns von Mutter Goose bestätigt wird, entdeckte der Zimmermann, der die Schafhürde (eingezäunter Bereich für Schafe) für Miss Lisa baute, dass sich zwei Pfosten einsparen liessen, wenn er das Feld quadratisch statt rechteckig anlegte.

„In beiden hat die gleiche Anzahl Schafe Platz“, sagte er, „aber beim Quadrat wird für jedes Schaf ein Pfosten benötigt, an dem man es festbinden kann!“

Wieviele Schafe muss es in dieser berühmten Herde gegeben haben? Vorausgesetzt, die Pfosten hatten bei beiden Konstruktionen den gleichen Abstand voneinander und die Grundfläche des quadratischen und des rechteckigen Pferchs wären gleich gross und die Herde bestand aus weniger als drei Dutzend Schafen.

Lösung: Nehmen wir der Einfachheit halber an, der Abstand der Posten betrage genau ein Meter.

Für ein Quadrat mit der Seitenlänge c (Meter) braucht es dann $4c$ Pfosten, für ein Rechteck der Masse $a \times b$ (Meter \times Meter) braucht es $2a + 2b$ Pfosten.

Wir erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ab &= c^2 \\ 2a + 2b &= 4c + 2 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung entnehmen wir $2c = a + b - 1$ oder $4c^2 = a^2 + b^2 + 1 + 2ab - 2a - 2b$, was nach der ersten Gleichung gleich $4ab$ sein muss.

So ergibt sich

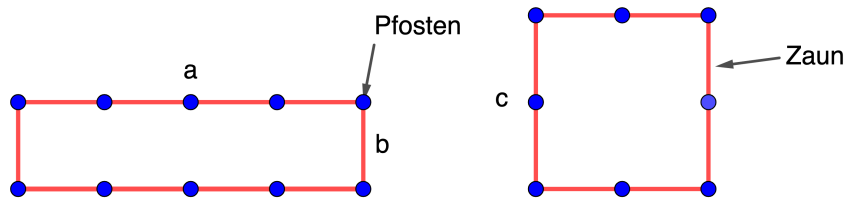
$$a^2 + b^2 + 1 - 2ab - 2a - 2b = a^2 - 2(b+1)a + b^2 - 2b + 1 = a^2 - 2(b+1)a + (b-1)^2 = 0,$$

und daraus $a = \frac{2(b+1) \pm \sqrt{4(b+1)^2 - 4(b-1)^2}}{2} = b + 1 \pm 2\sqrt{b} = (\sqrt{b} \pm 1)^2$.

Damit wird $c^2 = ab = b(\sqrt{b} \pm 1)^2 = (b \pm \sqrt{b})^2$.

Zusammengefasst: b muss eine Quadratzahl sein. Mit $b = m^2$ wird $a = (m \pm 1)^2$ und $c = m(m \pm 1)$. Wir betrachten die Lösungen mit $+$, da m und $m + 1$ zu gleichen Ergebnissen führt wie m und $m - 1$.

$m = 1$ ergibt $a = 4$, $b = 1$ und $c = 2$.



Für das Rechteck mit den Abmessungen 4 Meter \times 1 Meter braucht es 10 Pfosten, für das Quadrat mit den Abmessungen 2 Meter \times 2 Meter nur 8. In diesem Fall besteht die Herde aus 8 Schafen. (Anmerkung: Im Sinne des Tierschutzes ist zu hoffen, dass der Abstand zwischen den Pfosten mehr als 1 Meter betrug!!)

Mit $m = 2$ wird $a = 9$, $b = 4$ und $c = 6$.

Für das Rechteck mit den Abmessungen 9 Meter \times 4 Meter bräuchte es $2(9 + 4) = 26$ Pfosten, für das flächengleiche Quadrat mit den Abmessungen 6 Meter \times 6 Meter reichten $4 \cdot 6 = 24$ Pfosten. (Diese zweite Lösung fehlt in [3])

Literatur

- [1] Jaggi Beat: *Rätsel von Sam Loyd und Diophantische Gleichungen*, Bulletin des VSMP, 156, September 2024
- [2] Loyd, Sam und Gardner, Martin: *Mathematische Rätsel und Spiele*, Dumont Taschenbücher, 2020
- [3] Loyd, Sam und Gardner, Martin: *Vom Küken zum Ei, Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele*, Dumont Taschenbücher, 2015
- [4] Niven, Ivan; Zuckerman Herbert S.; Montgomery Hugh L.: *An Introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley & Sons, Inc. 1991

Für [4] siehe auch

<https://editorialdinosaurio.wordpress.com/wp-content/uploads/2012/03/itn-niven.pdf>

Herbert Bruderer
herbert.bruderer@bluewin.ch

Historische Vermessungsgeräte

Schon früh war die Mathematik von grosser Bedeutung für die Astronomie, die Seefahrt, die Zeitmessung und die Vermessung. Wie aus zeitgenössischen Lehrbüchern von Benjamin Bramer, Levinus Hulsius und Leonhard Zubler hervorgeht, ging es im 17. Jahrhundert vor allem um die Distanz- und Höhenmessung. Die “geometrischen Instrumente” glichen Proportionalwinkeln und hatten zum Teil einen Quersteg und einen Halbkreiswinkelmesser. Manche Vermessungsgeräte haben in Museen überlebt.

Benjamin Bramer spricht im dritten Teil seines Werks *Apollonius Cattus* vom “geometrischen Triangularinstrument”, welches das Messen von Höhen, Tiefen, Längen und Breiten ermöglicht. Er widmete sein Werk dem Landgrafen Wilhelm von Hessen. Der Distanzmesser sieht aus wie ein Proportionalwinkel mit zwei Schenkeln und einem drehbaren Zusatzlineal sowie einer Visiereinrichtung (vgl. Abb. 1). Manchmal wird es, wie in seiner *Trigonometria planorum mechanica* dargestellt, mit einem Winkelmesser (Transporteur) gekoppelt und auf ein Stativ gesetzt. Man bestimmte die Höhe von Türmen (vgl. Abb. 2), die Tiefe von Brunnen, die Lage von Wolken (vgl. Abb. 3). Das Werkzeug eignete sich auch für die Ermittlung des Flächeninhalts von Vielecken (vgl. Abb. 4). Für senkrechte Schächte in einem Bergwerk kamen auch Senklote zum Einsatz. Häufig stand die Vermessung im Dienst des Kriegs. Proportionalwinkel waren jeweils mit zahlreichen Skalen versehen. Bramer war der Schwager von Jost Bürgi, der unabhängig von John Napier die Logarithmen geschaffen hat.



Abb. 1: Distanzmessung mit einem Triangularinstrument.
Quelle: Benjamin Bramer: *Apollonius Cattus*, 3. Teil (4. Kapitel)

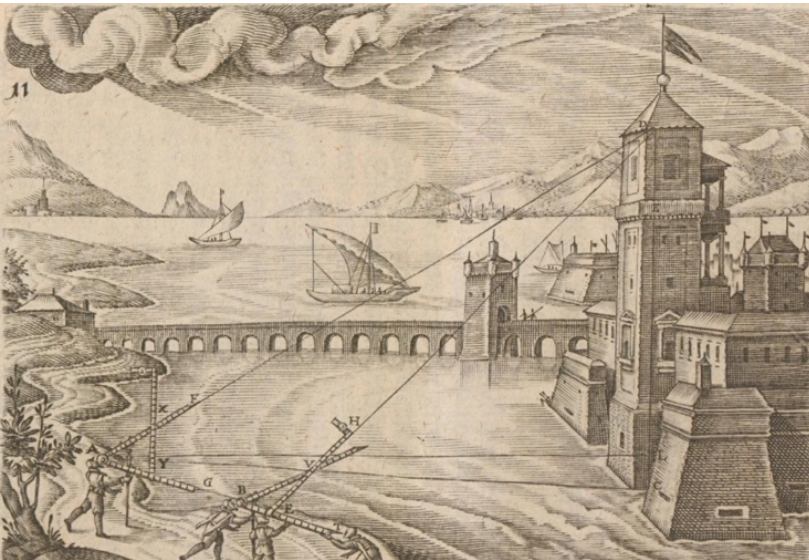


Abb. 2: Bestimmung der Höhe eines Turms mit einem Triangulinstrument. Quelle: Benjamin Bramer: Apollonius Cattus, 3. Teil (10. Kapitel)



Abb. 3: Bestimmung der Höhe einer Wolke mit einem Triangulinstrument. Quelle: Benjamin Bramer: Apollonius Cattus, 3. Teil (17. Kapitel)

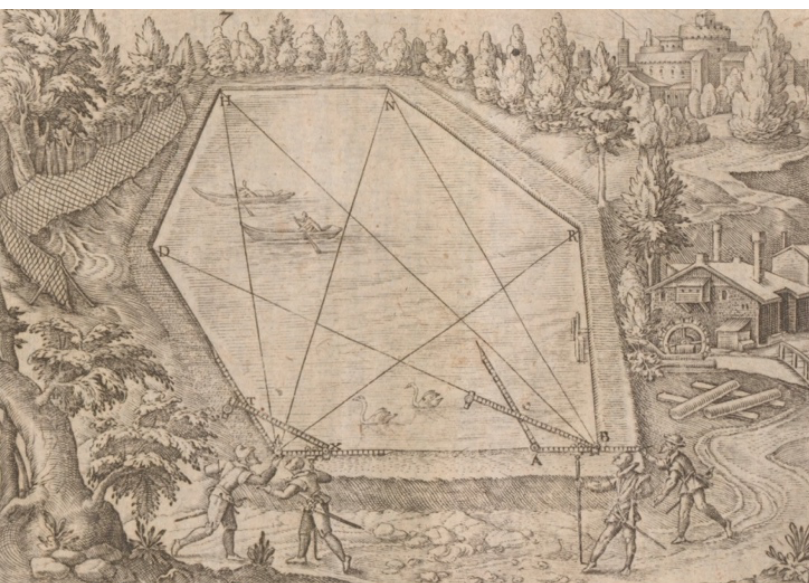


Abb. 4: Berechnung eines Vielecks mit einem Triangulinstrument. Quelle: Benjamin Bramer: Apollonius Cattus, 3. Teil (5. Kapitel)

Leonhard Zubler aus Zürich widmet sein Werk *Novum Instrumentum Geometricum* Herzog Friedrich von Württemberg. Er stellt sein “geometrisches Instrument” vor, das aus einem Proportionalwinkel mit einem zusätzlichen drehbaren Messstab und einem Halbkreiswinkelmesser (Halbkreisscheibe mit Kompass) besteht (vgl. Abb. 5). Auch in seinem Lehrbuch kommen kriegerische Anwendungen vor (vgl. Abb. 6). Weitere Beispiele betreffen die Messung der Turmhöhe (Abb. 7) oder die Bestimmung der Höhe von Bergen. Zubler erklärt, dass Thales von Milet diese “Geometria” in Ägypten erfunden und nach Griechenland gebracht haben soll. Er gibt auch Anweisungen zum Bau des Vermessungsgeräts.

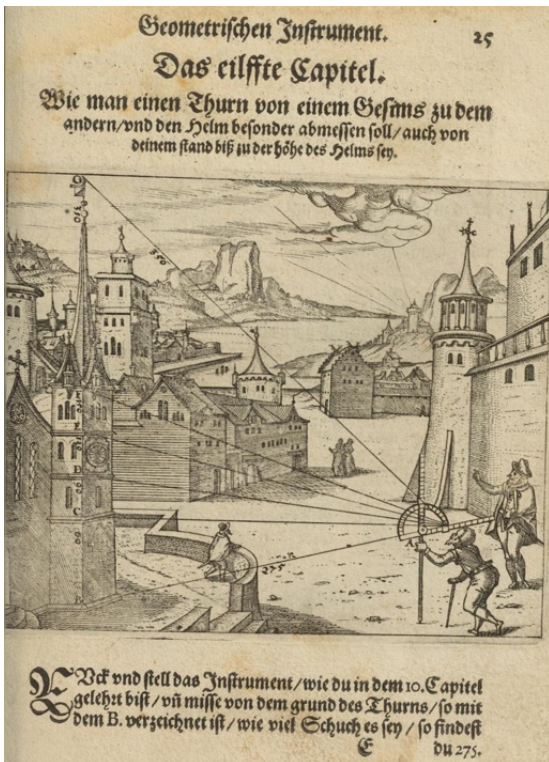


Abb. 5 (oben links): Vermessung mit einem geometrischen Instrument (Halbkreisscheibe mit Winkelmesser und Kompass und Proportionalwinkel mit drei Schenkeln). Quelle: Leonhard Zubler: *Novum instrumentum geometricum* (Seite 18)

Abb. 6 (oben rechts): Distanzmessung mit einem geometrischen Instrument (Proportionalwinkel mit Halbkreiswinkelmesser). Quelle: Leonhard Zubler: *Novum instrumentum geometricum* (Seite 16)

Abb. 7 (unten links): Bestimmung der Höhe eines Turms mit einem geometrischen Instrument (Proportionalwinkel mit Halbkreiswinkelmesser). Quelle: Leonhard Zubler: *Novum instrumentum geometricum* (Seite 25)

Levinus Hulsius führt in *Theoria et Praxis Quadrantis Geometrici* in den Gebrauch des geometrischen Quadranten (vgl. Abb. 8) ein. Damit lässt sich beispielsweise die Höhe von Türmen, Säulen und Bäumen bestimmen (vgl. Abb. 9). Auch Entfernungen und die Breite von Flüssen können berechnet werden. Das Instrument diente ferner für Berechnung der Schattenlänge. Zum Vergleich: Auf der Rückseite von Astrolabien (zweidimensionale Modelle des Himmels) ist oft ein Schattenquadrat vorhanden. Damit lässt sich beispielsweise die Höhe von Bergen messen. Der Begriff “umbra recta” bedeutet gerader Schatten, “umbra versa” steht für den umgekehrten Schatten. Hulsius beschreibt in seiner Schrift auch ein mathematisches Werkzeug mit einem Kompass.

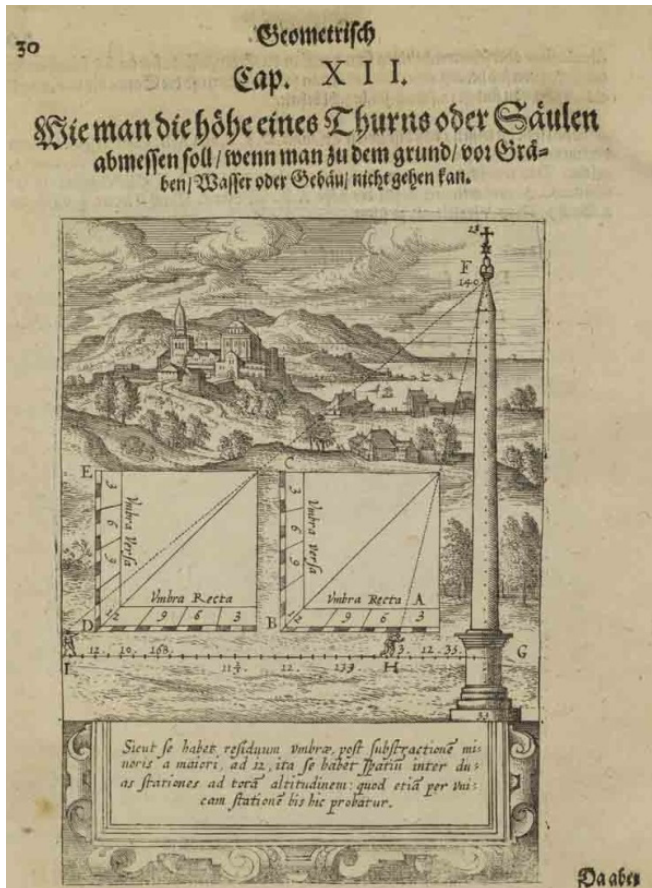
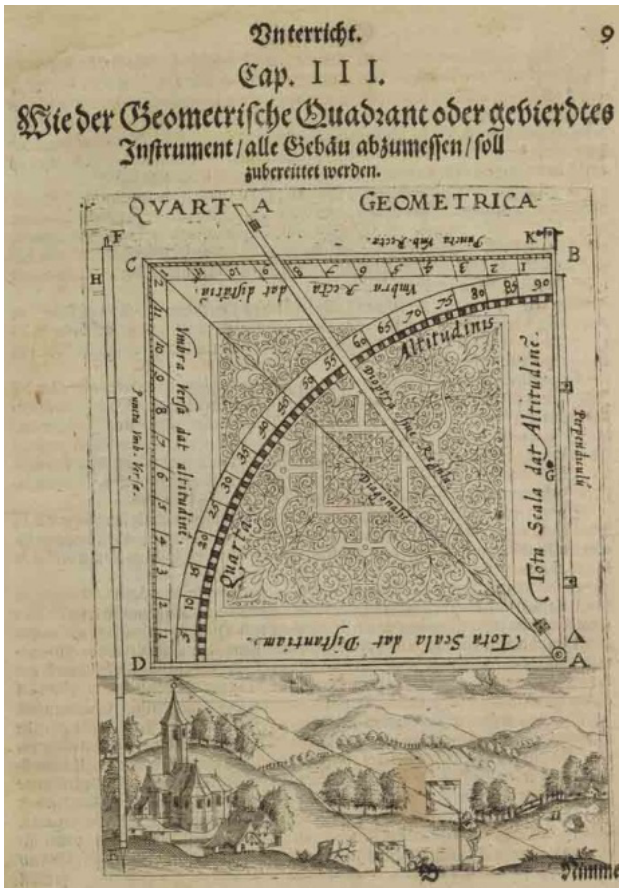


Abb. 8 (links): Geometrischer Quadrant, ein Hilfsmittel für die Höhen- und Distanzmessung. Quelle: Levinus Hulsius: *Theoria Et Praxis Quadrantis Geometrici* (Seite 9)

Abb. 9 (rechts): Bestimmung der Höhe einer Säule mit einem geometrischen Quadranten. Quelle: Levinus Hulsius: *Theoria Et Praxis Quadrantis Geometrici* (Seite 30)

Vermessungswerkzeuge in Museumssammlungen

Analoge Vermessungsgeräte bestehen oft aus Messing. Sie sind in manchen Sammlungen zu finden, beispielsweise in Dresden, Florenz, Kassel, London, Oxford und Paris. Im 17. Jahrhundert gab es bereits auch einfache Theodoliten.

Danksagung

Herzlichen Dank an die Bibliotheken für die Bereitstellung hochwertiger Fotos.

Quellen

- Bramer, Benjamin: Trigonometria planorum mechanica oder Unterricht unnd Beschreibung eines neuen und sehr bequemen geometrischen Instruments zu allerhand Abmessung und Solvirung der planischen Triangel derogleich, Paul Egenolff, Marburg 1617, 104 Seiten (Lehrbuch, Vermessung), ETH-Bibliothek Zürich, Rar 4012, <https://doi.org/10.3931/e-rara-1466>, Public Domain Mark
- Bramer, Benjamin: Apollonius Cattus, Oder Kern der gantzen Geometrieæ In drey Theil, Johann Ingebrands Buchhandlung, Kassel 1684, 272 Seiten (Lehrbuch, Vermessung), ETH-Bibliothek Zürich, Rar 5089, <https://doi.org/10.3931/e-rara-4043>, Public Domain Mark
- Hulsius, Levinus: Theoria Et Praxis Quadrantis Geometrici &c., Nürnberg 1594, 74 Seiten (Lehrbuch, Vermessung), [Digitale Sammlungen der Staatsbibliothek Bamberg](#), Staatsbibliothek Bamberg, <https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bvb:22-dtl-0000000012>, CC BY-SA 4.0
- Zubler, Leonhard: Novum instrumentum geometricum, Ludwig König, Basel 1625, 75 Seiten (Lehrbuch, Vermessung), Universitätsbibliothek Basel, UBH Rb 2067, <https://doi.org/10.3931/e-rara-74723>, Public Domain Mark

Weiterführende Schrift

- Bruderer, Herbert: Meilensteine der Rechentechnik, De Gruyter Oldenbourg, Berlin/Boston, 3rd edition 2020, volume 1, 970 pages, 577 figures, 114 tables, <https://doi.org/10.1515/9783110669664>
- Bruderer, Herbert: Meilensteine der Rechentechnik, De Gruyter Oldenbourg, Berlin/Boston, 3rd edition 2020, volume 2, 1055 pages, 138 figures, 37 tables, <https://doi.org/10.1515/9783110669671>
- Bruderer, Herbert: Milestones in Analog and Digital Computing, Springer Nature Switzerland AG, Cham, 3rd edition 2020, 2 volumes, 2113 pages, 715 illustrations, 151 tables, translated from the German by Dr John McMin, <https://doi.org/10.1007/978-3-030-40974-6>

René Fehlmann
rene.fehlmann@phbern.ch

Ewiger Quadrupel-Lauf in der Sekantenmethode

1 Einleitung

Das Newton-Raphson Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen einer (differenzierbaren) Funktion f liefert keine Lösung, wenn die berechnete Folge von Näherungswerten der Nullstelle

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

einen Wert x_{n+1} ergibt, welcher Nullstelle der Ableitung von f ist. Das Verfahren konvergiert aber auch in anderen Fällen nicht, zum Beispiel im Falle der Sinusfunktion mit Startwert $x_0 = -\arctan(\pi)$. Hier erhält man $x_n = x_0 + n \cdot \pi$. Andere Fälle, bei denen das Verfahren nicht konvergiert, sind ewige Paarläufe wie in Abbildung 1 dargestellt. Bei Hans Walser [1] findet man zahlreiche weitere Beispiele, die auf einen ewigen Paarlauflauf führen.

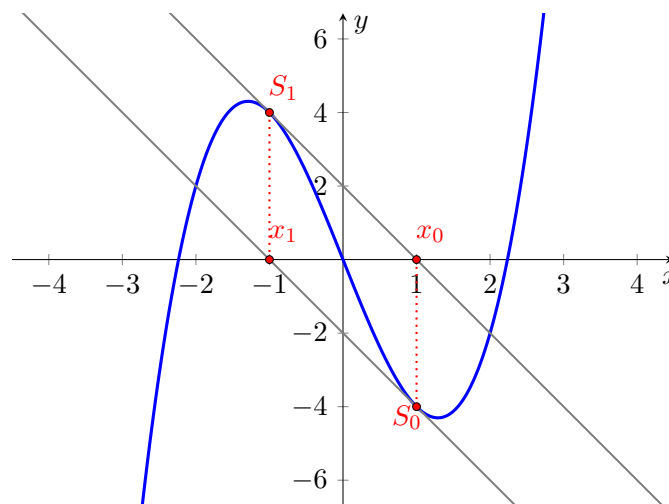


Abbildung 1: Ewiger Paarlauflauf für $f(x) = x^3 - 5x$ mit Startwert $x_0 = 1$.

Das Sekantenverfahren ist verwandt mit dem Newtonverfahren, die Ableitung der Funktion wird durch einen Differenzenquotienten ersetzt. Man erhält folgende rekursiv definierte Zahlenfolge:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \tag{2}$$

Geometrisch bedeutet das Verfahren, dass für zwei Werte x_{n-1} und x_n die Sekante durch die Punkte $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ und $(x_n, f(x_n))$ gelegt wird und der Schnittpunkt mit der x -Achse den nächsten Wert x_{n+1} liefert. Natürlich versagt auch dieses Verfahren, wenn ein Wert x_{n+1} berechnet wird, für den $f(x_{n+1}) = f(x_n)$ gilt. In diesem Beitrag untersuchen wir, für welche Startwerte das Sekantenverfahren einen ewigen Quadrupel-Lauflauf liefert.

2 Bedingungen für einen ewigen Quadrupel-Lauflauf

Wir beschränken uns auf den Fall einer kubische Funktion der Form $f(x) = x^3 - ax$ mit $a > 0$. Abbildung 2 illustriert die Situation. Das Verfahren liefert einen ewigen Quadrupel-Lauflauf, falls $x_2 = -x_0$ und $x_3 = -x_1$.

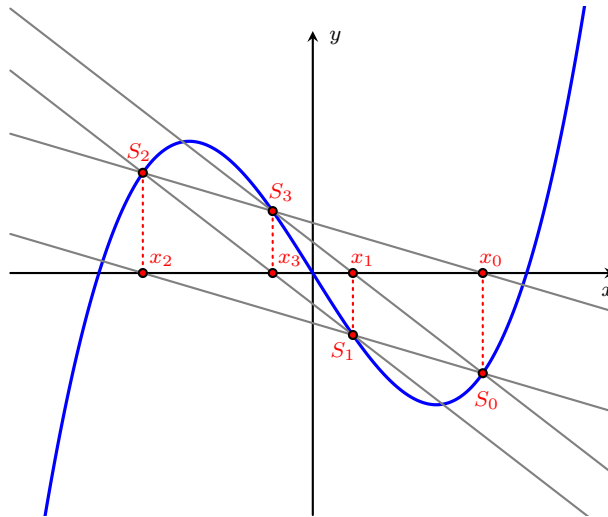


Abbildung 2: Ewiger Quadrupel-Lauf für $f(x) = x^3 - ax$.

Bevor wir diese beiden Bedingungen in Gleichung (2) einsetzen, formen wir die Rekursionsgleichung noch etwas um und erhalten

$$x_{n+1} \cdot f(x_n) - x_{n+1} \cdot f(x_{n-1}) + x_n \cdot f(x_{n-1}) - x_{n-1} \cdot f(x_n) = 0.$$

Wir setzen $x = x_1 = -x_3$ und $y = x_2 = -x_4$ oben ein und haben damit folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{cases} (x + y) \cdot f(x) - 2x \cdot f(y) & = 0 \\ (y - x) \cdot f(y) - 2y \cdot f(-x) & = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Für die kubische Funktion $f(x) = x^3 - ax$ erhalten wir:

$$\begin{cases} (x + y) \cdot (x^3 - ax) - 2x \cdot (y^3 - ay) & = 0 \\ (y - x) \cdot (y^3 - ay) + 2y \cdot (x^3 - ax) & = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Das Gleichungssystem (4) hat die triviale Lösung $x = 0$ und $y = 0$. An dieser Lösung sind wir nicht interessiert. Wir haben also noch zu lösen

$$\begin{cases} (x + y) \cdot (x^2 - a) - 2 \cdot (y^3 - ay) & = 0 \\ (y - x) \cdot (y^2 - a) + 2 \cdot (x^3 - ax) & = 0 \end{cases} .$$

Etwas weniger offensichtlich ist, dass sich beide Gleichungen weiter faktorisieren lassen. Wir multiplizieren zuerst aus:

$$\begin{cases} x^3 - ax + x^2y - 2y^3 + ay & = 0 \\ y^3 - ay - xy^2 + 2x^3 - ax & = 0 \end{cases}$$

Es ist nun leicht zu zeigen, dass tatsächlich

$$\begin{aligned} x^3 - ax + x^2y - 2y^3 + ay &= (x - y)(x^2 + 2y^2 + 2xy - a) \\ y^3 - ay - xy^2 + 2x^3 - ax &= (x + y)(y^2 + 2x^2 - 2xy - a) \end{aligned} .$$

Wieder sind wir in den Lösungen $x = y$ und $x = -y$ nicht interessiert. Der erste Fall entspricht der Situation zweier identischer Startwerte, der zweite Fall führt auf $x_2 = x_3$, also wieder auf ein Versagen des Verfahrens. Unser Gleichungssystem hat sich nun auf zwei Ellipsengleichungen reduziert:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 2xy & = a \\ 2x^2 + y^2 - 2xy & = a \end{cases} \quad (5)$$

Wenn wir in der ersten Ellipsengleichung $x \rightarrow y$ und $y \rightarrow -x$ ersetzen, erhalten wir die zweite Gleichung. Die Hauptachsen der beiden Ellipsen stehen also senkrecht aufeinander. Die Situation ist

in Abbildung 3 gezeigt. Das Gleichungssystem (5) hat vier Lösungen. Diese Lösungen entsprechen innerhalb des Sekantenverfahrens lediglich einer zyklischen Vertauschung der Werte x_0, x_1, x_2 und x_3 .

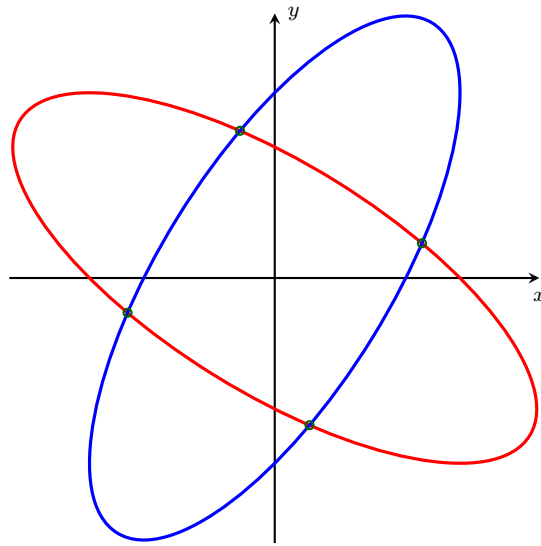


Abbildung 3: Schnittpunkte der beiden Ellipsengleichungen des Systems (5).

Um einen der Schnittpunkte der beiden Ellipsen zu berechnen, führen wir eine Hauptachsentransformation der ersten Gleichung in (5) durch. Es ist

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \quad \text{mit} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir diagonalisieren die Matrix M . Die Eigenwerte sind die Lösungen von

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$$

und die normierten Eigenvektoren lauten

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} \sqrt{\sqrt{5} + 1} \\ -\sqrt{\sqrt{5} - 1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} \sqrt{\sqrt{5} - 1} \\ \sqrt{\sqrt{5} + 1} \end{pmatrix}.$$

Wir setzen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} \sqrt{\sqrt{5} + 1} & \sqrt{\sqrt{5} - 1} \\ -\sqrt{\sqrt{5} - 1} & \sqrt{\sqrt{5} + 1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \tag{6}$$

in die Gleichungen (5) ein und erhalten

$$\begin{cases} \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^2 = 1 \\ \left(\frac{\xi}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\alpha}\right)^2 = 1 \end{cases} \tag{7}$$

mit

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}a}{3\sqrt{5} - 5}} \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}a}{3\sqrt{5} + 5}}.$$

Das Gleichungssystem (7) hat die positive Lösung

$$\xi = \eta = \frac{\alpha \cdot \beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \sqrt{\frac{a}{3}}.$$

Indem wir den Wert in Gleichung (6) einsetzen, lassen sich die Startwerte berechnen, die einen ewigen Quadrupel-Lauf erzeugen:

$$\begin{aligned} x_0 = x &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{6\sqrt{5}}} \left(\sqrt{\sqrt{5} + 1} + \sqrt{\sqrt{5} - 1} \right) = \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 2}{3\sqrt{5}}} \cdot \sqrt{a} \\ x_1 = y &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{6\sqrt{5}}} \left(-\sqrt{\sqrt{5} - 1} + \sqrt{\sqrt{5} + 1} \right) = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 2}{3\sqrt{5}}} \cdot \sqrt{a}. \end{aligned}$$

Unabhängig vom Wert von $a > 0$ gilt für das Verhältnis der beiden Startwerte:

$$\frac{x_0}{x_1} = \sqrt{5} + 2 = 4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \dots}}.$$

Die Zahl vier spielt also auch in der Lösung des ewigen Quadrupel-Laufs eine prominente Rolle.

Links

[1] Hans Walser: *Ewige Paarläufe*, <https://walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/N/Newton/Newton.pdf>.

Hans-Jürgen Elschenbroich und Wilfried Dutkowski
elschenbroich@t-online.de, wdutkowski@hs-euklid.de

„Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer“ vor 25 Jahren und heute

Vor 25 Jahren hat Volker Hole sein Buch „Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer“ veröffentlicht. Die Diskussion zum Computereinsatz war geprägt durch eine eher akademische Diskussion um Fachdidaktik und Allgemeinbildung auf der einen Seite und andererseits durch isolierte schulische Leuchtturmprojekte bei einer weit verbreiteten Skepsis der Lehrkräfte. In diesem Beitrag werden grundlegende didaktische Prinzipien zur Organisation des Unterrichts mit digitalen Mathematikwerkzeugen aufgezeigt und exemplarisch an Aufgaben von Hole versucht, sein Werk fortzuschreiben um dabei neue Akzente zu setzen.

Hinweis: Dieser Text ist eine gekürzte und leicht überarbeitete Fassung des Artikels im MNU journal 5/2023 und 1/2024. Der Schwerpunkt liegt wie bei Hole auf der Sekundarstufe I. In einem Folge-Beitrag werden wir auch auf Beispiele aus der Sekundarstufe II eingehen.

1 Phasen des Einsatzes von Computern im Mathematikunterricht

Computer und heute speziell im Schulbereich iPads sind (auch) mathematische Werkzeuge, die erst seit vergleichsweise kurzer Zeit existieren. Mathematik treiben sowie Mathematik lehren und lernen ist ohne Werkzeuge nicht möglich. Volker Hole hat sich 1998 mit dem damals noch recht neuen Werkzeug Computer und seinem Einsatz in der Schule auseinandergesetzt. Sein Anliegen war „methodische und didaktische Grundfragen in der Sekundarstufe I“ (Hole, 1998, Untertitel) und die bestehende Schulwirklichkeit zu erfassen und die damalige fachdidaktische Diskussion darzustellen. Hole folgte dabei dem allgemeinbildenden Ansatz der ‚zentralen Ideen‘ im Sinne von H. W. Heymann (1998).

Hole benennt in seiner Übersicht zunächst vier Phasen des Einsatzes von Computern im Mathematikunterricht.

1. In der ersten Phase bis 1976 befasste man sich vorwiegend „mit den logischen und technischen Grundlagen der Datenverarbeitung“ (Hole, 1998, 12).
2. In der zweiten Phase bis Ende der achtziger Jahre standen Programmiersprachen (BASIC, LOGO, Pascal) im Vordergrund. In dieser Phase dominierten die PC-Fachräume das Geschehen, und es wurden in den Programmiersprachen eigene kleine Programme geschrieben.
3. In der dritten Phase (in der er damals mittendrin war) stand der Einsatz „von allgemeiner oder fachspezifischer Anwendersoftware“ wie Excel, Derive und DynaGeo im Fokus (Hole, 1998, 12). Zunächst gingen die Aktivitäten noch meist vom leeren Bildschirm aus, die Nutzung elektronischer Arbeitsblätter (Elschenbroich & Seebach 2000-2003; Baptist 2004a, b) entwickelte sich erst allmählich. In dieser Phase gab es auch eine Entwicklung von einer Vielzahl einzelner Programme hin zu umfassenden Modulen Mathematik-Systemen wie z.B. GeoGebra oder TI Nspire.
4. Fast hellseherisch war seine Vorausahnung, dass „demnächst wohl eine vierte folgen wird, die wesentlich durch multimedial arrangierte Kursangebote und Lernumwelten und durch Formen des Telelearnings geprägt sein wird“ (Hole, 1998, 12). In dieser Phase befinden wir uns heute und von da aus wird ein Blick zurück auf die dritte Phase und das Buch von Hole geworfen

2 Didaktische Prinzipien beim Einsatz digitaler Werkzeuge im MU

Es gibt in der Literatur zahlreiche didaktische Prinzipien. Laut Wikipedia sind didaktische Prinzipien „allgemeine Grundsätze zur Gestaltung von Erziehung und Unterricht. Als Regelsetzungen beanspruchen sie Gültigkeit für jedes organisierte Lehren und Lernen nach dem Erkenntnisstand der Zeit“ (Wikipedia).

Aus der persönlichen Sicht und langjährigen Erfahrung der Autoren sind folgende allgemeine pädagogische Prinzipien von besonderer Bedeutung:

- genetisches Prinzip,
- operatives Prinzip,
- Spiralprinzip,
- Prinzip der Vielfalt der Repräsentationsformen¹

Sie sind nicht von ungefähr mit großen Namen wie Wagenschein, Piaget und Bruner verknüpft und werden hier mit digitalen Werkzeugen verbunden. Sie werden durch zwei weitere Prinzipien ergänzt, die insbesondere beim zielgerichteten Einsatz digitaler dynamischer Lernumgebungen bedeutsam sind

- dynamische Visualisierung,
- systematische Variation (Heintz et al., 2017).

Der Einsatz von Werkzeugen hat großen Einfluss auf das, was man mathematisch macht und denkt. Die Quadratur des Kreises beispielweise ist mit Zirkel und Lineal nicht lösbar, mit anderen Werkzeugen schon (Dutkowski, 2023). Die zeichnerische Konstruktion eines Dodekaeders auf dem ebenen Zeichenblatt ist aufwändig, aber mit GeoGebra 3D mit dem Befehl *Dodekaeder(A,B)* bei zwei Basispunkten *A* und *B* erledigt. Gegenüber einer möglichen Euphorie hat aber schon Hölzl (1994, 4) thematisiert, ob es „einen didaktischen Vorzug zum Nulltarif“ geben kann oder ob nicht durch eine erhöhte Komplexität „ein didaktisches Gleichgewicht“ ins Spiel kommt. Auch ist nicht zu unterschätzen, dass die Bedienung neuer Werkzeuge erst gelernt werden muss, was für Lehrerinnen & Lehrer wie für Schülerinnen & Schüler zutrifft. So wie eine Gitarre als Artefakt ein Holzkasten mit Drähten ist, dessen Nutzung als Instrument erlernt werden muss, so ist es auch bei Computer & iPad. Es kommt darauf an, dass „ein Nutzer sich ein zunächst allgemeines ‚Artefakt‘ zu eigen macht, zum ‚Instrument‘ macht, um es für die eigenen mathematischen Handlungen und Intentionen zu nutzen“ (Barzel, 2016, 155). Dabei sind Werkzeugkompetenzen mehr als bloße routinierte Bedienung (Heintz et al., 2017).

2.1 Genetisches Prinzip

Das genetische Prinzip besagt in der fachlichen Ausprägung, dass der Mathematikunterricht sich nicht an der Axiomatik der Mathematik orientieren soll, sondern am Prozess der Entstehung von Mathematik, ohne deswegen alle historischen Irrwege zu durchlaufen. Ein Unterricht, der die Begriffsentwicklung im Rahmen der Genese mathematischer Begriffe problematisiert, wird dann als historisch-genetischer Unterricht bezeichnet. Es geht nicht darum, Schülerinnen & Schülern etwas beibringen zu wollen/sollen, sondern ihnen zu helfen die Sachverhalte zu entdecken (Wagenschein, 2010). „Das zentrale Anliegen des genetischen Prinzips ist es, dass Mathematik nicht als ein Fertigprodukt gelernt wird, sondern dass Lernende einen Einblick in den Prozess der Entstehung von Mathematik erhalten. Mathematik ist etwas, bei dem Lernende entdecken oder erfinden können, auch wenn es sich meist oder fast ausschließlich nur um Nacherfindungen handelt“ (Weigand o. Jg., 5).

Martin Wagenschein als bekanntester Vertreter des genetischen Prinzips sieht aber auch einen individual-genetischen Aspekt: „Pädagogik hat mit dem Werdenden zu tun: mit dem werdenden Menschen und – im Unterricht, als Didaktik – mit dem Werden des Wissens in ihm“ (Wagenschein 2010, 75). Auch in der mit Felix Klein verbundenen Meraner Reform findet sich die Forderung „den Lehrgang mehr als bisher dem natürlichen Gange der geistigen Entwicklung anzupassen.“ (Gutzmer, 1908, 104)

¹ Dieses Prinzip ist im originalen MNU Artikel so noch nicht aufgelistet worden. Wir werden in einem Folgeartikel darauf eingehen.

2.2 Operatives Prinzip

Eigenes Handeln spielt für das Lernen, für die Erkenntnisgewinnung eine entscheidende Rolle. Das operative Prinzip wird meist mit Piaget verbunden, der Denken als verinnerlichtes oder gedachtes Handeln verstand. Es wurde von Wittmann vertieft und auch auf die Objekte bezogen, mit denen Operationen vorgenommen wurden (Wittmann, 1985). *„Daher sind im Unterricht konkrete Materialien, zeichnerische Darstellungen und Textmaterialien einzusetzen, an denen die Schüler real oder gedanklich operieren, ‚forschen‘ können.“* (Wittmann, 1981, 79).

Zum operativen Prinzip gehört heutzutage auch die Verbindung von klassischen analogen Werkzeugen und virtuellen digitalen Werkzeugen wie PC und dynamischen Lernumgebungen einschließlich nötiger Phasen der Entschleunigung (Heintz, 2016). Digitale Werkzeuge erweitern dabei zum einen die zu untersuchenden Objekte (z.B. Ortslinien) und zum anderen die durchführbaren Operationen (z.B. Ziehen an Punkten, Graphen oder Schieberegler). Digitale dynamische Lernumgebungen bieten heute umfangreiche Möglichkeiten für computergestützte Handlungen, die dann im Klassenrahmen entsprechend aufgegriffen, durchdacht und auf ein neues gemeinsames Niveau gebracht werden müssen.

2.3 Spiralprinzip

Die „Curriculum-Spirale“ wird meist mit Bruner in Verbindung gebracht (Bruner, 1970) und ist eng mit fundamentalen Ideen / Big Ideas / zentralen Ideen / Leitideen verknüpft. Hole zitierte dazu Wittmann:

1. *„Der Unterricht ist in jedem Fach in erster Linie auf die fundamentalen Ideen (‚Struktur‘) der jeweiligen Fachwissenschaft auszurichten.“*
2. *„Die Grundideen eines Fachs können jedem Kind, gleich welcher Altersstufe oder sozialen Herkunft, auf der Grundlage der Denkmittel, die es mitbringt, und der Darstellungsmittel, die es versteht, in entsprechend einfacher Form vermittelt werden.“* (Wittmann, 1981, 84)

Schon zu Beginn des 20. Jahrhunderts thematisierte Whitehead ‚zentrale Ideen‘ und forderte, sie in den Mittelpunkt des mathematischen Schulunterrichts zu stellen. Heute sind die Leitideen der Bildungsstandards der KMK maßgebend (Algorithmus und Zahl, Messen, Raum und Form, funktionaler Zusammenhang, Daten und Zufall). Es geht darum, damit einen ‚roten Faden‘ über die Jahre hinweg zu haben und diese Ideen immer wieder spiralig aufzugreifen. Dabei wird auch das E-I-S Modell von Bruner bedeutsam, in dem es um die verschiedenen Weisen der Erkenntnisgewinnung und ihr Zusammenspiel geht (siehe Kap. 3). Dabei hat Bruner besonders auf „die Bedeutung des Entdeckens“ (Bruner, 1970, 33) hingewiesen und gefordert, den Unterricht methodisch so anzulegen, dass die Schülerinnen & Schüler Sachverhalte und Verallgemeinerungen selbst entdecken können (discovery learning) im Gegensatz zur lehrerzentrierten Behauptungs- und Beweismethode.

2.4 Prinzip der dynamischen Visualisierung

Im Gegensatz zu statischen Visualisierungen (z.B. Abbildungen, Modellen, ...) findet man dynamische Visualisierungen in Form von Videos oder Animationen wieder. Speziell bei dynamischer Mathematiksoftware sind insbesondere der Zugmodus und der Einsatz von Schieberegler typisch, oft in Kombination mit der Spur oder Ortslinien.

Im Gegensatz zu einem passiven Konsum dynamischer Visualisierungen sollten sie mit lernförderlichen Aktivitäten interaktiv verbunden werden. Dynamische Visualisierungen sind aber nicht prinzipiell lernförderlicher als statische, weil sie eine größere intellektuelle Belastung mit sich bringen können, einen Overload-Effekt. *„Dynamische Visualisierung ist mehr als bloße Veranschaulichung. Sie ist aber kein didaktischer Vorteil zum Nulltarif“* (Heintz et al., 2017, 171). Lernen bedeutet aktive Auseinandersetzung mit dem Gegenstand, aus der in Verbindung mit dem Vorwissen neues Wissen entsteht (Elschenbroich, 2004). Dabei ist zu beachten, dass eine zu umfassende und ‚glatte‘ Visualisierung die Gefahr birgt, zu große Schritte im Erkenntnisprozess zu gehen und dabei entscheidende Schritte zu überspringen. Auf Phasen der Entschleunigung und des manuellen Durcharbeitens darf dabei nicht verzichtet werden (Heintz et al., 2017, 171).

2.5 Prinzip der systematischen Variation

Ohne Variationsmöglichkeiten (Zugmodus, Schieberegler) ist keine Dynamik möglich. Wenn sich aber alles Mögliche ändert, wird es beliebig schwierig, alles zu überblicken und die entscheidenden Änderungen zu erkennen. Deswegen ist es oft sinnvoll und nötig, die Variationsmöglichkeiten in gewissen Maßen einzuschränken. Es gilt, ein geleitetes Entdecken zu organisieren, was auch passend auf die jeweilige Lerngruppe zugeschnitten sein muss. Es geht nicht um planloses Variieren, sondern um zielgerichtetes Arbeiten, also systematisches Explorieren, um alle Sätze der Schulmathematik als Invarianzen bzw. funktionale Abhängigkeiten entdeckbar zu gestalten.

Der Gedanke der Variation von Objekten ist schon länger bekannt. Ein anderer, seltener betrachteter Aspekt ist die Variation der benutzten Werkzeuge, was dann auch mit einem Wechsel der Perspektiven einhergeht (Elschenbroich, 2017). Durch die Weiterentwicklung der Mathematiksoftware zu Modulen Mathematik-Systemen ist dieser Werkzeugwechsel innerhalb einer Programmumgebung (z.B. von Geometrie zu Funktionen oder Tabellenkalkulation) erheblich einfacher geworden.

3 Erkenntnisgewinn und Computer: Vom E-I-S-Modell zu C-E-I-S

Von Bruner stammt der Gedanke, „daß man etwas auf drei verschiedene Weisen kennen kann: dadurch, daß man es tut, dadurch, daß man es sich bildlich vorstellt, und dadurch, daß man ein symbolisches Mittel wie z. B. die Sprache verwendet“ (Bruner, Olver & Greenfield, 1971, 27). In der deutschen Übersetzung von Aebli werden dafür die Begriffe „handlungsmäßig, bildhaft und symbolisch“ benutzt (Bruner, Olver & Greenfield 1971, 21). Dies ist dann, vor allem in der deutschsprachigen Interpretation, als E-I-S Modell (enaktiv, ikonisch, symbolisch) bekannt geworden und gibt didaktische Anregungen, wie mathematische Inhalte für das Lernen von Mathematik aufbereitet werden können. Wenn dabei von „kognitiven Entwicklungsstufen“ (Stangl, 2023) gesprochen wird, impliziert dies eine Hierarchie, die stufenweise zu durchlaufen wäre. Dies gilt sicher für die individuelle kindliche Entwicklung vom ersten Lebensjahr bis zum Ende der Grundschule. Oft werden diese Stufen auch im Unterricht in dieser Reihenfolge durchlaufen. Dies ist in der Sekundarstufe aber nicht zwingend, sondern unnötig einschränkend (Elschenbroich & Sträßer, 2022).

Wenn zum E-I-S Modell gesagt wird „Wissen und Information lässt sich in der Regel im Unterricht in verschiedenen Repräsentationen darstellen“ (Stangl, 2023), zeigt dies eine statische Sicht auf fertiges Wissen, während für uns hier der dynamische Charakter des Lernens als Aktivität, die individuelle Erkenntnisgewinnung von besonderer Bedeutung ist. Hole weist schon 1998 darauf hin, „daß mit dem Computer mathematische Inhalte auf allen drei Ebenen der Handlung, des Bildes bzw. der Grafik und der Sprache dargestellt werden können“ (Hole, 1998, 223). Wir nutzen hier nicht den Begriff Ebenen, oder Stufen, sondern sprechen näher an Bruner von Weisen oder Modi. Der erforderliche und fruchtbare Wechsel zwischen den Modi wird bei Hole „intermodaler Transfer“ genannt (Hole, 1998, 168). Lotz weist speziell zum enaktiven Modus darauf hin, dass es entscheidend ist, dass die Handlungen so erfolgen, dass sie „Einsichten ins Symbolische anbahnen“ (Lotz, 2020).

Dem Computer kommt schon 1998 eine besondere Rolle zu. Hole erweiterte damals das E-I-S Modell zum C-E-I-S Modell. Das war wegweisend, wurde aber kaum aufgegriffen. Hole sah E, I, S als Eckpunkte eines Dreiecks und legte C als Punkt in die Mitte. Damit blieb dies ein ebenes Schema.

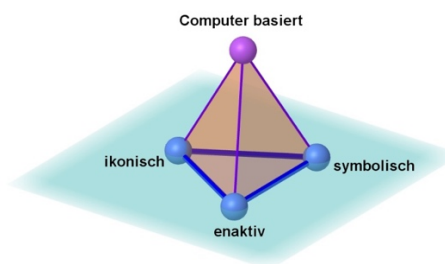


Abb. 1. C-E-I-S-Pyramide © GeoGebra, Elschenbroich & Dutkowski

Wir wollen dagegen den Computer aus der E-I-S Ebene herausheben. Seine übergreifende Bedeutung und der Zusammenhang mit den drei Modi der Erkenntnisgewinnung wird jetzt durch ein dreidimensionales Modell visualisiert (Abb. 1), in dem bei einer dreieckigen Pyramide der C-Eckpunkt aus der E-I-S- Ebene herausragt.

Dadurch wird es möglich, nicht nur die C-E-I-S Pyramide als Ganzheit zu betrachten, sondern neben der E-I-S Ebene auch die anderen Seitenflächen als eigene Ebenen E-I-C, I-S-C und E-S-C zu sehen. Elschenbroich & Sträßer betonen insbesondere, dass dynamische Mathematik-Software wie GeoGebra „durch die Möglichkeiten dynamischer Visualisierung in bislang nicht gekannter Form die Ebenen enaktiv und ikonisch, je nach Art und Qualität der Lernumgebung auch alle drei Ebenen“ verbindet (Elschenbroich & Sträßer, 2022, 242).

Das C-E-I-S Modell ist eine moderne Ausprägung des didaktischen Prinzips der Vielfalt der Repräsentationsformen.

4 Ausgewähltes Beispiel – damals und heute

Im Folgenden wird ein Beispiel von Volker Hole vorgestellt und gezeigt, wie man es heute bearbeiten könnte. Dabei wird konsequent Bezug auf die fünf genannten Prinzipien genommen.

Die mächtigen Befehle von GeoGebra bieten vorher nicht gekannte Möglichkeiten, Themen in dynamischen Lernumgebungen aufzubereiten. Im Beispiel geht es uns vorwiegend darum, die didaktische und softwaretechnische Entwicklung der letzten 25 Jahre zu beleuchten.

Da es bei Hole oft keine explizite Aufgabenformulierung gab, wird im Folgenden eine mögliche und passende Aufgabenstellung sinngemäß formuliert.

Quadratische Funktionen mit Parametern, Scheitelpunkt und Nullstellen

Problemstellung: Die Graphen quadratischer Funktionen der Form: $y = f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ sollen untersucht werden.

Damals war der Einsatz von Schiebereglern noch nicht verbreitet, und das formstabile Variieren von Graphen war nicht möglich. Hole nutzte das CAS-Programm Derive (Abb. 4), in dem im Algebra-Fenster systematisch Funktionsterme per Hand eingegeben und dann die Graphen gezeichnet wurden.

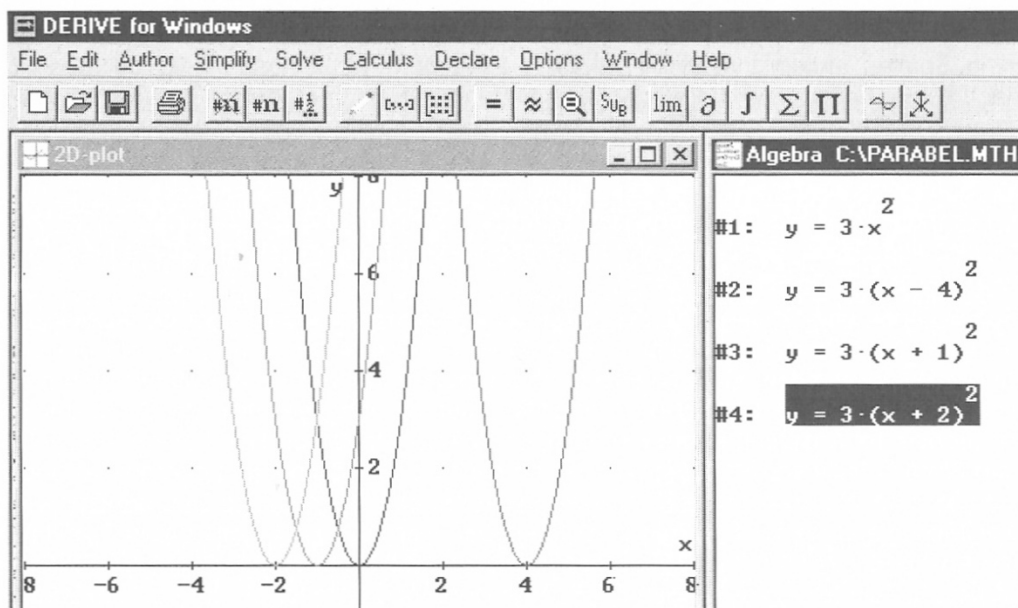


Abb. 2. Quadratische Funktionen $y = f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ (Hole, 1998, 107)

Heute wird man die Parameter mit Schieberegler dynamisieren. Es gibt dann keine Vielzahl von Graphen, die eine Schar bilden, sondern jeweils prototypisch eine Funktion, die den aktuellen Parametern entspricht.

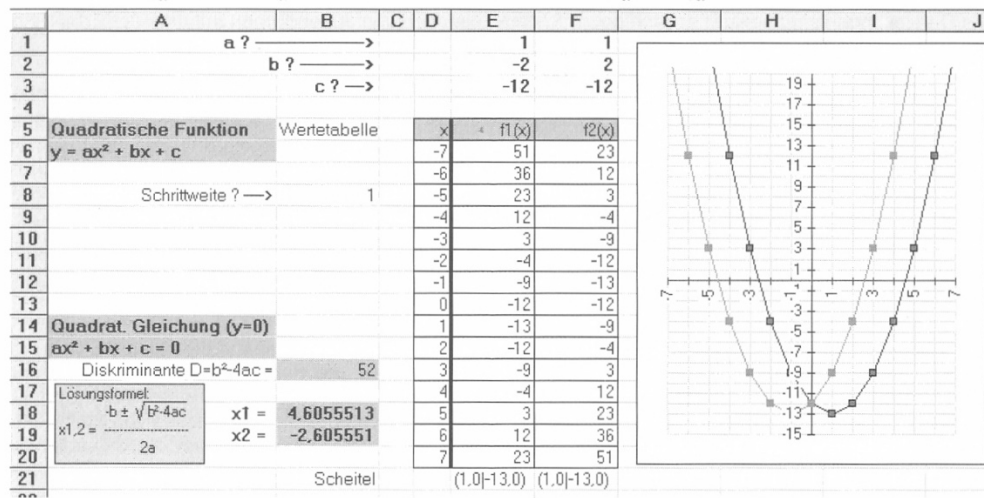


Abb. 3: Quadratische Funktionen $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (Hole, 1998, 298)

Weitere Problemstellung: Die Graphen quadratischer Funktionen mit Gleichungen der Form $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ sollen auf Scheitelpunkt und Nullstellen untersucht werden.

Mit quadratischer Ergänzung wird dann $S = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{c-b^2}{4a}\right)$ hergeleitet und als Nullstellenformel $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Dies ist das algebraische Standardverfahren. Eine visuelle Unterstützung wird dadurch realisiert, dass für jeden Parameter a, b, c in einer Excel-Tabelle nebeneinander zwei Werte eingegeben werden können und die beiden zugehörigen Graphen als Streckenzüge angezeigt werden (Abb. 5).

Heutzutage ist zum einen ein anschaulicher Zugang zur Scheitelpunktform möglich, indem eine Parabel als Graph einer quadratischen Funktion im Zugmodus variiert wird, um dabei die Gesetzmäßigkeiten der Scheitelpunktform entdecken zu können (Abb. 6). Wir beschränken uns hier auf Parabeln mit $a = 1$. Dazu muss die Objektfixierung der Funktion aufgehoben werden. Dann kann man mit der Maus oder den Pfeiltasten den Graphen in der Lage verschieben, ohne die Form zu ändern. Hier wird also nicht vom Funktionsterm ausgegangen, sondern vom Graphen und vom Scheitelpunkt!

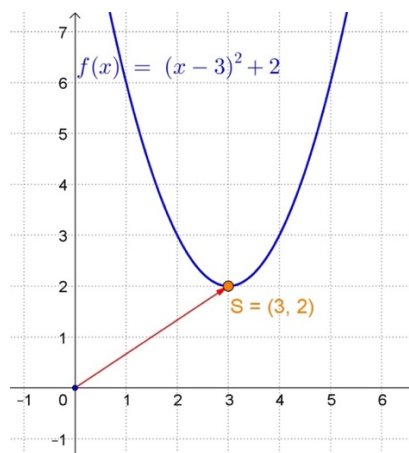


Abb. 4: Scheitelpunktform quadratischer Funktionen © GeoGebra, Elschenbroich & Dutkowski

Damit kann dann in ähnlicher Weise eine Nullstellenformel für quadratische Funktionen entdeckt werden, die der p-q-Formel entspricht (Abb. 7), und zwar in drei Fällen ausgehend von der Scheitelpunktform. Bei zwei Nullstellen erhält man dann $x_{1,2} = x_S \pm \sqrt{-y_S}$.

In der Problemstellung angesprochene Prinzipien:

- *Genetisches Prinzip:* Hier steht der individuell-genetische Aspekt im Vordergrund. Bei einer gegebenen Funktion / Parabel samt Scheitelpunkt ist bei graphischer Herangehensweise die Scheitelpunktform offensichtlich. Die Nullstellenformel ergibt sich dann bei zwei Nullstellen durch die Erkenntnis, dass diese in Abhängigkeit von y_S symmetrisch zu x_S liegen. Bei einer Nullstelle erkennt man eine binomische Formel. Liegt die Parabel ganz oberhalb der x -Achse, so gibt es offensichtlich keine Nullstelle.
- *Operatives Prinzip:* Eine virtuelle Handlungsorientierung ist durch Ziehen am Funktionsgraphen gegeben, der dadurch Lage und Term ändert, aber nicht die grundlegende Gestalt. Dies ist vergleichbar mit dem Umgang einer Schablone. Das Arbeiten mit der Parabelschablone ist auch als Vorbereitung und Entschleunigung möglich und sinnvoll.
- *Spiralprinzip:* Aus der Scheitelpunktform ergibt sich spiralförmig ein Zugang zur Nullstellenformel in einer speziellen Form.
- *Dynamische Visualisierung:* Die entscheidende Idee ist hier, nicht mit dem Funktionsterm und der Variation von Parametern zu beginnen, sondern direkt den Graphen zu variieren.
- *Systematische Variation:* Das freie Ziehen am Graphen von f wird sinnvoll eingeschränkt, indem erst nur in y -Richtung variiert werden soll, dann nur in x -Richtung. Erst danach wird beides kombiniert.

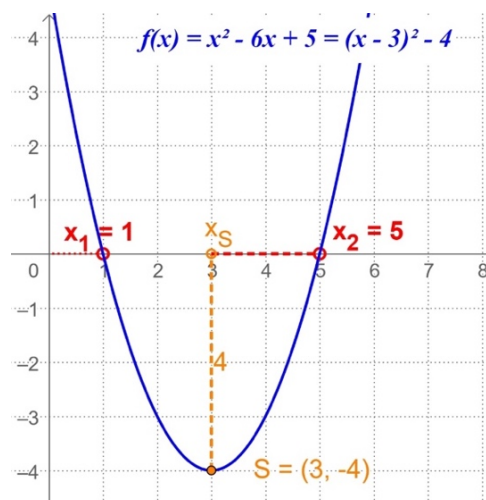


Abb. 5: Nullstellen quadratischer Funktionen © GeoGebra, Elschenbroich & Dutkowski

5 Rückschau und Ausblick

Rückblickend kann man sagen, dass das Buch von Hole seinerzeit eine bessere Würdigung verdient gehabt hätte, insbesondere sein C-E-I-S Modell. In der universitären Didaktik passte das Buch nicht in die Zeit, denn die Stoffdidaktik wurde ab den 80-er Jahren geringschätzt und war kaum Thema der didaktischen Forschung. In der Schule war es wiederum nicht verbreitet, weil es nicht direkt als Schulbuch konzipiert war. Für die schulpraktische Lehrerbildung in den Fachseminaren an den Studienseminaren, Lehrerfortbildungen bildete es aber oft die didaktische Grundlage für den Technologieeinsatz im Mathematikunterricht.

Das von Hole bevorzugte digitale Werkzeug Excel hatte sich schulisch damals nicht durchgesetzt, und

die damalige technische Situation an den Schulen (schwer nutzbare Computerräume) sowie der Stand der Software (viele parallele Programme) erschwerten eine unterrichtspraktische Akzeptanz.

Heute erlebt man eine Vereinheitlichung in der zunehmenden Ausstattung der Schulen mit iPads und WLAN in Verbindung mit umfassenden Modulen Mathematik-Systemen wie GeoGebra oder TI Nspire. Damit hat sich Situation grundlegend geändert, was erhoffen lässt, dass sich im Mathematikunterricht einiges tun kann und wird, um die mathematische Bildung auf höchstem technischem Niveau zu unterstützen. Dazu gehört auch, dass die Schulen ein abgestimmtes Konzept erarbeiten, wie das Lernen mit Medien und (nicht nur digitalen) Werkzeugen organisiert werden sollte (Kliemann & Dutkowski, 2014).

In diesem Sinn war das Buch von Volker Hole wegweisend und gibt auch heute noch Anregungen, wie in einer modernen Interpretation und Fortschreibung ein Mathematik-Unterricht durch den Einsatz von Computern als Werkzeug und Instrument nachhaltiger und wirksamer sein könnte.

Für uns ist dabei das im Abschnitt 3 entwickelte dreidimensionale Modell der C-E-I-S Pyramide von besonderer Bedeutung.

Ausgewählte Literatur

- Heintz, Gaby; Elschenbroich, Hans-Jürgen; Laakmann, Heinz; Langlotz, Hubert; Rüsing, Michael; Schacht, Florian; Schmidt, Reinhard & Tietz, Carsten (2017): Werkzeugkompetenzen. Kompetent mit digitalen Werkzeugen Mathematik betreiben. MNU & T³. Verlag Medienstatt. Download für MNU-Mitglieder: <https://www.mnu.de/publikationen#aktuell>.
- Hole, Volker (1998): Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer. Methodische und didaktische Grundfragen in der Sekundarstufe I. Auer, Donauwörth.
- Elschenbroich, Hans-Jürgen & Dutkowski, Wilfried: "Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer" vor 25 Jahren und heute. In: *MNU journal* 5/2023 und 1/2024.

Hinweis: die ausführlichen MNU-Artikel samt Beispielen finden Sie auf <https://www.geogebra.org/m/xcdyjczq>.



Autoreninfo:

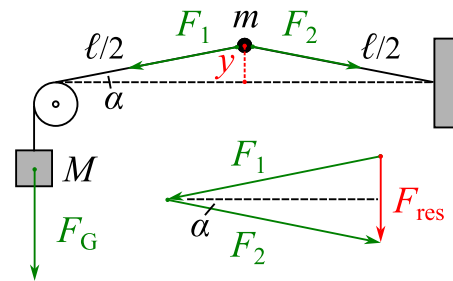
- *Hans-Jürgen Elschenbroich, elschenbroich@t-online.de, war Lehrer für Mathematik und Informatik am Gymnasium, Fachleiter Mathematik am ZfsL Krefeld und Neuss und Mitarbeiter der Medienberatung NRW. Er ist Gründungsmitglied des GeoGebra Instituts NRW.*
- *Wilfried Dutkowski, w Dutkowski@hs-euklid.de, war Lehrer für Mathematik und Physik an der inklusiven Gesamtschule Bonns Fünfte und Mitarbeiter der Medienberatung NRW sowie Konrektor an diversen Hauptschulen. Er ist Gründungsmitglied des GeoGebra-Instituts NRW.*

Saitenpendel

1 Einleitung

Das Saitenpendel – kein offizieller Begriff – besteht aus einer undehnbaren, leichten, mit der Kraft F gespannten Saite der Länge ℓ , die in der Mitte als Pendelkörper eine Perle der Masse m trägt, siehe Abbildung 1 für eine experimentelle Realisierung. Die rücktreibende Wirkung stammt von der Spannkraft. Mit welcher Frequenz schwingt die Perle?

Abbildung 1: Eine Perle der Masse m ist in der Mitte eines leichten Fadens der Länge ℓ befestigt. Der Faden wird mit einer Lastmasse M über eine Rolle mit einer Kraft F gespannt, welche dem Lastgewicht $F_G = Mg$ entspricht. Auf die Perle wirken deshalb die Spannkraften $F = F_1 = F_2 = F_G$ von links und rechts, wenn die Perle um ein kleines y aus der Gleichgewichtslage gestossen wird. Die Perle erfährt dann eine rücktreibende Kraft F_{res} . Die Bewegungen der Rolle und der Masse M sind in erster Näherung vernachlässigbar.



2 Theorie

Mit der Ähnlichkeit der Dreiecke in Abbildung 1 folgt:

$$\frac{F_{\text{res}}/2}{F} = \frac{y}{\ell/2} \Rightarrow F_{\text{res}} = (-)\frac{4F}{\ell} \cdot y = -\frac{4Mg}{\ell} \cdot y$$

$$a = m^{-1} F_{\text{res}} \rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{4F}{\ell m} \cdot y \Leftrightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{4F}{\ell m}} = \sqrt{\frac{4Mg}{\ell m}}$$

Wir erhalten die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung und können die Kreisfrequenz ω_0 ablesen. (Im Verborgenen wurde eine Näherung für kleine Auslenkungen verwendet. Wo?)

In Abb. 1 bewegt sich die Perle auf und ab. Sie könnte sich auch aus der Zeichenebene heraus und hinein bewegen. Die Kombination ergibt eine elliptische Bewegung. Sind die Amplituden gleich gross, ergibt sich eine Kreisbewegung, für welche mit $F_{\text{res}} = mr\omega^2$ ein wohlbekannter Ansatz zur Verfügung steht. Es folgt

$$\omega^2 = \frac{4F}{\ell m} \cos \alpha$$

wobei α der Auslenkwinkel der Schnur von der Nulllinie ist. Für kleine Auslenkungen stimmt die Winkelgeschwindigkeit ω mit der Kreisfrequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung überein.

Ohne Perle erwartet man die Frequenz f_1 des Grundtons einer Saite. Das folgende Experiment zeigt Messungen an einer schwingenden Perle und – zum Vergleich – einer schwingenden Saite.

3 Experiment

Ich verwendete Küchengarnd und axial durchbohrte Messingzylinder in der Anordnung von Abbildung 1. Die Bewegung wurde mit einem Samsung Galaxy A53 videographiert (Zeitraffer 240 fps) und mit Tracker¹ analysiert. Die Resultate sind in Abb. 2 und 3 dargestellt.

Abbildung 2: Kreisfrequenz ω des Saitenpendels als Funktion der Spannmasse M .

Ein Perle der Masse $m = 55.1\text{ g}$ befindet sich in der Mitte einer gespannten Schnur der Länge 100 cm und wird in vertikale Schwingungen versetzt. Die Spannkraft $F = Mg$ entspricht dem Gewicht der Spannmasse. Die gemessenen Kreisfrequenzen (Punkte) sind etwa 5 % tiefer als die nach der Theorie berechneten (durchgezogenen Linie).

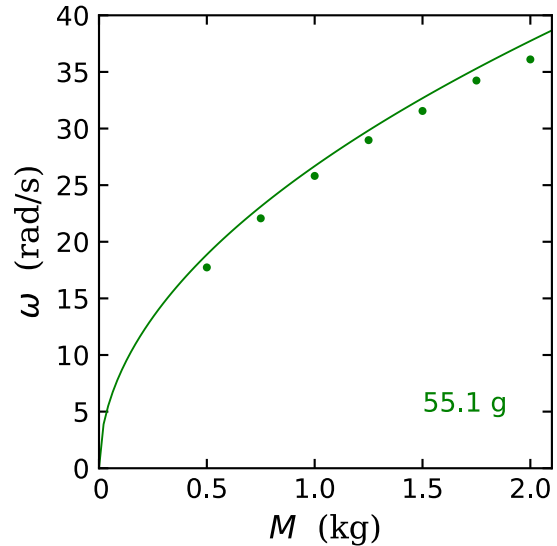
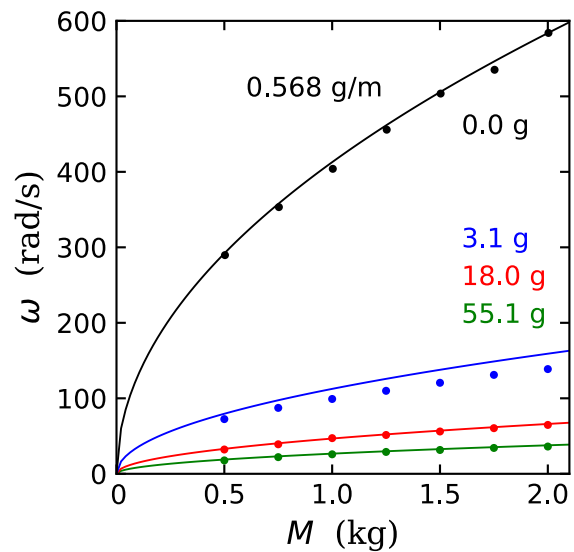


Abbildung 3: Kreisfrequenz des Saitenpendels (Pendelmassen 55.1 g , 18.0 g , 3.1 g) als Funktion der Spannmasse M . Die Messungen sind als Punkte, die Theorie als durchgezogene Linien eingetragen.

Zum Vergleich ist die Kreisfrequenz der unbelasteten Saite dargestellt (0.0 g , Theorie siehe unten). Die Schnur, die als Saite diente, hatte einen Massenbelag von $\mu = 0.568\text{ g/m}$ und die Länge 1.00 m .



Frequenz der Saite ohne Zusatzmasse
 (“ 0.0 g ” in Abb. 3)

$$f_1 = \frac{1}{2\ell} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \rightarrow \omega_1 = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{Mg}{\mu}}$$

4 Diskussion

Die Schwingung einer masselosen Saite mit vielen Pendelkörpern wird oft als Modell für eine schwingende, schwere Saite verwendet oder um die Normalschwingungen eines Kristalls zu modellieren. Die Saite mit nur einem Pendelkörper führt auf die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators. Die Linearisierung lässt sich besser verstecken als beim mathematischen Pendel. Die Genauigkeit ist vergleichbar mit jener der Aräometer-Schwingung.

¹ <https://physlets.org/tracker> (1. Juni 2024)

building

MATURA-AWARD Auszeichnung für
Arbeiten im Ingenieurwesen

Für talentierte Ingenieur:innen von morgen.
Gesucht: Innovative Maturitätsarbeiten im
Bereich des Ingenieurwesens.

Talente im Ingenieurwesen entdecken und das
Können den Fachexpert:innen präsentieren!

Die Eingabe der Maturitätsarbeiten erfolgt durch
die Gymnasiallehrperson bis am
31. März 2025 über maturaaward.com

sia

Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein
Société suisse des ingénieurs et des architectes
Società svizzera degli ingegneri e degli architetti
Swiss society of engineers and architects

building

Schweizerische Stiftung zur Förderung
des Ingenieurwachstums im Bauwesen

maturaaward.com



Jean-Marie Urfer

Membre de la CRM, christian.aebi@edu.ge.ch

Cryptologie

Colloque annuel de la CRM organisé à Champéry du 10 au 13 septembre 2024

La CRM a organisé son traditionnel cours de formation continue pour les enseignant·e·s du secondaire II réunissant quatre conférenciers, une conférencière et plus de cinquante participant·e·s à l'Hôtel Suisse à Champéry. Grâce à une salle parfaitement équipée, les conférences se sont déroulées dans d'excellentes conditions.

Ce cours, riche et varié, proposait des contenus directement exploitables en classe, ainsi que des présentations plus avancées pour offrir aux participant·e·s une meilleure compréhension de certains aspects de la recherche actuelle et de ses applications pratiques.

Pour débiter, Didier Müller (Lycée cantonal de Porrentruy) a présenté les bases de la cryptologie par le biais de quelques livres où le décryptement d'un message secret joue un rôle important et a indiqué quelques pistes pour utiliser en classe son propre livre¹. Il a également expliqué comment des méthodes métaheuristiques (méthodes stochastiques et itératives utilisées pour résoudre des problèmes d'optimisation) telles que le recuit simulé et la recherche sans tabous pouvaient être appliquées pour casser un code sans en connaître la clé.

Alain Roubaty (HEG-Arc) a ensuite présenté l'art de la stéganographie, c'est-à-dire la dissimulation d'un message dans un autre contenu, comme une image. Dans un deuxième cours, il a rappelé les concepts de clé publique, la notion de « one-way function » et les problèmes permettant la création d'un système à clés publiques, le logarithme discret ou la factorisation des nombres entiers permettant au final la présentation du RSA.

Alessio Caminata (Università di Genova) a exposé les enjeux actuels de la cryptographie post-quantique. Les protocoles actuels de clé publique reposant sur le problème du logarithme discret et la factorisation des entiers peuvent être facilement résolus par un ordinateur quantique grâce à l'algorithme de Shor. La cryptographie post-quantique vise donc à développer de nouvelles primitives cryptographiques à partir de problèmes mathématiques que les ordinateurs quantiques ne pourraient résoudre plus rapidement que les ordinateurs classiques, comme ceux provenant de la théorie des codes, des réseaux ou des polynômes.

Un pas de côté a été proposé par Cristina Landolina (Höhere Fachschule für Technik Mittelland) qui a parlé de la théorie des codes. Après une introduction générale sur les codes correcteurs d'erreurs et sur la théorie du codage classique, à savoir les codes dotés de la métrique de Hamming, elle a exposé une généralisation naturelle de cette théorie : les codes dans la métrique de rang. Les méthodes utilisées dans la théorie du codage sont dans la plupart des cas des applications des concepts de base de l'algèbre linéaire.

Pour terminer, François Weissbaum (DDPS) a abordé l'algorithme de signature numérique à clé publique ECDSA (Elliptic Curve Digital Signature Algorithm). Après une présentation succincte des types de courbes elliptiques permettant de définir un groupe fini utilisé par ECDSA et la simulation du principe du protocole avec le logiciel Sagemath, la deuxième partie s'est concentrée sur la faiblesse de ce protocole qui doit utiliser un nombre aléatoire. Si le générateur ne fonctionne pas correctement, l'attaquant peut alors reconstruire la clé privée de la personne qui a signé un document avec une attaque basée simplement sur l'identité de Bézout.

¹ D. Müller, Les 9 Couronnes, Ed. Société Jurassienne d'Émulation

Christian Aebi
Collège Calvin, christian.aebi@edu.ge.ch

L'irrationalité d'une pyramide régulière

Le but de cette note est de prouver que toute pyramide régulière à base carrée doit compter parmi les mesures de son volume, de l'aire de ses faces et de la longueur de ses arêtes un nombre irrationnel. Pour y parvenir nous parcourons des résultats classiques d'arithmétique. Le seul prérequis que nous admettons est le corollaire du lemme d'Euclide (LE) : *si un produit de nombres premiers entre eux est un carré alors chaque facteur est un carré*.

Lemme 1. *Supposons que $a, b, c \in \mathbb{N}$, $\text{pgcd}(a, b) = 1$, a est impair et*

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (1)$$

Alors il existe m et n de parités différentes et premiers entre eux tels que $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$.

Démonstration. Si on observe l'équation ci-dessus modulo 4, on voit que b est pair et donc c est impair. Puisque $\text{pgcd}(\frac{c+a}{2}, \frac{c-a}{2}) = 1$, alors par (LE), $(\frac{b}{2})^2 = \frac{c+a}{2} \cdot \frac{c-a}{2}$ est le produit de deux carrés premiers entre eux. En posant $\frac{c+a}{2} = m^2$ et $\frac{c-a}{2} = n^2$, on obtient la conclusion, puisque $c = m^2 + n^2$ est impair. \square

Lemme 2. *Supposons que $a, b, c \in \mathbb{N}$, $\text{pgcd}(a, b) = 1$, $a > b$ et*

$$a^2 + b^2 = 2c^2. \quad (2)$$

Alors il existe m et n de parités différentes et premiers entre eux tels que $a = m^2 + 2mn - n^2$, $b = |m^2 - 2mn - n^2|$ et $c = m^2 + n^2$.

Démonstration. En observant à nouveau l'équation modulo 4, nous voyons que a, b, c sont tous impairs. Posons $\frac{a+b}{2} = x$ et $\frac{a-b}{2} = y$, que nous vérifions facilement être premiers entre eux et de parités différentes. En remplaçant a par $x + y$ et b par $x - y$ dans (2) on obtient $x^2 + y^2 = c^2$. Ainsi, si x est impair alors par le Lemme 1, $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$ et $c = m^2 + n^2$, ce qui, une fois substitué ci-dessus, donne le résultat souhaité. Dans le cas contraire, a et c restent inchangés et $b = 2mn - m^2 + n^2$. \square

Théorème 1. *Si a, b sont premiers entre eux et de parités différentes, alors il n'y a pas de solution entière à l'équation*

$$a^4 - b^4 = c^2. \quad (3)$$

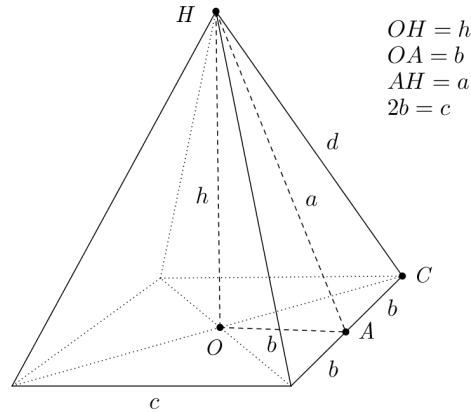
Démonstration. Par l'absurde. Considérons la plus petite solution possible pour b . L'équation (3) modulo 4 implique que a est impair et b est pair. En factorisant (3) et en appliquant (LE), nous voyons que $a^2 + b^2 = f^2$, $a^2 - b^2 = g^2$, et donc $2a^2 = f^2 + g^2$ avec f, g premiers entre eux. Par le Lemme 2, $f = m^2 + 2mn - n^2$ et $g = |m^2 - 2mn - n^2|$, avec m et n premiers entre eux. En substituant dans l'égalité $2b^2 = f^2 - g^2$ on obtient

$$b^2 = 4mn(m - n)(m + n). \quad (4)$$

Par (LE) $m = u^2$, $n = v^2$ et $w^2 = \frac{b^2}{4u^2v^2}$, donnant $w^2 = u^4 - v^4$, analogue à (3). Mais, (4) implique $b^2 = 4u^2v^2(u^4 - v^4) > v^2$, ce qui contredit la minimalité de b . \square

Théorème 2. *Il ne peut exister de pyramide centrée à base carrée dont les longueurs des arêtes, les aires des faces et le volume soient tous des nombres entiers naturels.*

Démonstration. Par l'absurde. Soit une pyramide de hauteur h , à base carrée de côté $2b = c \in \mathbb{N}$. Les arêtes des faces latérales mesurent $d \in \mathbb{N}$ et les hauteurs de ces dernières issues du sommet de la pyramide mesurent a , comme illustré ci-dessous. Par hypothèse sur l'aire et le volume, $\frac{ac}{2} \in \mathbb{N}$, $\frac{c^2}{3}h \in \mathbb{N}$ et donc $a \in \mathbb{Q}$ et $h \in \mathbb{Q}$.



Par le théorème de Pythagore sur CAH on a

$$(2a)^2 = (2d)^2 - c^2 \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Or, si le carré d'un nombre rationnel $2a$ est un entier alors $2a \in \mathbb{N}$. En observant (5) modulo 4, on déduit que c est pair et donc $a \in \mathbb{N}$. Par le même argument que ci-dessus sur AOH on a

$$(2h)^2 = (2a)^2 - c^2 \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

ce qui implique $h \in \mathbb{N}$ par un argument modulo 4. Ainsi, toutes les grandeurs en lettres latines sur la figure ci-dessus sont des entiers naturels strictement positifs. Remarquons que si $k = \text{pgcd}(a, b)$ alors $k \mid d$ et $k \mid h$ en observant l'équation de Pythagore sur CAH et AOH . En divisant toutes les grandeurs par k on peut donc supposer que $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Remarquons que d et a sont les hypoténuses des triangles à côtés entiers CAH et AOH respectivement et sont donc impairs, d'où b est pair. Finalement, le produit de (5) par (6), légèrement remanié donne une différence carrée de deux bicarrés $a^4 - b^4 = (dh)^2$, parfaitement analogue à (3) et donc contredisant le Théorème 1. \square

Historique. Le Lemme 1 caractérise les triplets pythagoriciens primitifs, connus certainement depuis l'époque babylonienne. Le Lemme 2 est une solution d'un problème de Fibonacci sur les suites arithmétiques de carrés. Enfin, le Théorème 1 est un cas particulier d'une équation célèbre de Fermat.

Remerciements. Un grand merci à Fabien Friedli pour ses commentaires très pertinents, ainsi qu'à Grant Cairns, qui a réussi à localiser le résultat précédent dans la littérature, [1], page 135, problème 41. L'ouvrage contient de nombreux problèmes des Olympiades et leurs solutions, mais malheureusement il n'y a pas de corrigé pour ledit problème.

Références

[1] D. Djukić, V. Jankivić, I. Matić, N. Petrović *The IMO Compendium*, Springer-Verlag, (2004)

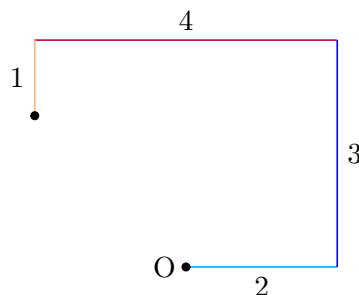
Guido Lob
 CMSI, guido.lob@edu.ti.ch

La risoluzione grafica di equazioni - Il metodo di Lill

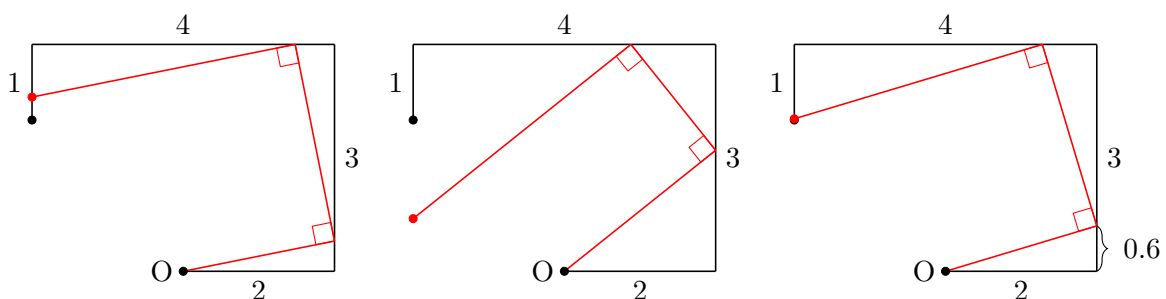
Per risolvere equazioni polinomiali si conoscono solitamente metodi algebrici o numerici relativamente freddi. Esiste però un sorprendente metodo geometrico per risolvere equazioni di qualunque grado detto Metodo di Lill presentato in modo molto elegante da Burkard Polster nel suo canale YouTube Mathologer (<https://www.youtube.com/watch?v=IUC-8P0zXe8>). Per capire il meccanismo iniziamo da un esempio e supponiamo di voler risolvere l'equazione

$$2x^3 + 3x^2 + 4x + 1 = 0.$$

Partiamo disegnando una spirale rettangolare basando le lunghezze sui coefficienti come segue:



Adesso supponiamo di avere un laser (particolare) posto nell'origine O che rimbalza formando degli angoli retti ogni volta che incide su di una parete (per provare, utilizzare l'applet https://www.qedcat.com/misc/lill_method/):



Il risultato di Lill dice che quando il punto di arrivo del laser coinciderà con il punto finale avremo trovato la soluzione e che questa sarà (meno) la pendenza del primo tratto di laser.

Possiamo verificare che nel terzo caso la pendenza è $\frac{0.6}{2} = 0.3$ e che effettivamente

$$2 \cdot (-0.3)^3 + 3 \cdot (-0.3)^2 + 4 \cdot (-0.3) + 1 = 0.016$$

dunque è con ottima approssimazione una soluzione.

La formalizzazione di percorso e laser

Specifichiamo le definizioni formali del percorso e del comportamento del laser per evitare ambiguità.

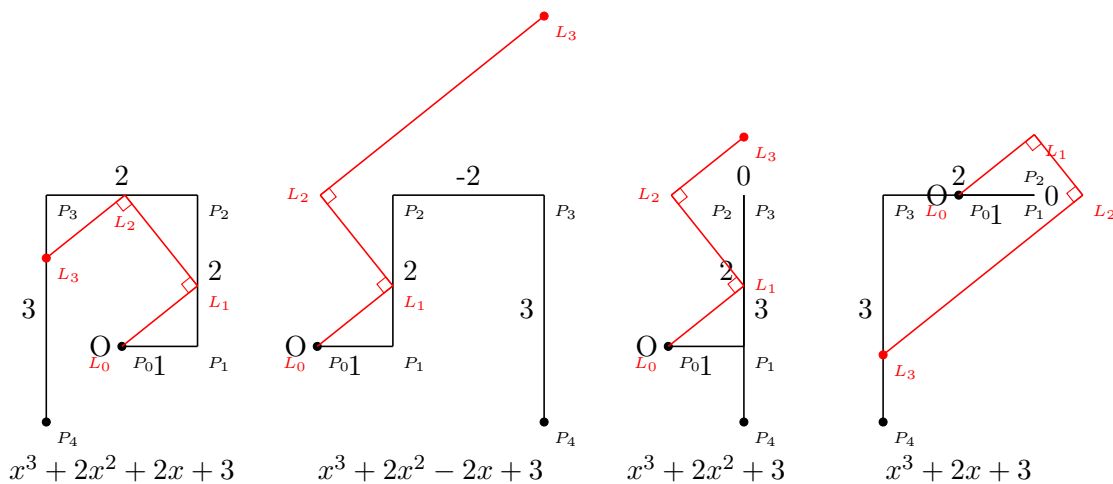
Definizione 1. Il polinomio $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ definisce un percorso come segue:

1. Si fissa un punto $P_0 = O$ una direzione unitaria di partenza e si fissa $a_i = a_0$, il primo coefficiente.
2. Si procede di a_i unità raggiungendo il punto P_{i+1} poi si ruota in senso antiorario di 90° .
3. Si ripete il punto precedente con il prossimo coefficiente ($i \mapsto i + 1$) finché non sono terminati.

In particolare vale che

- se un coefficiente è negativo, il cammino procede nella direzione opposta;
- se un coefficiente è zero non avviene alcuna traslazione, ma avviene comunque la rotazione.

Raffiguriamo alcune delle possibili situazioni con i relativi cammini:



Mentre per quanto riguarda il comportamento del laser:

1. Il laser è inizialmente una retta passante per $L_0 = O$ con un angolo iniziale dato.
2. Il laser interseca la perpendicolare al segmento L_iP_{i+1} passante per P_{i+1} , formando il punto L_{i+1} . Il prossimo laser-retta avrà pendenza perpendicolare a quella corrente.
3. Si ripete il passaggio precedente per $i \mapsto i + 1$ finché si è raggiunto l'ultimo punto di riflessione.

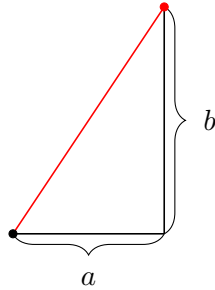
Esercizio 1. Fissando l'origine in O e utilizzando il sistema di riferimento canonico esprimi il punto di arrivo della spirale tramite una serie.

La dimostrazione matematica

Per semplicità invece di lavorare subito con equazioni di grado generale cominciamo come di consueto dal basso e consideriamo equazioni di grado 1, 2 e infine 3.

Equazioni di primo grado

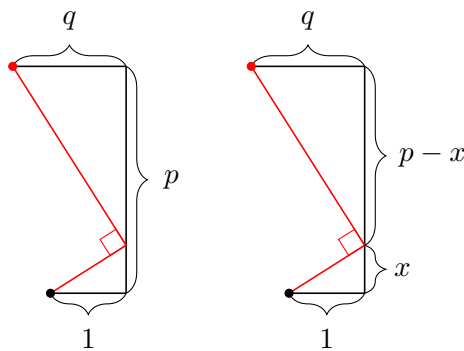
Per equazioni di primo grado della forma $ax + b = 0$ spiegare perché si possa puntare direttamente il laser tra i due punti e leggere la pendenza è immediato:



La pendenza è infatti $\frac{b}{a}$ e naturalmente $x = -\frac{b}{a}$ è la soluzione di $ax + b = 0$.

Equazioni di secondo grado

Per equazioni di secondo grado il discorso diventa più interessante. Per semplicità consideriamo la situazione monica della forma $x^2 + px + q = 0$ e disegniamo il cammino corrispondente.



Supponiamo ora di puntare il laser così che la pendenza sia x . in questo modo il segmento p sarà diviso nella parte x e nella parte $p - x$. Guardando gli angoli notiamo che i due triangoli sono simili e di conseguenza vale

$$\frac{x}{1} = \frac{q}{p-x} \iff (p-x)x = q \iff x^2 - px + q = 0.$$

A questo punto possiamo riscrivere tutto come

$$(-x)^2 + p \cdot (-x) + q = 0$$

per vedere che $-x$ è la soluzione della nostra equazione originale come volevasi dimostrare.

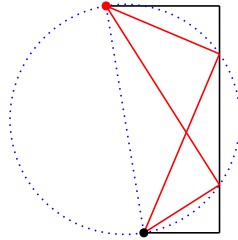
La risoluzione con riga e compasso

Attualmente per trovare la soluzione dobbiamo andare a tentativi sfruttando per esempio un software o una squadra. Nel caso dell'equazione quadratica è però possibile sfruttare la geometria e risolvere l'equazione tramite riga e compasso.

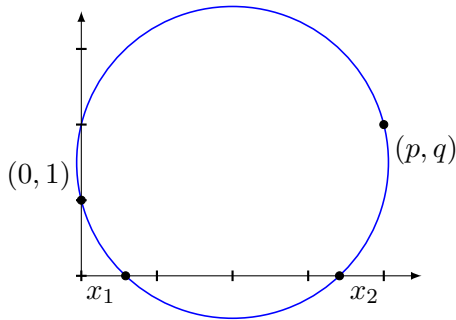
Dobbiamo infatti trovare il punto sul segmento verticale così che l'angolo sia retto, sappiamo però che

Teorema 1 (Talete). *Dato un segmento tutti i punti sulla circonferenza con il segmento come diametro insistono su di esso un angolo retto e viceversa.*

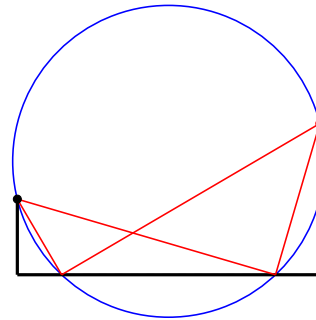
Per questo possiamo formare il cerchio di Talete con il segmento dal punto di inizio e di fine come diametro e i punti d'interesezione con il secondo segmento daranno le soluzioni dell'equazione



Osservazione 1 (Cerchio di Carlyle). Questa soluzione è equivalente al cosiddetto cerchio di Carlyle, il quale dice che per risolvere l'equazione $x^2 - px + q = 0$ è sufficiente disegnare il cerchio con i punti $(0, 1)$ e (p, q) come diametro e leggere le soluzioni dell'equazione dalle intersezioni del cerchio con gli assi.



Il cerchio di Carlyle



L'interpretazione con il metodo di Lill

Il discriminante

Considerando la spirale relativa all'equazione $2x^2 + 2x + 3 = 0$ ci si accorge immediatamente che indipendentemente da come si posiziona la squadra per simulare il laser non è possibile raggiungere il punto di arrivo. Ne consegue che l'equazione è impossibile da risolvere geometricamente.

Calcolando il discriminante Δ algebricamente notiamo che effettivamente $\Delta = -8$ dunque è corretto dire che l'equazione non ha soluzioni. Come possiamo dunque legare i due aspetti precisamente? Per rispondere a questa domanda, chiediamoci:

Domanda 1. Considerando il cammino generico di $x^2 + px + q$ disegnato precedentemente, dove bisogna puntare il raggio laser sul segmento verticale affinché arrivi il più a sinistra possibile?

Tramite qualche tentativo si intuisce che il massimo si ottiene quando si punta il laser esattamente a metà del segmento verticale, ossia quando $x = \frac{p}{2}$. In quel caso si ottiene uno spostamento orizzontale pari a

$$x \cdot (p - x) = \frac{p}{2} \left(p - \frac{p}{2} \right) = \frac{p^2}{4}.$$

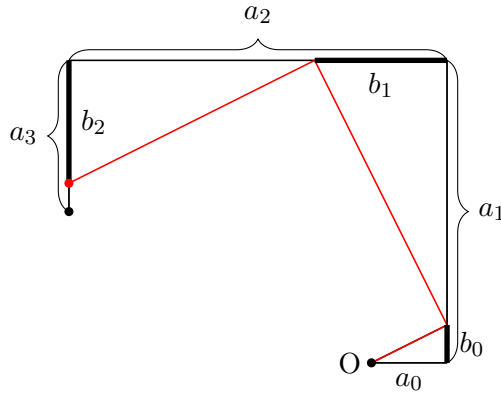
Di conseguenza è possibile ottenere una soluzione se e solo se $q \leq \frac{p^2}{4}$ ossia se $0 \leq p^2 - 4q$ il che è esattamente il criterio del Δ nel caso del polinomio quadratico monico.

Equazioni di grado superiore

In modo analogo al precedente vogliamo dimostrare che l'opposto del rapporto incrementale è una soluzione anche con un'equazione di terzo grado

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

dove la scelta particolare degli indici dei coefficienti è per praticità nelle formule generali che seguiranno. Per questo utilizziamo i tre triangoli simili che si formano:



Per la similitudine vale che:

$$\frac{b_0}{a_0} = \frac{b_1}{a_1 - b_0} = \frac{b_2}{a_2 - b_1}.$$

Poniamo ora il rapporto tra i lati $x = \frac{b_0}{a_0}$ così che

$$b_0 = a_0x,$$

e riscriviamo b_1 utilizzando x e i coefficienti a_3, a_2, a_1, a_0 :

$$x = \frac{b_1}{a_1 - b_0} \implies b_1 = x \cdot (a_1 - b_0) = x \cdot (a_1 - a_0x) = -a_0x^2 + a_1x$$

e poi b_2 :

$$\frac{b_2}{a_2 - b_1} = x \implies b_2 = x \cdot (a_2 - b_1) = x \cdot (a_2 - (-a_0x^2 + a_1x)) = a_0x^3 - a_1x^2 + a_2x.$$

Portando b_2 a destra, notiamo che se $b_2 = a_3$ allora

$$a_0(-x)^3 + a_1(-x)^2 + a_2(-x) + a_3 = 0,$$

ossia $x_0 = -\frac{b_0}{a_0}$ è la soluzione dell'equazione

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0.$$

Osservazione 2. La dimostrazione per laser che fuoriescono dai segmenti come pure per gradi superiori è analoga: come per le espressioni ottenute per il grado 3 si può dimostrare per induzione che

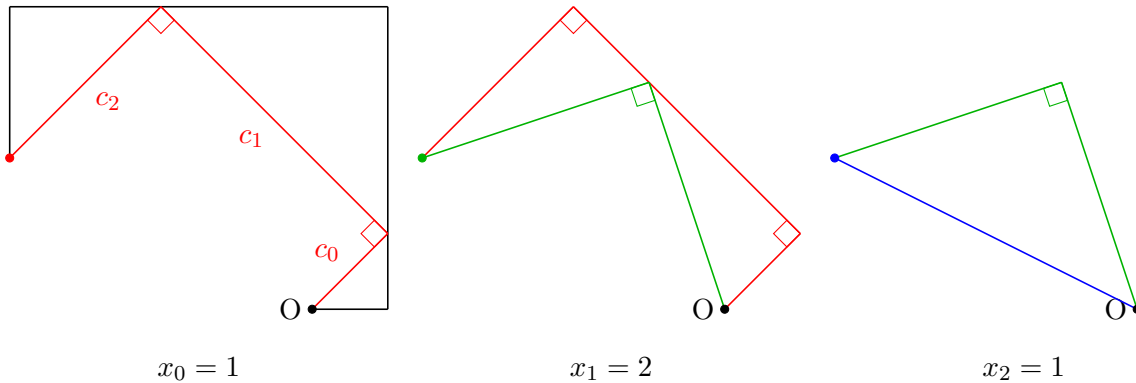
$$b_n = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \cdot a_i \cdot x^{n-i+1}.$$

Tra risoluzione iterativa e divisione polinomiale

Consideriamo il polinomio

$$p(x) = (x + 1)^2(x + 2) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2.$$

Per costruzione sappiamo che potremmo identificare due soluzioni disegnando la spirale corrispondente e puntando il laser in $x = 1$ e $x = 2$ ma c'è di più: notiamo che se consideriamo il percorso del laser come nuovo percorso e leggiamo le soluzioni corrispondenti possiamo determinare iterativamente tutte le soluzioni dell'equazione originale:



Questo non è chiaramente un caso: la realtà è che il metodo di Lill non solo permette di trovare soluzioni ma esegue addirittura la divisione polinomiale. Partendo dai coefficienti per il terzo grado determinati nel caso precedente, combinando Pitagora e la similitudine otteniamo che se x_0 è la pendenza del primo segmento e i c_i sono le lunghezze dei rispettivi segmenti del percorso del laser vale

$$\begin{aligned} c_0 &= \sqrt{a_0^2 + b_0^2} &= \sqrt{a_0^2 + (a_0x_0)^2} &= \sqrt{1 + x_0^2} \cdot a_0 \\ c_1 &= c_0 \cdot \frac{b_1}{b_0} &= \sqrt{1 + x_0^2} \cdot a_0 \cdot \frac{-a_0x_0^2 + a_1x_0}{a_0x_0} &= \sqrt{1 + x_0^2} \cdot (-a_0x_0 + a_1) \\ c_2 &= c_0 \cdot \frac{b_2}{b_0} &= \sqrt{1 + x_0^2} \cdot a_0 \cdot \frac{a_0x_0^3 - a_1x_0^2 + a_2x_0}{a_0x_0} &= \sqrt{1 + x_0^2} \cdot (a_0x_0^2 - a_1x_0 + a_2) \end{aligned}$$

dunque notiamo che il cammino risultante corrisponde a

$$q(x) = \sqrt{1 + x_0^2} \cdot (a_0x^2 + (-a_0x_0 + a_1)x + (a_0x_0^2 - a_1x_0 + a_2)),$$

che non è altro che il quoziente di $p(x) \div (x - x_0)$ riscalato di $\sqrt{1 + x_0^2}$.

Osservazione 3. Per gradi superiori la dimostrazione è analoga: dalle espressioni ottenute per il grado 3 si può infatti dimostrare per induzione che

$$c_n = \sqrt{1 + x_0^2} \cdot \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \cdot a_i \cdot x_0^{n-i}$$

Ne consegue che:

- possiamo eseguire geometricamente la divisione polinomiale modulo riscalamento;
- siccome si può eseguire la divisione polinomiale, per Ruffini è quindi possibile trovare iterativamente tutte le soluzioni del polinomio (con molteplicità) utilizzando ogni successivo percorso.

Esercizio 2. Argomenta perché un polinomio divisibile per $x^2 + 1$ genera un percorso chiuso.

Bulletin N° 157

Impressum

Herausgeber — *Éditeur*

VSMP – SSPMP – SSIMF

Korrespondenz — *Correspondance*

Franz Meier franz.meier@vsmp.ch
 Werner-Kälin-Strasse 1 Tel. 041 210 25 58
 8840 Einsiedeln

Layout — *Mise en page*

Samuel Byland samuel.byland@vsmp.ch
 Weinbergstrasse 48b Tel. 079 728 63 97
 5000 Aarau

Inserateverwaltung — *Publicité*

Hansjürg Stocker hjstocker@vsmp.ch
 Friedheimstrasse 11 Tel. 044 780 19 37
 8820 Wädenswil

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

— *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:

ganzseitig Fr. 500.–
 halbseitig Fr. 300.–

Beilagen:

bis 20 g Fr. 500.–
 über 20 g nach Vereinbarung

Adressänderungen — *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder — Membres de la SSPMP:
 VSG – SSPES – SSISS
 Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)
 Monbijoustrasse 36
 3011 Bern
 Tel. 031 382 52 33
 information@vsg-sspes.ch

übrige Abonnenten — autres abonnées:

Franz Meier franz.meier@vsmp.ch
 Werner-Kälin-Str. 1 Tel. 041 210 25 58
 8840 Einsiedeln

Auflage — *Tirage*

800 Exemplare
 erscheint dreimal jährlich

Präsident VSMP — SSPMP — SSIMF

Josef Züger praesident@vsmp.ch
 Via Salens Tel. 081 641 10 94
 7402 Bonaduz

Deutschscheizerische Mathematikkommission

Andrea Peter praesidium@dmk.vsmsp.ch
 Kantonsschule Sursee
 Moosgasse 11
 6210 Sursee

Deutschscheizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@vsmp.ch
 Gymnasium Burgdorf Tel. 031 638 03 03
 Pestalozzistrasse 17
 3400 Burgdorf

Commission Romande de Mathématique

Sylvie Luisier sylvie.luisier@vsmp.ch
 39, ch. des Sellières Tél. 078 689 34 11
 1219 Aïre

Commission Romande de Physique

Yves Oestreicher yves.oestreicher@vsmp.ch
 Malvand 13 Tél. 079 796 69 95
 1292 Chambésy

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Guido Lob guido.lob@vsmp.ch
 Via Borghese 14 Tel. 078 663 13 37
 6600 Locarno

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

— *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 157 30.11.2024 (Ende Januar)
 Nr. 158 31.03.2025 (Ende Mai)
 Nr. 159 31.07.2025 (Ende September)

Druck und Versand — *Imprimerie*

Niedermann Druck AG
 Letzistrasse 37
 9015 St. Gallen
 www.niedermannruck.ch

Internet:

www.vsmsp.ch – www.sspmp.ch – www.ssimf.ch



V S M P
S S P M P
S S I M F

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica