

V S M P  
S S P M P  
S S I M F

# Bulletin

September 2019 — Septembre 2019 — Settembre 2019

N° 141



V S M P  
S S P M P  
S S I M F

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte  
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique  
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica

# DIE NEUEN VERNIER-PRODUKTE JETZT BEI EDUCATEC BESTELLEN

[educatec.ch/vernier](http://educatec.ch/vernier)

## Go Direct Lichtschranke

In der Go Direct Lichtschranke sind zwei parallele Lichtschranken integriert, mit denen sich - ohne Kenntnis der Geometrie des Objektes - Geschwindigkeit und Beschleunigung messen lassen. Ideal für Freifall-, Pendel- und Stossversuche. Mit Hilfe eines optionalen Lasers lassen sich durch die eingebaute zusätzliche Fotozelle nahezu beliebig grosse Kabelweiten realisieren. Eine weitere Go Direct Lichtschranke kann kaskadiert werden.

- Infrarot-Lichtquelle: Spitzenwert bei 880 nm
- Gabelweite: 77,5 mm
- Abstand beider Lichtschranken: 20 mm
- LED-Anzeigen für die Lichtschranke: Lichtstrahl frei / unterbrochen
- Akku: 300 mAh Li-Poly wiederaufladbar
- Akkulaufzeit: ca. 10 Stunden kontinuierliche Datenerfassung

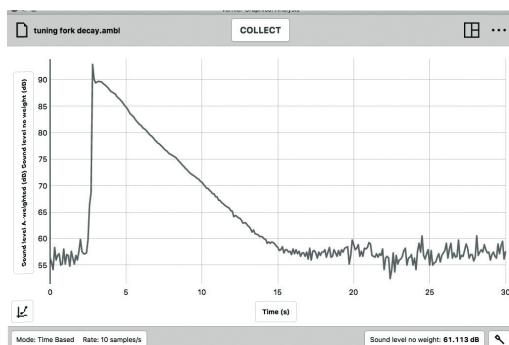
Artikel-Nr. GDX-VPG



## Go Direct Schallpegel- und Soundsensor



Artikel-Nr. GDX-SND



Dieser Schallpegel Sensor wird eingesetzt zur Darstellung der Signalformen von Stimmen und Musikinstrumenten. Weitere Anwendungen sind Experimente mit der Schallgeschwindigkeit. Links ist ein Beispiel von einer Stimmgabel mit der Lautstärke, welche mit der Zeit abnimmt.

- Resonanz: A- oder C-bewertet
- Reichweite: 55-110 dB
- Genauigkeit:  $\pm 3$  dB
- Auflösung: 0,1 dB
- Schallpegel Frequenzbereich: 30-10.000 Hz
- Mikrofonpegel Frequenzbereich: 100 Hz bis 15 kHz
- Typische maximale Frequenz: 10.000 Hz

## Go Direct Beschleunigungsmesser



Artikel-Nr. GDX-ACC

Sammeln Sie Beschleunigungs-, Rotations- und Höhendaten im Klassenzimmer oder im Gelände mit dem Go Direct Beschleunigungssensor. Montieren Sie den Beschleunigungssensor an Ihrem Fahrrad oder befestigen Sie ihn ohne störende Kabel an Ihrem Laborwagen.

Messbereich:

- Geringe Beschleunigung:  $\pm 157$  m/s<sup>2</sup> ( $\pm 16$  g)
- Hohe Beschleunigung:  $\pm 1,960$  m/s<sup>2</sup> ( $\pm 200$  g)
- Gyros:  $\pm 2,000$  °/s, Winkel:  $\pm 180$ °
- Höhenmesser: -1,800m bis 10,000 m

## Go Direct Charge Station



Artikel-Nr. GDX-CRG

Die Go Direct Ladestation ist die perfekte Lösung zum Aufladen Ihrer Go Direct Sensoren. Jede Ladestation hat 16 Ladeanschlüsse, 8 USB- und 8 Sensor-Ports. LED-Leuchten an den Go Direct-Sensoren zeigen den Ladezustand an. Die Station eignet sich auch zum Laden von Go Wireless®-Geräten.

Weitere Informationen finden Sie in unserem Online Shop unter [www.educatec.ch](http://www.educatec.ch)

Für weitere Kataloge von uns wenden Sie sich an [contact@educatec.ch](mailto:contact@educatec.ch)

In der nächsten Ausgabe folgt eine Fortsetzung der GDX Sensoren.

 Go Direct™

**EducaTec AG**

Altes Schulhaus, Kanzleigasse 2  
Postfach, 5312 Döttingen

T +41 56 245 81 61, F +41 56 245 81 63  
[contact@educatec.ch](mailto:contact@educatec.ch), [www.educatec.ch](http://www.educatec.ch)



## In dieser Ausgabe — *Dans ce numéro*

<b>VSMP – SSPMP – SSIMF</b>	<b>3</b>
Einladung zur Generalversammlung – Invitation à l’assemblée générale – Invito all’assemblea generale	3
<b>Commission Romande de Mathématique</b>	<b>4</b>
Alexandre Junod Quelques sujets de trigonométrie	4
Lara Gafner Olympiades internationales de mathématiques	8
<b>Commission Romande de Physique</b>	<b>9</b>
Lara Gafner Olympiades internationales de physique	9
<b>Deutschschweizerische Mathematikkommission</b>	<b>10</b>
René Fehlmann Ein Zick-Zack-Streckenzug im rechtwinkligen Dreieck	10
Hans Walser Der Satz von Eddy	14
<i>Kurs: Online-Aufgaben und Tests mit Möbius</i>	17
<i>Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht</i>	18
Peter Gallin Aufgabe von Elia von Salis	20
Lara Gafner Internationale Mathematik-Olympiade	21
<i>Kurs: Geogebra 1: Grundlagen der Bedienung</i>	22
<i>Kurs: Geogebra 2: Anschauliche Zugänge zur Analysis</i>	23
Monika Krichel Mathematik für Ausserirdische	24
<i>Ausstellung</i> Eugen Jost	27

<b>Deutschschweizerische Physikkommission</b>	<b>28</b>
Martin Lieberherr Luftwiderstand der Restatmosphäre auf die ISS	28
Lara Gafner Internationale Physik-Olympiade	30
<i>Kurs: 20. Schweizerischer Tag für Physik und Unterricht</i>	31

Internet-Adressen — *Adresses Internet*  
[www.vsmp.ch](http://www.vsmp.ch) — [www.sspmp.ch](http://www.sspmp.ch) — [www.ssimf.ch](http://www.ssimf.ch)

Titelseite — *Page de Titre* (Photo: Thanh Phong Lê)  
*Equipe suisse aux Olympiades international de physique (article à la page 9 de ce numéro)*  
Schweizer Team bei der International Physikolympiade (Artikel auf Seite 30 in dieser Ausgabe)



V S M P  
S S P M P  
S S I M F

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte  
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique  
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica

## **Einladung zur Generalversammlung des VSMP**

## **Invitation à l'Assemblée générale de la SSPMP**

## **Invito all'Assemblea generale della SSIMF**

Kantonsschule Wil (SG), Freitag, 29. November 2019 – *vendredi 29 novembre 2019* – venerdì 29 novembre 2019

### **A. Rahmenprogramm**

Teilnahme am VSG-Nachmittagsprogramm. *Participation au programme organisé par la SSPES*. Partecipazione al programma organizzato dalla SSISS.

### **B. Generalversammlung 2019 – Assemblée générale 2019 – Assemblea generale 2019**

**Beginn:** 16:30 Uhr, Ort/lieu/luogo: siehe/voir/vedere Website [www.vsmf.ch](http://www.vsmf.ch) (ab Ende Oktober)

**Traktandenliste – Ordre du jour – Ordine del giorno:**

0. Begrüssung – *Salutations* – Saluto
1. Traktandenliste 2019, Protokoll 2018 – *Ordre du jour 2019, procès-verbal 2018* – Ordine del giorno 2019, verbale 2018
2. Jahresberichte des Vereins und der Kommissionen – *Rapports annuels de la société et des commissions* – Rapporti annuali della società e delle commissioni
3. Jahresrechnungen des Vereins und der Kommissionen 2018/19 – *Comptes annuels de la société et des commissions 2018/19* – Conti annuali della società e delle commissioni 2018/19
4. Budget 2019/20 und Mitgliederbeitrag 2020/21 – *Budget 2019/20 et cotisations 2020/21* – Preventivo 2019/20 e quota sociale 2020/21
5. Mutationen – *Mutations* – Mutazioni
6. Wahlen – *Élections* – Elezioni
7. Anträge von Mitgliedern – *Propositions des membres* – Mozioni di membri
8. Varia – *Divers* – Eventuali

**Bemerkungen – Remarques – Commenti:**

- Das Protokoll der letzten GV und die Einladung zur diesjährigen GV (inklusive Traktandenliste) sind ab Ende Oktober 2019 auf unserer Website [www.vsmf.ch](http://www.vsmf.ch) zu finden.
- *Le procès-verbal de la dernière AG et l'invitation de cette année (ordre du jour inclus) se trouveront sur notre site internet [www.sspmp.ch](http://www.sspmp.ch) à partir de fin d'octobre 2019.*
- A partire dalla fine di ottobre 2019 saranno disponibili sul sito [www.ssimf.ch](http://www.ssimf.ch) il verbale dell'ultima AG e l'invito all'AG di quest'anno (inclusivo dell'ordine del giorno).

### **C. Gemeinsames Abendessen – Repas du soir en commun - Cena comune**

- Im Anschluss an die GV werden wir in einem Restaurant ein gemeinsames Nachtessen einnehmen. Der Ort wird an der GV bekannt gegeben.
- *Après l'assemblée générale, nous prendrons un repas en commun dans un restaurant dont l'adresse sera communiqué à la fin de l'AG.*
- Al termine è prevista una cena comune; l'indirizzo del ristorante sarà comunicato al termine dell'AG.

Locarno, settembre 2019, Arno Gropengiesser, Präsident / *Président* / Presidente

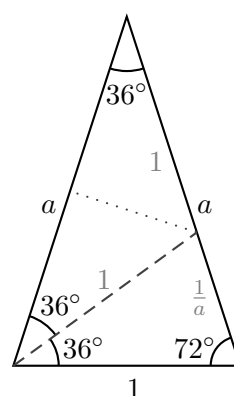
## Quelques sujets de trigonométrie

Alexandre Junod, Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), alexandre.junod@rpn.ch

Nous abordons divers thèmes de trigonométrie en espérant pouvoir donner un sens plus concret à certaines formules, même si elles ne sont établies ici que pour des angles aigus. Les démonstrations sont élémentaires et s'appuient sur des illustrations judicieuses.

### 1 Valeurs des fonctions trigonométriques pour $\alpha = 36^\circ$

On considère un triangle isocèle présentant un côté de longueur 1 et un angle opposé de  $36^\circ$ . En traçant (en traitillés) sa bissectrice par rapport à un des deux autres angles, on obtient deux triangles isocèles ayant chacun deux côtés de longueur 1. Le plus petit d'entre eux est une réduction de facteur  $a$  du triangle initial, la longueur de son côté restant vaut donc  $\frac{1}{a}$ . On a ainsi la relation  $a = 1 + \frac{1}{a}$ , autrement dit  $a^2 = a + 1$  et le nombre  $a$ , qui est positif, n'est rien d'autre que le nombre d'or  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

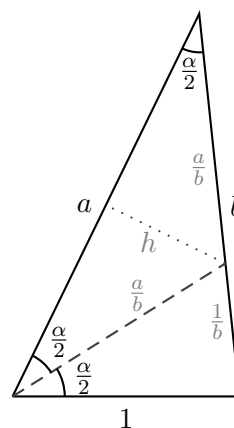


Le triangle isocèle moyen peut être séparé en deux triangles rectangles en considérant sa hauteur (en pointillés). En appliquant la relation “cos-adj-hyp” dans l'un d'eux, on trouve alors  $\cos(36^\circ) = \frac{\phi}{2}$  et le théorème de Pythagore donne la hauteur :

$$\sin(36^\circ) = \sqrt{1 - \cos^2(36^\circ)} = \sqrt{1 - \frac{\phi^2}{4}} = \sqrt{\frac{4 - \phi^2}{4}} = \sqrt{\frac{4 - (\phi + 1)}{4}} = \sqrt{\frac{3 - \phi}{4}} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$$

### 2 Formules de bisection

Avec un schéma comparable au précédent, nous établissons ici des formules générales pour déterminer le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle  $\frac{\alpha}{2}$  à partir d'un angle aigu  $\alpha$ . On considère un triangle présentant un angle  $\alpha$  et un angle  $\frac{\alpha}{2}$  situé en face d'un côté de longueur 1. La bissectrice de l'angle  $\alpha$  donne lieu à une réduction de facteur  $b$  du triangle initial (indirectement semblable), avec des côtés de longueurs  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{1}{b}$ , ainsi qu'à un triangle isocèle qui admet alors deux côtés de longueur  $\frac{a}{b}$ . On a donc la relation  $b = \frac{a}{b} + \frac{1}{b}$ , autrement dit  $b^2 = a + 1$ . Par le théorème du cosinus ( $b^2 = a^2 + 1 - 2a \cos \alpha$ ), on en déduit que  $a = 1 + 2 \cos \alpha$  et donc  $b^2 = 2 + 2 \cos \alpha$ .



La hauteur (en pointillés) du triangle isocèle est donnée par le théorème de Pythagore :

$$h = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{4}} = a\sqrt{\frac{4 - b^2}{4b^2}} = \frac{a}{2b}\sqrt{4 - b^2}$$

Les relations “cos-adj-hyp” et “sin-opp-hyp” dans un des triangles rectangles issus du triangle isocèle donnent

$$1) \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a/2}{a/b} = \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{2+2\cos\alpha}}{2}$$

$$2) \quad \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{h}{a/b} = \frac{bh}{a} = \frac{\sqrt{4-b^2}}{2} = \frac{\sqrt{2-2\cos\alpha}}{2}$$

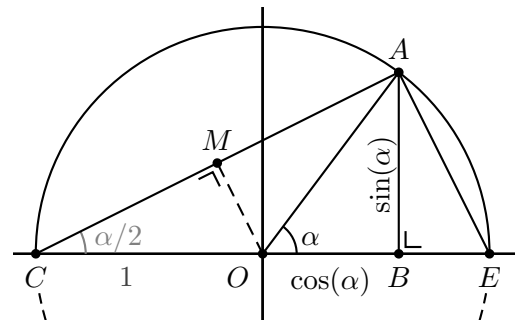
$$3) \quad \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = \frac{\sqrt{2-2\cos\alpha}}{\sqrt{2+2\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

En amplifiant par  $\sqrt{1+\cos\alpha}$  ou par  $\sqrt{1-\cos\alpha}$ , on trouve  $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ .

### Une autre preuve

Inspiré par le théorème de l'angle au centre qui relie un angle à sa moitié, nous pouvons démontrer les formules de bissection sans le théorème du cosinus.

À un angle aigu  $\alpha$  est associé un point  $A$  sur le cercle trigonométrique et les indications fournies pour le triangle rectangle  $OAB$  dans le schéma ci-contre sont claires. Dans le triangle  $OAC$ , l'angle en  $O$  est  $180^\circ - \alpha$  et la somme des deux angles restants est  $\alpha$ . Comme le triangle est isocèle (avec deux côtés de longueur 1), chacun de ces deux angles est donc  $\frac{\alpha}{2}$ . Le point  $M$  est le milieu du côté  $AC$  et le triangle  $OCM$  est rectangle. Comme la longueur de son hypoténuse vaut 1, celles de ses cathètes sont  $\cos(\alpha/2)$  et  $\sin(\alpha/2)$ .



Dans le triangle  $ABC$ , les formules “tan-opp-adj”, “cos-adj-hyp” et “sin-opp-hyp” donnent

$$1) \quad \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$2) \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2\cos(\alpha/2)}, \text{ donc } \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$3) \quad \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\alpha}{2\cos(\alpha/2)}, \text{ donc } \sin(\alpha) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Comme le triangle  $OAE$  est isocèle, l'angle en  $E$  vaut  $\frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ . Dans le triangle rectangle  $ABE$ , l'angle en  $A$  est donc  $90^\circ - (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{2}$  et la formule “tan-opp-adj” donne

$$4) \quad \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \text{ donc } \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = \frac{1-\cos\alpha}{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)} \text{ et } \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

Ainsi, si on connaît les valeurs des fonctions trigonométriques pour un angle aigu  $\alpha$ , on peut calculer

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad \text{et} \quad \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

**Application.** En considérant les angles  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\alpha = 30^\circ$  et  $\alpha = 36^\circ$ , on obtient

$$1) \sin(22.5^\circ) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}, \quad \cos(22.5^\circ) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \quad \tan(22.5^\circ) = \sqrt{2} - 1$$

$$2) \sin(15^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \quad \cos(15^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad \tan(15^\circ) = 2 - \sqrt{3}$$

$$3) \sin(18^\circ) = \frac{\sqrt{2 - \phi}}{2} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}}, \quad \cos(18^\circ) = \frac{\sqrt{2 + \phi}}{2} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}, \quad \tan(18^\circ) = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}}$$

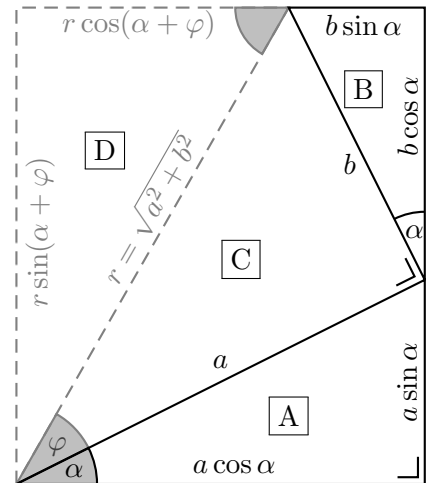
### 3 Combinaisons de sinus et de cosinus

Pour un angle aigu  $\alpha$  et des nombres positifs  $a$  et  $b$ , on considère le schéma ci-contre. Les triangles rectangles **A** et **B** sont donnés, avec un angle  $\alpha$  et des hypoténuses respectives  $a$  et  $b$ . Le triangle **C** a un certain angle aigu  $\varphi$ , un angle droit et l'hypoténuse  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ , commun avec le triangle rectangle **D** qui admet un angle  $\alpha + \varphi$ .

Le schéma montre les relations suivantes :

$$a \sin(\alpha) + b \cos(\alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi)$$

$$a \cos(\alpha) - b \sin(\alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\alpha + \varphi)$$



où l'angle  $\varphi$  vérifie

$$\tan(\varphi) = \frac{b}{a}, \quad \cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

En fait, l'angle  $\varphi$  est entièrement défini (modulo  $360^\circ$ ) par deux de ces relations et ces formules restent valables pour un angle  $\alpha$  et des nombres  $a$  et  $b$  quelconques.

**Application.** Si  $a = b = 1$ , alors  $\tan(\varphi) = 1$  donc  $\varphi \in \{45^\circ, 225^\circ\}$ . Comme  $\cos(\varphi) > 0$ , on a  $\varphi = 45^\circ$ . Il s'ensuit que  $\sin(\alpha) + \cos(\alpha) = \sqrt{2} \sin(\alpha + 45^\circ)$  et  $\cos(\alpha) - \sin(\alpha) = \sqrt{2} \cos(\alpha + 45^\circ)$ .

### 4 Formules d'addition des angles

En considérant simplement  $a = \cos(\beta)$  et  $b = \sin(\beta)$  dans les formules précédentes, on a  $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$  et  $\varphi = \beta$ . On retrouve ainsi les relations bien connues “ $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$ ” et “ $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$ ”. Nous pouvons les établir d'une autre manière en calculant des aires de triangles selon la formule “ $\mathcal{A} = \frac{1}{2} ab \sin(\gamma)$ ” avec les notations standard.

$$1) \begin{array}{c} \text{triangle } (a, b, \alpha + \beta) \\ \hline \frac{1}{2} ab \sin(\alpha + \beta) \end{array} = \begin{array}{c} \text{triangle } (a, b \cos(\beta), \alpha) \\ \hline \frac{1}{2} ab \cos(\beta) \sin(\alpha) \end{array} + \begin{array}{c} \text{triangle } (a \cos(\alpha), b, \beta) \\ \hline \frac{1}{2} ab \cos(\alpha) \sin(\beta) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \begin{array}{c} \text{Triangle with hypotenuse } a, \text{ angle } \beta, \text{ and side } b \\ \text{at angle } \alpha \end{array} = \begin{array}{c} \text{Triangle with hypotenuse } a, \text{ angle } 90^\circ - \beta, \text{ and side } b \cos(\alpha) \\ \text{at angle } \alpha \end{array} - \begin{array}{c} \text{Triangle with hypotenuse } b, \text{ angle } \alpha, \text{ and side } a \sin(\beta) \\ \text{at angle } \alpha \end{array} \\
 & \frac{1}{2} ab \sin((90^\circ - \beta) - \alpha) = \frac{1}{2} ab \cos(\alpha) \sin(90^\circ - \beta) - \frac{1}{2} ab \sin(\beta) \sin(\alpha)
 \end{aligned}$$

On conclut alors en utilisant la relation  $\sin(90^\circ - \gamma) = \cos(\gamma)$ .

**Remarque.** Les formules des paragraphes 3 et 4 peuvent être présentées dans l'autre ordre. En divisant un vecteur non nul  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  par sa norme, on obtient un vecteur  $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  de norme 1, lequel peut s'écrire sous la forme  $\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$  pour un certain angle  $\varphi$ . On a alors

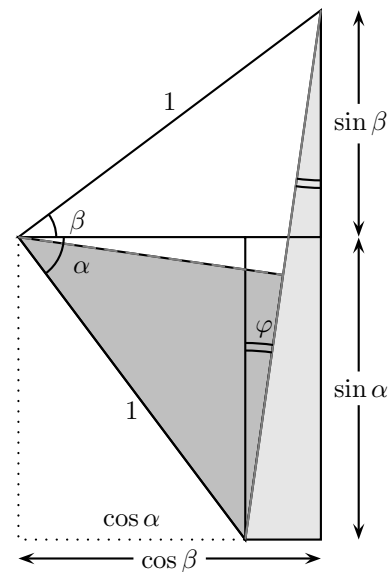
$$\begin{aligned}
 a \sin(\alpha) + b \cos(\alpha) &= \sqrt{a^2 + b^2} \left( \sin(\alpha) \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \cos(\alpha) \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \\
 &= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin(\alpha) \cos(\varphi) + \cos(\alpha) \sin(\varphi)) \\
 &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi).
 \end{aligned}$$

## 5 Somme de sinus et différence de cosinus

On accole deux triangles rectangles d'hypoténuse 1, l'un présentant un angle  $\alpha$  et l'autre un angle  $\beta \leq \alpha$ . Le triangle rectangle gris foncé dans le schéma ci-contre est un demi-triangle isocèle qui admet un angle  $\frac{\alpha + \beta}{2}$ . Le côté opposé est  $\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$  et l'angle aigu restant est  $90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$ . On a

$$\varphi = 90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} - (90^\circ - \alpha) = \alpha - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

L'angle  $\varphi$  se retrouve dans le triangle rectangle gris clair à droite du schéma. Les relations "cos-adj-hyp" et "sin-opp-hyp" se traduisent de la manière suivante.



$$1) \quad \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{\sin(\alpha) + \sin(\beta)}{2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}, \quad \text{donc} \quad \sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right),$$

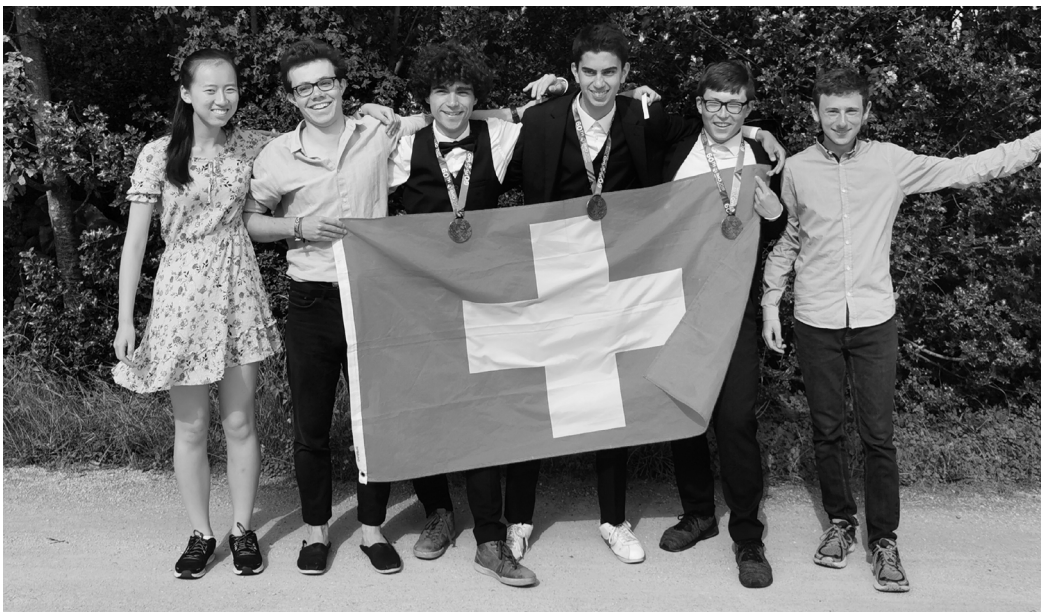
$$2) \quad \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{\cos(\beta) - \cos(\alpha)}{2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}, \quad \text{donc} \quad \cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

## Trois médailles de bronze pour des jeunes Suisses aux Olympiades internationales de mathématiques

Lara Gafner, Wissenschafts-Olympiade, info@olympiad.ch

**Les Olympiades internationales de mathématiques se sont déroulées du 11 au 22 juillet à Bath en Angleterre. L'équipe suisse a gagné trois médailles de bronze et une mention honorifique.**

A l'occasion de cette 60<sup>ème</sup> édition de la compétition, des étudiants en provenance de 112 pays ont fait le voyage à Bath. La Suisse était représentée par Raphael Angst (Ecole cantonale im Lee, ZH), Tim Frey (Gymnase de Neufeld, BE), Valentin Imbach (MNG Rämibühl, ZH), Matthew Meyer (Collège Claparède, GE), Tanish Patil (Institut International de Lancy, GE), Yanta Wang (Gymnase d'Oberwil, BL).



Les Zurichois Raphael Angst et Valentin Imbach, ainsi que Tanish Patil du canton de Genève, ont remporté le bronze. La Bâloise Yanta Wang a obtenu une mention honorifique.

### Cogitations et éclairs de génie

Les talents en mathématiques ont montré leurs capacités pendant deux épreuves de quatre heures et demie, comportant chacune trois devoirs. Le défi consiste avant tout à appliquer les techniques apprises lors de la préparation de façon créative à de nouveaux problèmes, qui sont souvent inspirés par la recherche actuelle en mathématiques. «Les participants sont ici confrontés au type de questions qu'ils rencontreront peut-être aussi pendant leur carrière», explique le chef d'équipe Louis Hainaut. Pendant le deuxième examen, Valentin Imbach a réfléchi longtemps à un problème de combinatoire sans parvenir à une solution élégante - jusqu'à ce qu'il ait l'éclair de génie décisif. «Ce qui m'a le plus fasciné en résolvant les devoirs de mathématiques, c'est le moment où toutes les pièces du puzzle s'assemblent», dit-il.

### De participant à bénévole

Au-delà des salles d'examens, les jeunes ont eu la chance de visiter Stonehenge et de faire connaissance les uns avec les autres. Matthew Meyer raconte qu'il a noué des amitiés avec des pairs du monde entier, en jouant au frisbee ou en préparant des pancakes avec eux. Valentin Imbach est un peu nostalgique car c'est sa dernière année comme participant aux Olympiades de mathématiques, puisqu'il a terminé le gymnase. Mais il ne les quitte pas totalement: il se réjouit déjà de participer à l'avenir à l'organisation des Olympiades suisses de mathématiques en tant que bénévole.

## Des étudiants suisses remportent des médailles de bronze aux Olympiades internationales de physique

Lara Gafner, Wissenschafts-Olympiade, info@olympiad.ch

**Cinq jeunes en provenance de la Suisse ont participé aux Olympiades internationales de physique, qui se déroulaient du 7 au 15 juillet à Tel Aviv. Ils ont été récompensés par deux médailles de bronze et une mention honorifique.**

Les Olympiades internationales de physique célébraient en Israël leur 50<sup>ème</sup> anniversaire. Cinq gymnasiens suisses étaient de la partie, après s'être mesurés à 800 autres fans de physique suisses au niveau national: Cédric Solenthaler (Ecole cantonale de Burggraben, SG), Fabian Graf (Gymnase de St. Antonius, AI), Hiro Farré (Institut Le Rosey à Rolle, VD), Jonas Hofmann (Ecole cantonale d'Uster, ZH), Nicolas Schmid (Lycée cantonal de Porrentruy, JU)



Cédric Solenthaler et Hiro Farré ont remporté le bronze et Jonas Hofmann a obtenu une mention honorifique.

### Optimisme malgré des épreuves particulièrement difficiles

Les épreuves étaient étonnamment difficiles cette année - les participants et leurs accompagnants étaient unanimes sur ce point. Néanmoins, Hiro Farré peut être fier de s'être surpassé. Alors qu'il n'avait pas pu remporter un prix lors de sa dernière participation aux Olympiades internationales de physique, cette fois il rentre chez lui avec une médaille de bronze en poche. Quant à Jonas Hofmann: après les épreuves expérimentales, il était confiant quant à la possibilité d'obtenir une distinction. Ces Olympiades sont constituées d'épreuves expérimentales et théoriques. Ces tests durent cinq heures et exigent une compréhension de base des concepts de la physique, ainsi que des compétences mathématiques et de la créativité. Cette année, les participants ont dû entre autres étudier la conductivité thermique de différents métaux et le fonctionnement d'un micro-ondes.

### Aventure et détente à 30 degrés

Outre les examens, un programme de loisirs intensif a permis aux participants de découvrir le plus possible le pays d'accueil, de Jérusalem jusqu'à la mer Morte. En plus de la relaxation en apesanteur dans l'eau salée, c'était aussi l'aventure en rafting sur le Jourdain - un moment fort du voyage, selon les étudiants. Malgré le fait de se lever tôt et les coups de soleil quotidiens, Fabian Graf a eu beaucoup de plaisir. Se mesurer à d'autres jeunes passionnés de physique provenant de plus de 80 pays a été une formidable expérience.

# Ein Zick-Zack-Strecken zug im gleichschenkligen Dreieck

René Fehlmann, PH FHNW, rene.fehlmann@fhnw.ch

## 1 Einleitung

Der Artikel von Beat Jaggi [1] im Bulletin 138 hatte mich an eine Beobachtung betreffend regulärer  $n$ -Ecke erinnert. Und zwar hat, wenn  $n$  *ungerade* ist, jede Seite eines regulären Polygons einen der Seite gegenüberliegenden Eckpunkt. Diese Seite des Polygons bildet zusammen mit dem gegenüberliegenden Punkt ein gleichschenkliges Dreieck mit besonderen Eigenschaften (Abb. 1). Auch hier handelt es sich um ein Phänomen, wo offensichtlich die Parität eine Rolle spielt.

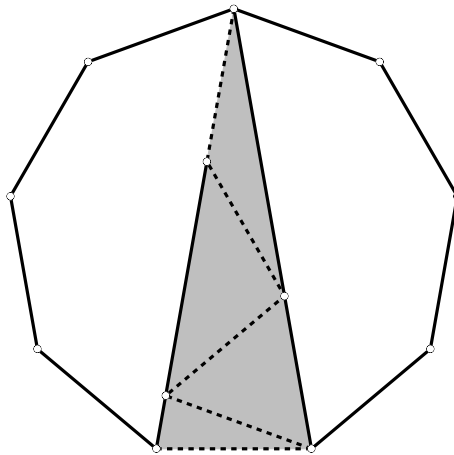


Abbildung 1 – 9-Eck mit eingeschriebenem gleichschenkligen Dreieck und Zick-Zack-Strecken zug.

Die Schenkel dieses Dreiecks sind zwei *längste* Diagonalen des Polygons. Der in der Figur gestrichelt eingezeichnete Zick-Zack-Strecken zug besteht aus Strecken, welche alle gleich lang wie die Seitenlänge des Polygons sind. Die Eckpunkte des Streckenzugs liegen auf den Schenkeln des Dreiecks. Es scheint so, als habe der Streckenzug und das reguläre  $n$ -Eck drei gemeinsame Punkte. Wir untersuchen deshalb solche Zick-Zack-Strecken züge in beliebigen gleichschenkligen Dreiecken.

## 2 Zick-Zack-Strecken züge in gleichschenkligen Dreiecken

Man betrachte ein beliebiges gleichschenkliges Dreieck. Die Basis wird mehrfach in einem Zick-Zack-Strecken zug auf die beiden Schenkel abgetragen (siehe Abb 2). Je nachdem wie gross der der Basis gegenüberliegende Winkel  $\alpha$  ist, endet der Streckenzug im Dreieckspunkt  $C$  (Spitze des gleichschenkligen Dreiecks) oder nicht. Wir untersuchen für welche Winkel  $\alpha$  dieser Streckenzug in  $C$  endet. Dazu führen wir folgende Bezeichnungen ein: Die Basis des gleichschenkligen Dreiecks bezeichnen wir mit  $P_1P_2$ . Der Zick-Zack-Strecken zug besteht aus den Eckpunkten  $P_1P_2P_3 \dots P_n$ . Die Frage ist also: Für

welchen Wert  $\alpha$  ist  $P_n = C$ . Innerhalb des Streckenzugs betrachten wir die Winkel

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \angle P_{i+2}P_{i+1}P_i, & \beta_i &= \angle P_{i+1}P_iP_{i+2} & \text{falls } i \text{ ungerade bzw.} \\ \alpha_i &= \angle P_iP_{i+1}P_{i+2}, & \beta_i &= \angle P_{i+2}P_iP_{i+1} & \text{sonst.} \end{aligned}$$

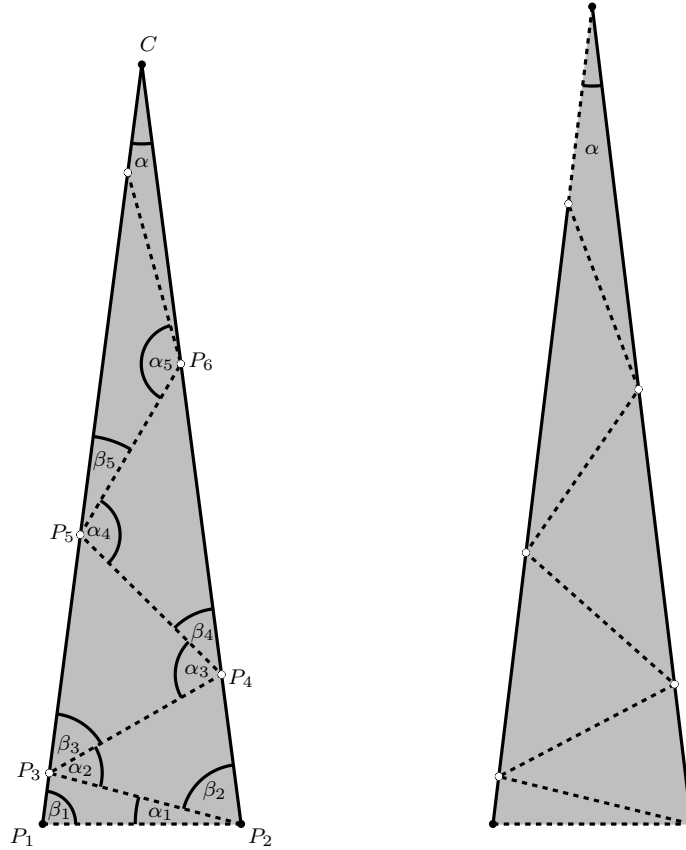


Abbildung 2 – Gleichschenkliges Dreieck mit Zick-Zack-Streckenzug. Der Streckenzug in der rechten Figur endet in der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks.

### 2.1 Rekursive Darstellung der Folge $(\beta_n)$

Zunächst gilt offensichtlich  $\beta_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$  und  $\alpha_1 = \alpha$ , da die Dreiecke  $P_1P_2C$  und  $P_3P_1P_2$  beide gleichschenklig sind und die Basiswinkel beider Dreiecke gleich gross sind.

Der Figur entnimmt man:

$$\left. \begin{aligned} 2\beta_n + \alpha_n &= 180^\circ && \text{Winkelsumme im gleichschenkligen} \\ &&& \text{Dreieck } P_nP_{n+1}P_{n+2} \\ \beta_{n-1} + \alpha_n + \beta_{n+1} &= 180^\circ && \text{gestreckter Winkel über } P_{n+1} \end{aligned} \right\} \text{für } n > 1$$

Das heisst, die Folge der  $\beta_i$ 's genügt der rekursiven Gleichung

$$\beta_{n+1} = 2\beta_n - \beta_{n-1}, \quad n > 1 \tag{1}$$

### 2.2 Explizite Darstellung der Folge $(\alpha_n)$ und $(\beta_n)$

Die rekursive Beschreibung (1) der Folge  $(\beta_n)$  ist äquivalent zu:

$$\beta_{n+1} - \beta_n = \beta_n - \beta_{n-1}$$

Es handelt sich also um eine arithmetische Folge 1. Ordnung. Mit  $\beta_2 + \alpha_1 = \beta_2 + \alpha = \beta_1$  und dem Startwert für  $\beta_1$  erhält man eine explizite Darstellung der beiden Winkelfolgen:

$$\begin{aligned}\alpha_n &= (2n - 1) \cdot \alpha \\ \beta_n &= 90^\circ + \frac{\alpha}{2} - n \cdot \alpha\end{aligned}$$

### 2.3 Schliessungsbedingung

Die Bedingung  $P_n = C$  ist erfüllt, wenn  $\beta_{n-2} = \alpha$  gilt. Mit Hilfe der expliziten Darstellung für die Folge  $\beta_n$  erhält man

$$90^\circ + \frac{\alpha}{2} - (n - 2) \cdot \alpha = \alpha$$

und aufgelöst nach dem Winkel zwischen den Schenkeln des Dreiecks ergibt sich

$$\alpha = \frac{180^\circ}{2n - 3}.$$

Die Zick-Zack-Linie schliesst sich also immer, wenn  $\alpha$  ein ungerader Teil von  $180^\circ$  ist.

In Abbildung 3 sind ein paar Fälle dargestellt:

- Für  $n = 3$  ist  $\alpha = 60^\circ$ . Es handelt sich also um ein gleichschenkliges Dreieck und der Streckenzug setzt sich aus zwei Seiten des Dreiecks zusammen.
- Für  $n = 4$  ist  $\alpha = 36^\circ$ . Der Streckenzug besteht aus drei Teilen,  $P_3$  teilt die Strecke  $P_1C$  im Verhältnis des goldenen Schnitts.
- Für  $n = 5$  ist  $\alpha = \frac{1}{7} \cdot 180^\circ$ . Der Streckenzug besteht aus 6 Teilen. Dieses gleichschenklige Dreieck lässt sich nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren.

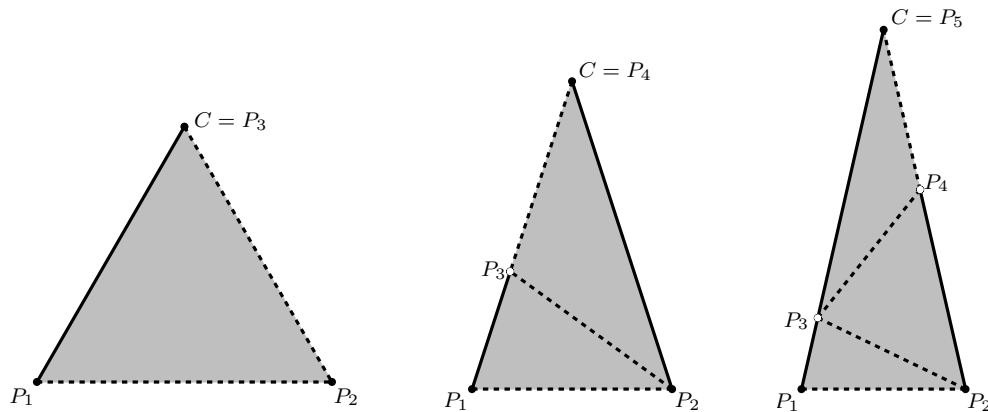


Abbildung 3 – Spezialfälle für  $\alpha = 60^\circ, 36^\circ$  und  $\frac{1}{7} \cdot 180^\circ$ .

## 3 Das reguläre Vieleck mit ungerader Eckenzahl

Man betrachte nun ein reguläres Vieleck mit ungerader Eckenzahl  $2n + 1$ . Wie oben beschrieben, schreibe man dem  $2n + 1$ -Eck ein gleichschenkliges Dreieck ein (siehe Abb. 4). Der Punkt  $C$  bezeichne wieder die Spitze des gleichschenkligen Dreiecks. Aus dem Peripheriewinkelsatz folgt, dass der Zentriwinkel  $2\alpha$  beträgt und natürlich ist  $(2n + 1) \cdot 2\alpha = 360^\circ$  und damit  $\alpha = \frac{180^\circ}{2n + 1}$ . Die Bedingung ist damit erfüllt, dass der Zick-Zack-Streckenzug in diesem gleichschenkligen Dreieck im Punkt  $C$  endet.

Wir zeigen, dass die Längen der Strecken  $CP_2, CP_3, CP_4, \dots$  jeweils gleich gross sind wie die Längen der Diagonalen des regulären Vielecks, d.h. auf Kreisen mit Mittelpunkt in  $C$ , die durch einen Punkt  $P_i$  gehen, liegt auch ein Eckpunkt des regulären Polygons.

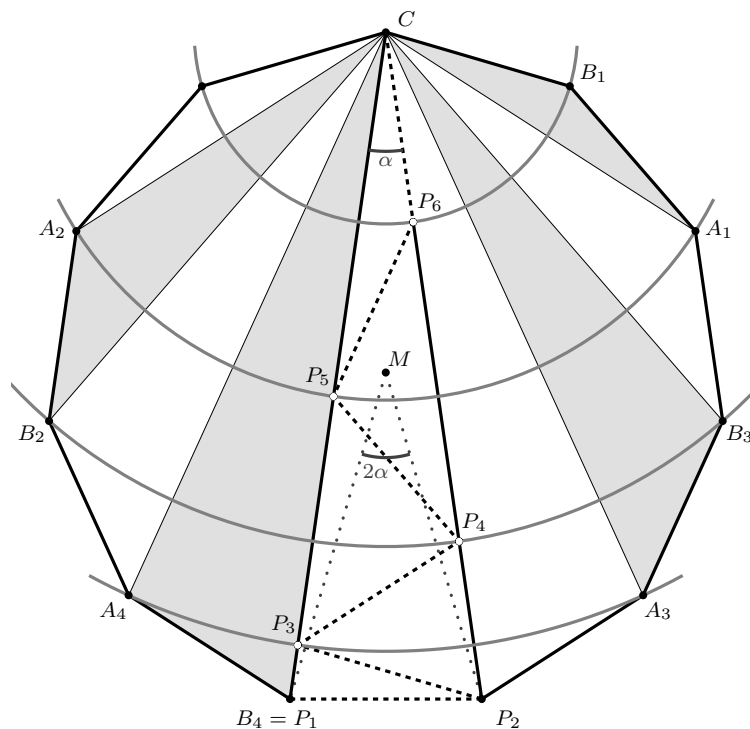


Abbildung 4 – 11-Eck mit eingeschriebenem gleichschenkligen Dreieck.

Man betrachte dazu die Dreiecke  $A_iB_iC$  wie in Abbildung 4 eingezeichnet. Aus dem Peripheriewinkelsatz folgt, dass  $\angle A_iCB_i = \alpha$ , d.h. die Winkel im Punkt  $C$  dieser Dreiecke sind alle gleich gross. Die (gleichschenkligen) Dreiecke  $A_1B_1C$  und  $P_5P_6C$  sind kongruent, denn sie haben in  $C$  den gleichen Innenwinkel und die Seiten  $B_1C$  und  $P_6C$  bzw.  $A_1B_1$  und  $P_5P_6$  sind jeweils gleich lang. Folglich sind die beiden Seiten  $CA_1$  und  $CP_5$  gleich lang. Die Strecke  $CP_5$  ist also gleich lang wie die kürzeste Diagonale im regulären Polygon. Mit einem Induktionsschritt geht es nun weiter. Man zeigt, dass die Dreiecke  $A_2B_2C$  und  $P_5P_4C$  kongruent sind und folglich die Strecke  $CP_4$  gleich lang wie die zweitlängste Diagonale im Polygon ist.

Die Argumentation gilt nicht nur für das reguläre 11-Eck wie in Abbildung 4, sondern für beliebige reguläre Polygone mit ungerader Anzahl Ecken.

## Literatur

- [1] B. Jaggi: *Gerade oder ungerade – das ist hier die Frage!*, Bulletin 138, 2018, pp. 30–45

## Der Satz von Eddy

Hans Walser, hwalser@bluewin.ch, www.walser-h-m.ch/hans

### Worum geht es?

In seiner Buchbesprechung erwähnt Hansjürg Stocker (2019) den elementargeometrischen Satz von Eddy, der mir bislang unbekannt war. Der Beweis führt auf eine neue Sicht des Satzes von Pythagoras und eine Invarianz von Flächenquadratsummen.

### Der Satz von Eddy

Die Halbierende des rechten Winkels im rechtwinkligen Dreieck halbiert das Hypotenusenquadrat (Abb. 1a). Die Abbildung 1b zeigt einen eleganten Beweis ohne Worte.

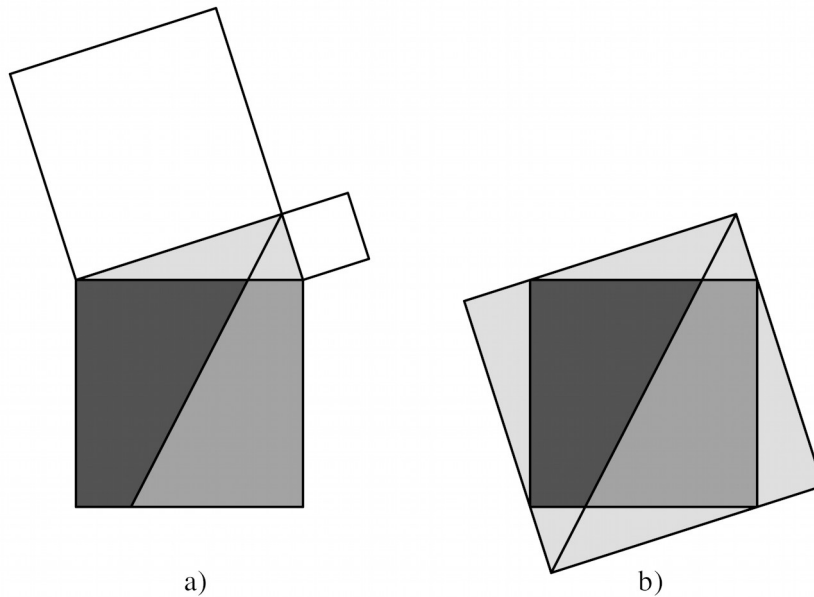


Abb. 1: Der Satz von Eddy. Beweis ohne Worte

### Der weniger elegante Beweis

Zunächst erinnern wir uns an folgenden Sachverhalt. In einem (beliebigen) Dreieck halbieren die Winkelhalbierenden je den Umkreisbogen über der Gegenseite (Abb. 2a). Zu halben Winkel gehören halbe Peripheriebögen.

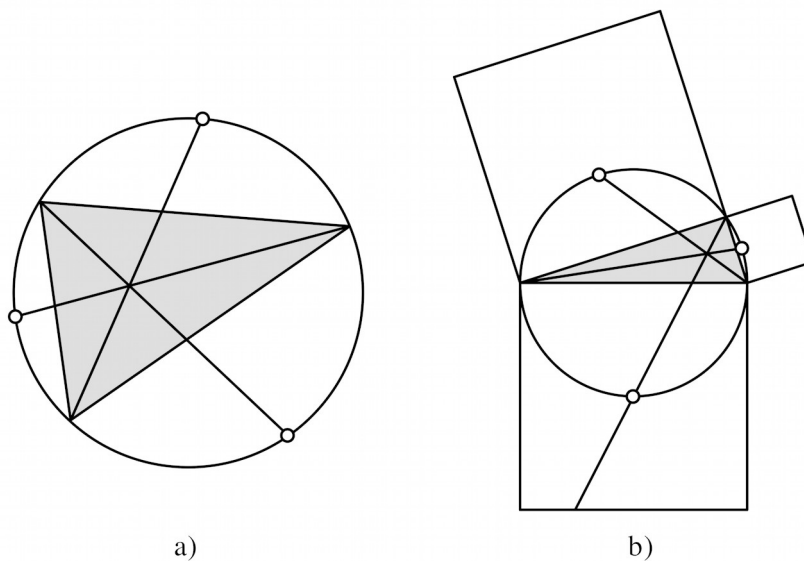


Abb. 2: Winkelhalbierende halbieren die Umkreisbögen

In unserem Sonderfall des rechtwinkligen Dreiecks ist der Umkreis der Thaleskreis. Der Mittelpunkt des Bogens über (anschaulich: „unter“) der Hypotenuse ist auch der Mittelpunkt des Hypotenusenquadrates (Abb. 2b). Eine Gerade durch den Quadratmittelpunkt halbiert das Quadrat. Damit ist der Satz von Eddy bewiesen.

### Die äussere Winkelhalbierende

Die äussere Winkelhalbierende des rechten Winkels halbiert die beiden Kathetenquadrate. Damit ergibt sich eine „halbe“ Version des Satzes von Pythagoras (Abb. 3a).

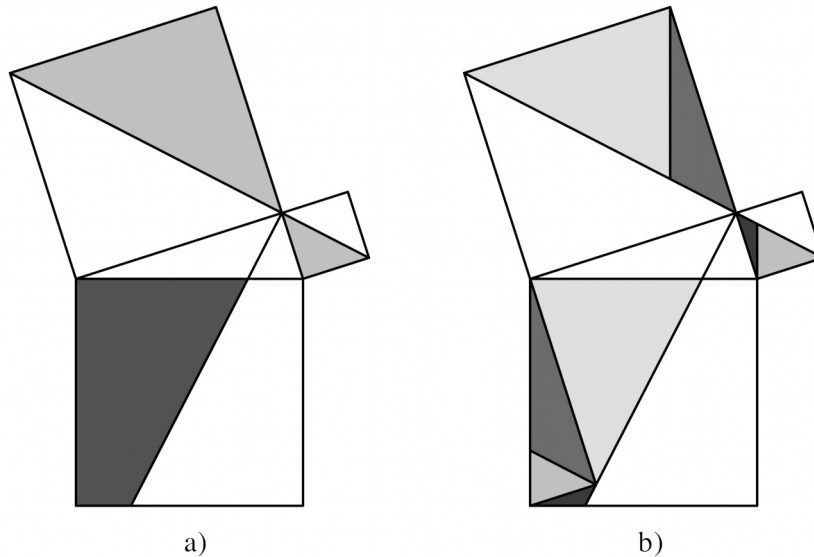


Abb. 3: Dunkelgrau = Hellgrau. Zerlegungsbeweis

Die Abbildung 3b zeigt eine gemeinsame Zerlegung nach Paul Epstein (1871-1939) und Jakob Nielsen (1890-1959). Die Zerlegung kommt mit vier Teilen aus. Die mir bekannten Zerlegungen für den „vollen“ Pythagoras benötigen fünf oder mehr Teile.

### Schnitt mit dem Thaleskreis

Die äussere Winkelhalbierende des rechten Winkels schneidet den Thaleskreis in einem Punkt im Inneren des grösseren Kathetenquadrates (Abb. 4a).

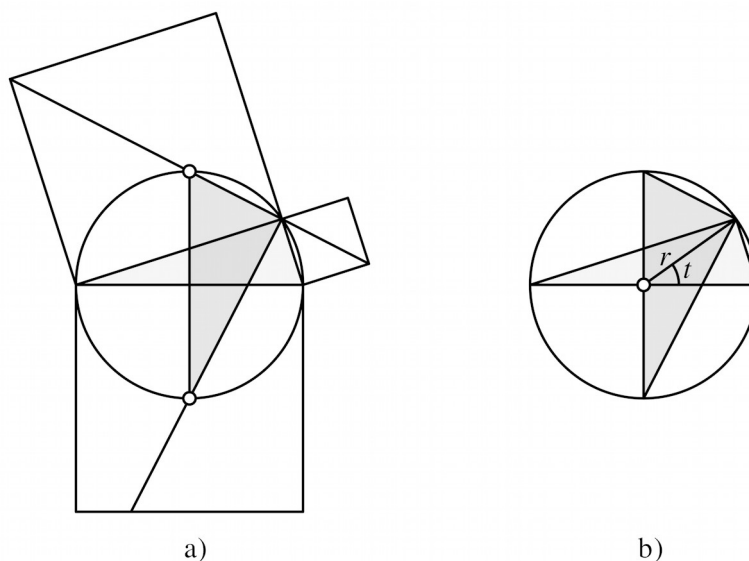


Abb. 4: Schnitt mit Thaleskreis. Zweites rechtwinkliges Dreieck

Dieser Punkt liegt auf der Mittelsenkrechten der Hypotenuse und gibt Anlass zu einem zweiten rechtwinkligen Dreieck.

## Der Flächensatz

Wir bezeichnen mit  $r$  den Radius des Thaleskreises.  $A_1$  und  $A_2$  seien die Flächeninhalte der beiden rechtwinkligen Dreiecke. Es gilt der Flächensatz:

$$A_1^2 + A_2^2 = r^4$$

Diese Formel erinnert an den Satz von Pythagoras, spielt aber in der Dimension vier. Daher kann die Situation nicht zweidimensional illustriert werden. Es gibt keinen Zerlegungsbeweis.

Für den rechnerischen Beweis des Flächensatzes arbeiten wir mit dem in der Abbildung 4b eingezeichneten Winkel  $t$ . Das erste Dreieck hat die Hypotenusenlänge  $2r$  und die dazu senkrechte Höhe  $r \sin(t)$ . Daher ist

$A_1 = r^2 \sin^2(t)$ . Analog finden wir  $A_2 = r^2 \cos^2(t)$ . Durch Quadrieren und Addieren ergibt sich der Flächensatz.

## Literatur

Stocker, Hansjürg (2019): Rezension: Wolfgang Zeuge: Nützliche und schöne Geometrie. VSMP Bulletin. Ausgabe 140, Mai 2019, 40.

Zeuge, Wolfgang (2018): Nützliche und schöne Geometrie. Eine etwas andere Einführung in die Euklidische Geometrie. Springer Spektrum. ISBN 978-3-658-22832-3.

## Links

Hans Walser: Epstein-Nielsen-Zerlegungsbeweis für den Satz des Pythagoras:  
[www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/E/Epstein-Nielsen/Epstein-Nielsen.htm](http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/E/Epstein-Nielsen/Epstein-Nielsen.htm)

## Online-Aufgaben und Tests mit Möbius.

Der Einsatz von Online Tools in der Lehre wird zunehmend wichtiger, da es dem Lernenden die Möglichkeit gibt, Inhalte im eigenen Tempo ortsunabhängig zu erlernen. Möbius ist besonders für die Lehre von MINT Fächern geeignet, da es das Computer-Algebra-System Maple benutzt, um Eingaben von Studierenden automatisiert zu bewerten.

Es bietet einen flexiblen Weg Aufgaben zu erstellen, die individuell bewertet werden und unverzügliches Feedback an die Lernenden zurückgibt. Ebenfalls erlaubt es einen Überblick über den Leistungsstand und das erreichte Verständnis der Klasse und kann somit auch für flipped Classroom Szenarien eingesetzt werden. Einmal erstellte Aufgaben können mit Kolleginnen und Kollegen sehr einfach geteilt, bearbeitet und wiederverwendet werden. Individuell einstellbare Bedingungen ermöglichen es, die Aufgabensammlungen sowohl für Hausübungen als auch für kleinere Tests und Prüfungen einzusetzen. Didaktische Aspekte und Grenzen des Einsatzes derartiger Tools werden beleuchtet und diskutiert.

Der Kurs bietet einen Überblick über die Einsatzmöglichkeiten von Möbius und einer Schritt für Schritt Anleitung wie ein klassischer Kurs in einen online Kurs umgestaltet werden kann. Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer können im Workshop-Teil selbst Übungs- und Prüfungsfragen kreieren, die Bewertungskriterien modifizieren sowie die Erstellung der Auswertung und Rückmeldung an die Schülerinnen und Schüler festlegen.

Referentin:	Stefanie Winkler (Technische Universität Wien)
Zielpublikum:	Lehrkräfte der Sekundarstufe II Mathematik
Organisation:	Prof. Dr. Norbert Hungerbühler (ETH), Aret Kocaman (KS Wattwil) Andrea Peter (DMK)
Datum und Zeit:	Donnerstag, der 23. Januar 2020, 10:00 Uhr – 17:00 Uhr Ab 9:30 Begrüssungskaffee
Kursort:	ETH Zürich, Hauptgebäude Raum HG G 19.1
Kurskosten:	CHF 120 (inkl. Mittagessen und Kaffeepausen) CHF 100 für VSMP-Mitglieder ( <a href="http://www.vsmpp.ch">www.vsmpp.ch</a> )
Anmeldung:	<a href="http://math.ch/DMK2020/">http://math.ch/DMK2020/</a>
Anmeldeschluss:	13. Januar 2020



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich  
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

## Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht Programm Herbstsemester 2019

Die Vorträge finden jeweils am Donnerstag um 17.15 Uhr im Hörsaal HG G 3 des Hauptgebäudes der ETH Zürich statt. Abgeschlossen werden die Veranstaltungen mit einem Apéro im HG G 69 (D-MATH Common Room).

### Donnerstag, 24. Oktober 2019:

#### How Round is Your Circle?

Christopher Sangwin, The University of Edinburgh

**Abstract:** Mechanisms are all around us. We often take them for granted, or don't even notice they exist. Most have a long and interesting history and many rely on rotating parts. That is, one circular part which fits inside another. These need to be made very accurately to work safely, smoothly and without wearing out. This raises a basic problem which links engineering to mathematics. How do you test if something is round? I.e., how round is your "circle"? Sounds simple? The answer to this question involves the shape of the 50p coin, the NASA Space Shuttle Challenger explosion in 1986 and how to drill a square hole....

### Donnerstag, 7. November 2019:

#### Bondifaktoren - ein elementarer Zugang zur speziellen Relativitätstheorie

Herbert Hunziker, Alte Kantonsschule Aarau

**Abstract:** Die Frage, wie die spezielle Relativitätstheorie zu vermitteln ist, wenn sich nicht Verwirrung, sondern Einsicht und Verständnis einstellen soll, beschäftigt mich schon lange. Mit der Schrift *Relativity and Common Sense - A New Approach to Einstein* eröffnete Hermann Bondi in den sechziger Jahren des letzten Jahrhunderts einen neuen, intuitiven Weg. Ein Weg, zwar auch nicht ohne Anstrengung, ein Weg aber, der zu tiefem Verständnis der Grundideen von Einsteins Relativitätstheorie führt. Im Zentrum von Bondis Zugang stehen nicht die Lorentztransformationen, sondern die Bondifaktoren, die nichts anderes als Dopplereffekte sind. Im Vortrag wird gezeigt, wie die elementaren Phänomene der relativistischen Kinematik auf direktem Weg aus dem Bondi-Kalkül folgen und wie sich wichtige Beziehungen auf einsichtige Weise herleiten lassen. Während Bondis Zugang zur SRT im angelsächsischen Raum weite Verbreitung gefunden hat, ist dieser im deutschsprachigen Raum noch immer wenig bekannt. Ziel des Vortrages ist es, die Schönheit von Bondis Ideen aufzuzeigen und zu ermuntern, sich auf den Weg zu einem faszinierenden und geheimnisvollen Gedankengebäude Einsteins zu machen.

**Donnerstag, 21. November 2019:**

### **Mathematik in der Biologie?!**

Laura Keller, ETH Zürich

**Abstract:** Die enge Verknüpfung von Mathematik und Physik ist nicht nur historisch gewachsen, sondern für die meisten Mathematiker eine selbstverständliche und alltägliche Realität. Aber Mathematik und Biologie? Das sieht - mindestens auf den ersten Blick - nach einer ungewöhnlichen Verbindung aus, sind doch die beiden Disziplinen von sehr unterschiedlichem Charakter. In meinem Vortrag möchte ich einen Einblick geben ins vielleicht weniger naheliegende aber nicht minder spannende Zusammenspiel zwischen Mathematik und etwas allgemeiner den Lebenswissenschaften. Ich werde dabei in einem kurzen „Tour d'horizon“ den Bogen schlagen zwischen einfachen Beispielen, die bereits mit Hilfsmitteln aus der gymnasialen Mathematik zu verstehen sind, und aktuellsten Forschungsarbeiten.

**Donnerstag, 5. Dezember 2019:**

### **Raumvorstellungsvermögen im mathematisch-physikalischen Kontext**

Marion Zöggeler, Universität Salzburg

**Abstract:** Das Raumvorstellungsvermögen ist in den letzten Jahrzehnten als eine der grundlegenden Facetten menschlicher Intelligenz und als fundamentale Schlüsselkompetenz für das logisch-technisch-mathematisch-physikalische Denken (STEM/STEAM) in den Mittelpunkt der internationalen Forschung gerückt. Es ist die Fähigkeit, in der Vorstellung Objekte im Raum zu erdenken und zu verändern, d. h. sich gedanklich eine Schiebung, Spiegelung, Drehung und Skalierung vorzustellen und damit zu operieren. Weitere wesentliche Komponenten sind, Relationen zwischen Objekten zu erkennen und herzustellen, wie z. B. bei Booleschen Operationen und Schnitten, sowie sich mental im Raum zu bewegen und dabei verschiedene Sichtweisen einzunehmen. Damit ist eine Verbindung zu geometrischen Aspekten gegeben, die in naturwissenschaftlich-technischen Bereichen von Bedeutung sind. Als Vorstufe und notwendige Voraussetzung zur Raumvorstellung wird in der neueren Forschung die visuelle Wahrnehmung gesehen. Sie betrifft den anatomischen und neurologischen Ablauf des Sehens bis hin zum Erkennen von räumlichen Objekten.

Nach der Erforschung der Raumvorstellungsfaktoren und der Aufstellung von Strategienpaaren werden aktuell weitere relevante Aspekte hervorgehoben, wie die Dynamik und die Vorstellung von Größenordnungen, die sich u. a. auf physikalische und mathematische Sachverhalte beziehen.

Raumvorstellungsvermögen ist eine wesentliche Kompetenz für das Verständnis klassischer physikalischer Konzepte, wie von Bewegungsgleichungen in der Mechanik, von elektromagnetischen Wellen, bei der Vorstellung des Atomaufbaus und der Gitterstruktur in der Festkörperphysik, sowie in Einsteins Relativitätstheorie und bei quantenmechanischen und astronomischen Phänomenen. In der Mathematik fließen z. B. beim Verstehen des Stellenwertes in der Dezimaldarstellung und beim Ordnen von ganzen und rationalen Zahlen auf dem Zahlenstrahl sowie beim gedanklichen Umstellen einer Gleichung Aspekte der Raumvorstellung ein. Auch die Darstellung von Prozessen und veränderlichen Systemen durch Graphen, Diagramme und Modelle erfordert räumliches Denken.

Eine beispielhafte Analyse ausgewählter Inhalte soll deren Verbindung zu Komponenten und Strategien der Raumvorstellung und deren Beitrag zur Förderung des Raumvorstellungsvermögens aufzeigen.

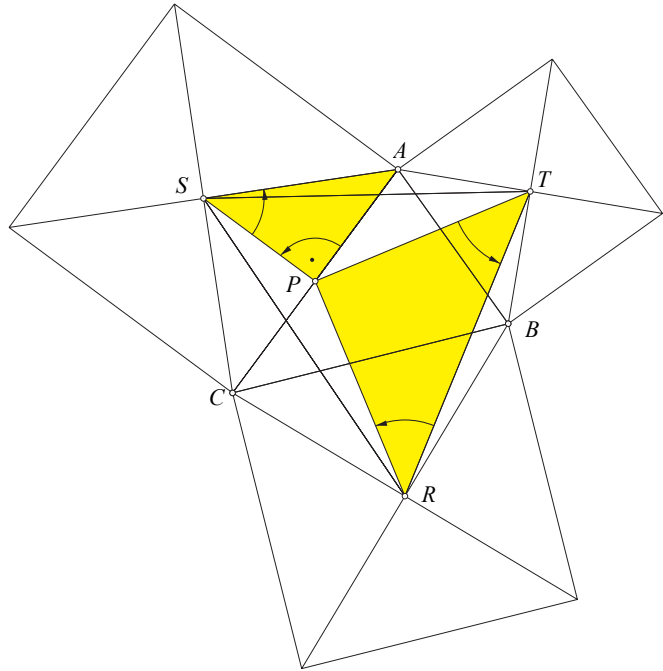
Herzlich laden ein: M. Akveld, D. Grawehr, J. Hromkovič, N. Hungerbühler, H. Klemenz

## Aufgabe von Elia von Salis, Bulletin Nr. 140, Seite 36

Peter Gallin, peter@gallin.ch

Die Aufgabe lautet: Gegeben sind die Mittelpunkte  $R$ ,  $S$  und  $T$  der Quadrate über den Seiten eines beliebigen Dreiecks  $ABC$ . Konstruiere daraus das Dreieck  $ABC$ !

Die Aufgabe bietet sich dafür an, mit der Abbildungsgeometrie behandelt zu werden, und zwar speziell mit der Tatsache, dass jede Drehung in der Ebene als Verkettung von zwei Geradenspiegelungen erzeugt werden kann. Dabei schneiden sich die beiden Geraden im Fixpunkt der Drehung und schliessen einen orientierten Schnittwinkel ein, der halb so gross ist wie der Drehwinkel. Entscheidend ist nun, dass die beiden Geraden unter den genannten Bedingungen beliebig gewählt werden dürfen.



In der obigen Figur betrachten wir zuerst die Drehung mit  $+90^\circ$  um  $T$ , verketteten sie mit der Drehung mit ebenfalls  $+90^\circ$  um  $R$  und verketteten dieses Produkt schliesslich mit der Drehung mit  $+90^\circ$  um  $S$ . Bei diesem dreifachen Produkt geht der Punkt  $A$  zuerst in  $B$ , dann in  $C$  und schliesslich zurück in  $A$  über. Das heisst, der Punkt  $A$  ist Fixpunkt dieses Produkts und kann damit aus den drei Punkten  $T$ ,  $R$  und  $S$  bestimmt werden. Die erste Drehung stellen wir durch zwei Geradenspiegelungen dar, von denen die zweite die Gerade  $TR$  sei. Dann findet man die erste Gerade so, dass sie mit der zweiten Geraden einen Winkel von  $+45^\circ$  einschliesst. Die zweite Drehung um  $R$  wird ihrerseits durch eine erste Spiegelung an der Geraden  $RT$  und eine zweite Spiegelung an der Geraden durch  $R$  derart realisiert, dass  $RT$  mit ihr einen  $+45^\circ$  einschliesst. Das bedeutet, dass wir über der Strecke  $TR$  ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck zu errichten haben. So erhalten wir dessen Spitze  $P$ . Die Verkettung der beiden ersten Drehungen ist ein Produkt aus vier Geradenspiegelungen, von denen die beiden mittleren sich aufheben, weil zweimal an der gleichen Geraden gespiegelt wird. Damit ist das Produkt der beiden ersten Drehungen nichts anderes als die Verkettung der beiden Spiegelungen an den Geraden  $PT$  und  $PR$ . Diese stehen senkrecht zueinander und stellen also eine Drehung mit  $180^\circ$  um  $P$  dar. Es handelt sich also um eine Punktspiegelung an  $P$ .

Diese Punktspiegelung muss nun mit der Drehung um  $S$  mit  $+90^\circ$  verkettet werden. Das sind insgesamt wieder vier Geradenspiegelungen, von denen wir als die mittleren Beiden die Spiegelung an der Gerade  $SP$  wählen. Dann ist die erste Spiegelung jene an der Geraden, die senkrecht zu  $SP$  steht und die vierte Spiegelung an der Geraden, die so gelegt werden muss, dass  $SP$  mit ihr einen  $+45^\circ$ -Winkel einschliesst. Die erste und die vierte Gerade schneiden sich im gesuchten Punkt  $A$ . Er ist der Fixpunkt der Verkettung der drei Drehungen. Diese Verkettung ist also eine Drehung um den Punkt  $A$  mit einem Drehwinkel von  $+270^\circ$ .

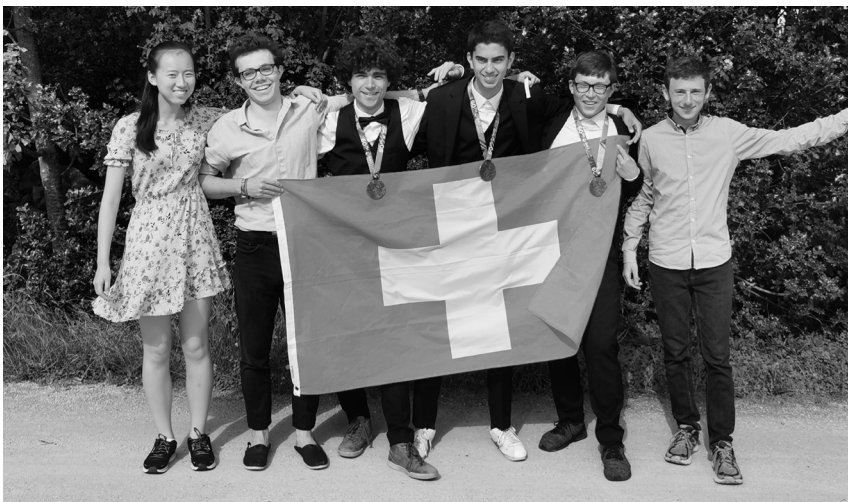
Dreht man nun  $A$  um  $S$  mit  $-90^\circ$ , erhält man  $C$ . Da ja die Verkettung der beiden ersten Drehungen die Punktspiegelung an  $P$  ist, muss  $C$  auch das Bild von  $A$  bei dieser Punktspiegelung sein.  $P$  ist also Mittelpunkt der Strecke  $AC$ . Dreht man  $A$  um  $T$  mit  $+90^\circ$ , erhält man  $B$ . Das Dreieck  $ABC$  ist damit konstruiert und die Aufgabe vollständig gelöst.

# Drei Bronzemedailles für Schweizer Jugendliche an Internationaler Mathematik-Olympiade

Lara Gafner, Wissenschafts-Olympiade, info@olympiad.ch

**Vom 11. bis zum 22. Juli 2019 fand in Bath die Internationale Mathematik-Olympiade statt. Das Schweizer Team erhielt drei Bronzemedailles und eine Ehrenmeldung.**

Anlässlich der sechzigsten IMO reisten mathematikbegeisterte Schülerinnen und Schüler aus 112 Ländern in die englische Stadt Bath. Die Schweiz wurde repräsentiert von Raphael Angst (Kantonsschule im Lee, ZH), Tim Frey (Gymnasium Neufeld, BE), Valentin Imbach (MNG Rämibühl, ZH), Matthew Meyer (Collège Claparède, GE), Tanish Patil (Institut International de Lancy, GE), Yanta Wang (Gymnasium Oberwil, BL).



Die Zürcher Raphael Angst und Valentin Imbach sowie Tanish Patil aus dem Kanton Genf gewannen Bronze. Die Baselbieterin Yanta Wang wurde mit einer Honorable Mention ausgezeichnet.

## Grübeleien und Geistesblitze

Die Mathematiktalente zeigten ihr Können während zwei viereinhalbstündigen Prüfungen mit jeweils drei Aufgaben. Die Herausforderung besteht vor allem darin, die in der Vorbereitung erlernten Techniken kreativ auf neue Probleme anzuwenden, welche oft von aktueller mathematischer Forschung inspiriert sind. "Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer werden hier mit der Art von Fragestellung konfrontiert, welcher sie vielleicht auch während ihrer Karriere begegnen werden", erklärt der Teamleader Louis Hainaut. Valentin Imbach dachte während der zweiten Prüfung lange über eine Kombinatorikaufgabe nach, ohne zu einer eleganten Lösung zu kommen – bis er den entscheidenden Geistesblitz hatte. "Was mich am Lösen von Mathematikaufgaben an der Olympiade am meisten fasziniert, ist der Moment, in welchem alle Puzzleteile zusammenkommen", so Imbach.

## Vom Teilnehmer zum Freiwilligen

Ausserhalb des Prüfungssaals hatten die Jugendlichen die Chance, Stonehenge zu besuchen und einander kennenzulernen. Matthew Meyer erzählt, dass er Freundschaften mit Gleichgesinnten aus aller Welt knüpfte, während er mit ihnen Frisbee spielte oder Pancakes zubereitete. Valentin Imbach stimmt es etwas wehmütig, dass dies sein letztes Jahr als Teilnehmer an der IMO ist, da er das Gymnasium abgeschlossen hat. Doch er verlässt die Welt der Mathematik-Olympiaden nicht ganz: Valentin freut sich schon darauf, in Zukunft als Freiwilliger bei der Organisation der Schweizer Mathematik-Olympiade mitzuhelfen.

Die Mathematik-Olympiade startet in die neue Runde 2019/2020: Alle Informationen zur Anmeldung und zum ersten Test finden Sie ab August 2019 auf der Website [imosuisse.ch](http://imosuisse.ch)

## GeoGebra 1: Grundlagen der Bedienung

GeoGebra ist eine Multirepräsentationssoftware mit dynamischer 2D Geometrie, 3D Geometrie, Funktionenplotter, Computeralgebra und Tabellenkalkulation unter einem Dach, die auf verschiedenen Plattformen läuft. GeoGebra ist damit ein mächtiges digitales Mathematik-Werkzeug, das man bedienen können muss und wofür man auch Mathematikverständnis braucht.

In diesem Workshop liegt der Fokus auf der Bedienung von GeoGebra:

- Grundkonstruktionen der ebenen Geometrie
- Zugmodus, Schieberegler, Spur und Ortslinie
- Kontrollbuttons und Schaltflächen
- Einblick in die 3D Geometrie
- Wertetabellen, Funktionenplotter und Graphenplotter
- Konzept der dynamischen Arbeitsblätter
- Export in Word Arbeitsblätter und ins Web (GeoGebra Tube)
- Einsatz auf Tablets (und Smartphones)

Die GeoGebra-Beispiele werden allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern zur Verfügung gestellt.

Referent:	Hans-Jürgen Elschenbroich (Medienberatung NRW i.R.)
Zielpublikum:	Lehrkräfte der Sekundarstufe I und II Mathematik
Organisation:	Prof. Dr. Norbert Hungerbühler (ETH), Andrea Peter (DMK)
Datum und Zeit:	Dienstag, der 5. November 2019, 10:00 Uhr – 16:30 Uhr Ab 9:30 Begrüssungskaffee
Kursort:	ETH Zürich, Hauptgebäude Raum HG G 19.1
Kurskosten:	CHF 120 (inkl. Mittagessen und Kaffeepausen) CHF 100 für VSMP-Mitglieder ( <a href="http://www.vsmpp.ch">www.vsmpp.ch</a> )
Anmeldung:	<a href="https://math.ch/DMK2019c">https://math.ch/DMK2019c</a>
Anmeldeschluss:	1. November 2019

## GeoGebra 2: Anschauliche Zugänge zur Analysis

Der Analysis-Unterricht ist in der Schule meist sehr kalküllastig. In diesem Kurs liegt der Fokus auf Verständnis. Sie lernen anschauliche und (weitgehend) kalkülfreie Zugänge zu den Grundvorstellungen der Analysis (Steigung und Ableitung, Krümmung, Approximation, Integral, Stammfunktion) kennen. Die Mathematik mit GeoGebra als Werkzeug steht hier im Vordergrund, weniger die Bedienung von GeoGebra.

Es werden klassische, fast vergessene analoge Ansätze (Funktionenmikroskop, Differentiograph, Integrimeter, Integraph) und historische Zugänge (Leibniz Calculus: Differentiale, Indivisible) aufgegriffen und in digitalen Lernumgebungen mit GeoGebra modelliert. Schülerinnen und Schüler können sich damit aktiv einen eigenen anschaulichen Zugang erarbeiten und Sie nehmen hier die Schülersicht ein.

Ein didaktischer Schwerpunkt wird hier der Einsatz im Unterricht ‘fertiger’ Lernumgebungen wie Funktionenlupe und Integrator sein. Aber Sie lernen auch, wie Sie solche Lernumgebungen selber vom leeren Bildschirm aus erstellen können (grundlegende Kenntnisse im Umgang mit GeoGebra sind dabei sinnvoll).

Die GeoGebra-Beispiele werden allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern zur Verfügung gestellt.

Referent: Hans-Jürgen Elschenbroich (Medienberatung NRW i.R.)

Zielpublikum: Lehrkräfte der Sekundarstufe I und II Mathematik

Organisation: Prof. Dr. Norbert Hungerbühler (ETH),  
Andrea Peter (DMK)

Datum und Zeit: Mittwoch, der 6. November 2019, 10:00 Uhr – 16:30 Uhr  
Ab 9:30 Begrüßungskaffee

Kursort: ETH Zürich, Hauptgebäude Raum HG G 19.1

Kurskosten: CHF 120 (inkl. Mittagessen und Kaffeepausen)  
CHF 100 für VSMP-Mitglieder ([www.vsmpp.ch](http://www.vsmpp.ch))

Anmeldung: <https://math.ch/DMK2019d>

Anmeldeschluss: 1. November 2019

# Mathematik für Ausserirdische

## Interview mit Kaloyan Slavov

Monika Krichel, Departement Mathematik, ETH Zürich, communication@math.ethz.ch

Lassen sich mathematische Sachverhalte anders als durch Schrift und Symbole darstellen? Beispielsweise mit einem Objekt im Raum? Diese Aufgabe stellte das Departement Mathematik Schulklassen beim Space-Wettbewerb. Schulen aus der ganzen Schweiz reichten daraufhin insgesamt 49 Beiträge ein. Die 3D-Objekte waren bei der Ausstellung **goMATH – going the MATH way** vom 11. bis 22. März 2019 in der Haupthalle der ETH Zürich zu sehen. Die Fachjury aus fünf Mathematikerinnen und Mathematikern des Departements lobte die kreativen, ausgefeilten mathematischen Botschaften der teilnehmenden Klassen.



Im folgenden Interview erläutert **Dr. Kaloyan Slavov**, Jurymitglied und Ideengeber des Wettbewerbs, wie dieser zustande kam und nach welchen Kriterien die Objekte beurteilt wurden. Eine Beschreibung der Gewinnerbeiträge folgt am Ende des Interviews.

### Wie sind Sie auf die Idee für diesen Wettbewerb gekommen?

Das Projektteam bat mich darum, ein Thema für einen Wettbewerb zu entwickeln, für den die Teilnehmenden ein künstlerisch wertvolles Objekt erschaffen müssen. Er sollte sich an eine breite Schülerschaft richten, und einen mathematischen Hintergrund haben. Als mir zunächst nichts einfiel, war ich mir nicht mehr sicher, ob das überhaupt miteinander vereinbar ist. Schliesslich kam mir dann aber doch ein Geistesblitz, und der Space-Wettbewerb war geboren.

### Warum haben Sie sich für das Thema Weltraum und Ausserirdische entschieden?

Dazu haben mich die goldenen Datenplatten für die Voyager-Raumsonden inspiriert, die man auch als Kunstwerk betrachten kann. Persönlich finde ich, dass Mathematik mehr mit Kunst- und Geisteswissenschaften als mit Wissenschaft und Technik zu tun hat. Die Mathematik beobachtet nicht nur, was ist, sondern schafft auch Neues. Man beginnt mit einem leeren Blatt Papier und schreibt etwas auf, das es bislang noch nicht gab. Mit dieser Ausstellung konnte ich also auch meine allgemeine philosophische Behauptung belegen, dass Mathematik auch immer eine künstlerische Dimension beinhaltet.

### Die teilnehmenden Schulen hatten die Möglichkeit, Studierende und Doktorierende des Departements als Unterrichtsunterstützung zu buchen. Warum wurde diese Unterstützung angeboten?

So konnten wir mit den Schulen in Kontakt treten, die Klassen in das Projekt involvieren und sie zu Ideen inspirieren. Während einer Lektion mit unseren Leuten konnten die Schülerinnen und Schüler (SuS) ihre Pläne vorstellen und Feedback erhalten. Gleichzeitig konnten sie gleich noch etwas mehr Mathematik lernen.

### Als Jurymitglied haben Sie die Wettbewerbskriterien mitgestaltet und die Beiträge daran bewertet. Worauf kam es der Jury am meisten an?

Am wichtigsten war uns eine klare Botschaft. Um mathematische Sachverhalte ohne Wörter oder Formeln zu kommunizieren, muss man sie eindeutig präsentieren. Bevor ich die Aufgabe für den Wettbewerb ersann, waren mir bereits online einige «Beweise ohne Worte» untergekommen. Doch selbst die besten davon konnten nicht mit den Vorschlägen der Klassen mithalten. Alle Gewinnerteams haben wirklich Grossartiges geleistet! Selbst wenn man nicht mit den dargestellten Phänomenen vertraut ist, kann man sie an den Objekten ganz

ohne langes Nachlesen spielerisch entdecken. Das ist wirklich beeindruckend.

Zudem haben wir die Komplexität der Botschaft geprüft: Ist sie zu anspruchsvoll, wird sie möglicherweise nicht verstanden. Es galt also, den perfekten Mittelweg zu finden. Damit haben die SuS bei dem Wettbewerb etwas Wichtiges gelernt.

Ein weiteres Kriterium war die Beweisführung: Ein mathematischer Beweis wird üblicherweise in Worten oder Zahlen verfasst. Hier waren die SuS jedoch dazu gezwungen, ihn bildlich darzustellen. Die Aufgabe war so gestellt, dass Teilnehmer verschiedenster Altersstufen sie lösen können, um Jüngeren und Älteren dieselben Chancen zu geben. Wir haben uns über die rege Beteiligung sehr gefreut.

### Wie beurteilen Sie die Qualität der Beiträge?

Ich war äusserst gespannt und wusste nicht, was mich erwarten würde. Die Ergebnisse liessen mich wirklich staunen!

### Was hat Ihnen an den drei Gewinnerbeiträgen am besten gefallen?

Das erstplatzierte Objekt veranschaulicht den Flächenschwerpunkt mittels geometrischer Figuren, die an Stiften aufgehängt sind. Es zeigt, dass sich am Schwerpunkt alle Schwerlinien treffen. Sowohl die Gestaltung als auch die Ausführung des Exponats zeugen von grossem Einfallsreichtum.

Das zweitplatzierte Objekt besteht aus einem Dreieck, dessen Eckpunkte sich allesamt in einer Halbkugel befinden. Es beweist, dass jeder Punkt auf einer Halbkugel mit zwei sich gegenüberliegenden, auf dem Äquator positionierten Punkten einen rechten Winkel bildet. Hätten die SuS lediglich einen festen Punkt auf der Halbkugel gewählt, sähe man nur ein Dreieck, und die Botschaft wäre nicht prägnant genug. Indem sich der dritte Eckpunkt jedoch auf der Halbkugel verschieben lässt, wird klar, dass der  $90^\circ$ -Winkel immer gleich bleibt. Damit vermittelt es diese Gesetzmässigkeit genial einfach – eindeutiger geht es nicht! Das Objekt verdient einen Platz in einem Museum oder einer Dauerausstellung.

Das drittplatzierte Objekt verbildlicht, dass die Summe aller Innenwinkel in einem Dreieck stets  $180^\circ$  beträgt. Dieser Grundsatz wird hier hervorragend vermittelt und ist obendrein überaus stilvoll ausgestaltet.

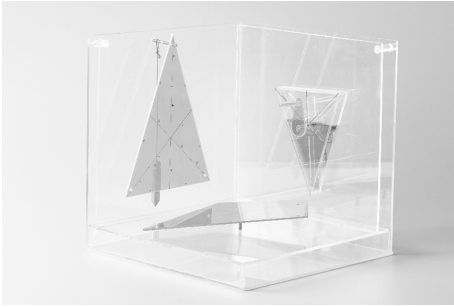
Alle drei Gewinnerbeiträge haben eines gemeinsam: Statt eines einzelnen, statischen Objekts enthalten sie ein dynamisches Element, das viele verschiedene Zustände einnehmen kann. Ausserirdische verstehen die dargestellten Phänomene sicherlich besser anhand unendlich variabler Beispiele mit einer eindeutigen Gemeinsamkeit als durch ein Einzelobjekt, dessen Besonderheit sich nicht erschliesst.

### Wie wichtig sind solche Wettbewerbe für die Nachwuchsförderung?

Eines der Ziele, die wir mit diesem Wettbewerb verfolgen, war unsere eigene «Botschaft ohne Worte» zu übermitteln – nämlich, dass Mathematik auch ausserhalb des Schulunterrichts relevant ist. Als offenes System steckt sie voller Überraschungen und ist gleichermassen anspruchsvoll, interessant und geistig fordernd. Der Wettbewerb hat die SuS dazu angeregt, unkonventionell zu denken. Und genau darum geht es in der Mathematik, nicht um Problemlösung nach Schema F. Sie fördert Kreativität sowie intellektuelle Fähigkeiten und macht einfach Spass!

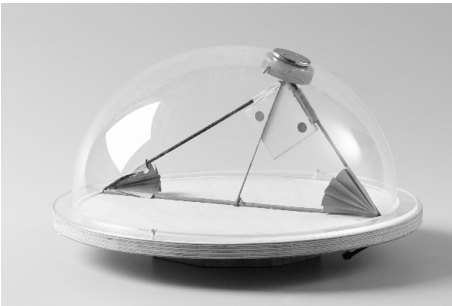
## Gewinnerbeiträge

### 1. Platz



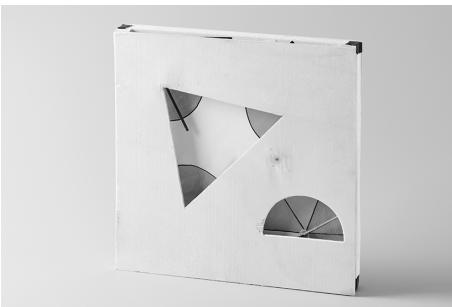
Objekt 49 ist ein ansprechender Werkzeugkasten, mit dem man die Eigenschaften ebener Grundflächen entdecken kann. Er zeigt beispielsweise, dass sich eine Fläche an ihrem Schwerpunkt balancieren lässt und sich dort alle Schwerlinien treffen. Zusätzlich veranschaulicht das kreative Kunstwerk, dass die Seitenhalbierenden des Dreiecks die Fläche in zwei gleich grosse Hälften teilen. Die Jury lobte insbesondere die aussergewöhnliche Vielseitigkeit des Objekts, die eindeutige Aufforderung zum Experimentieren und Erforschen sowie die Klarheit der gezeigten geometrischen Eigenschaften.

### 2. Platz



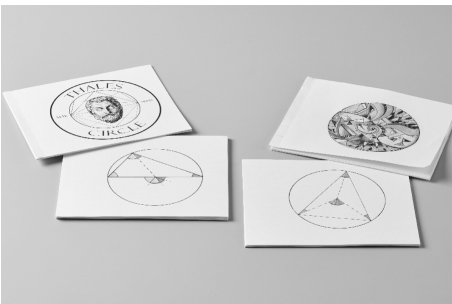
Objekt 43 beweist den Satz des Thales in drei Dimensionen: Jeder Punkt auf einer Kugel bildet mit zwei sich gegenüberliegenden, auf dem Äquator positionierten Punkten einen rechten Winkel. Das Objekt überzeugte die Jury durch die ausgeklügelte Übertragung eines bekannten Satzes der ebenen Geometrie in die räumliche Geometrie, durch die äusserst anschauliche, visuelle Erklärung des Phänomens und durch die einladenden Experimentiermöglichkeiten.

### 3. Platz



Objekt 38 zeigt einen bewegten, visuellen Beweis eines bekannten Satzes der Geometrie: Die drei Winkel eines Dreiecks bilden zusammen einen Halbkreis. Die Jury war neben der Klarheit der mathematischen Aussage davon beeindruckt, wie ausgefeilt das Objekt einen geometrischen Satz mittels Bewegung beweist und wie stilvoll es ausgestaltet ist.

## Publikumspreis



Objekt 46 ist der klare Favorit des Ausstellungspublikums. Es besteht aus zwei Daumenkinos über den Peripheriewinkelsatz und dessen Spezialfall, den Satz des Thales. Blättert man schnell durch die Seiten, sieht man «Filme», welche die Konzepte sehr gut erklären.

# Für Bildung und Kultur!

## Ausstellung Eugen Jost

# 5piel

mit  
**Wörtern und Worten**  
**Zeichen und Zahlen**

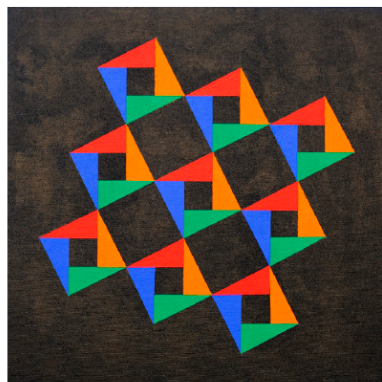
**6. September bis 2. November 2019**

**Vernissage: Freitag, 6. September, 19.30 Uhr**  
**Bibliothek Spiez, Sonnenfelsstrasse 1, 3700 Spiez**

Begrüssung: Prof. Dr. Beat Wälti, PH Bern  
Zauberei: Prof. Dr. Peter Mürner, alias Siderato

Eugen Jost spielt: mit Sprache, mit Mathematik,  
mit dem Pinsel auf der Leinwand und auf der  
Klaviatur seines Computers.

Seine Bilder erzählen Geschichten; die  
Betrachterinnen und Betrachter sind eingeladen,  
deren Inhalt spielerisch zu entschlüsseln.



Führungen auf Anfrage  
Kontakt: [eugenjost@bluewin.ch](mailto:eugenjost@bluewin.ch)

Ausstellung geöffnet während der Öffnungszeiten der Bibliothek  
Spiez

Bibliothek Spiez

# Luftwiderstand der Restatmosphäre auf die ISS

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

## 1 Einleitung

Diesen Artikel möchte ich dem Organisationskomitee – Jürg Barblan, Hanno Gassmann, Hans Kammer, Stefan Walser – von der DPK für den wunderbaren Kurs “Physik in München” widmen, denn er wurde durch einen Besuch im Deutschen Museum angeregt.

Uns wurde auf einer Führung gesagt, dass die internationale Raumstation ISS 455 Tonnen Masse<sup>1</sup> habe, sich mit 7.66 km/s bewege<sup>1</sup>, für einen Umlauf 92.68 min brauche<sup>2</sup> und aufgrund restatmosphärischer Reibung täglich z.B. 66 m zur Erde sinke<sup>1</sup>. Da Münchner Bier anregend wirkt, stellte ich mir sofort die Frage, ob sich daraus nicht die Luftwiderstandskraft berechnen liesse. (Die Zahlen musste ich nachgoogeln, vermutlich eine andere Wirkung des Biers. Die Sinkrate variiert stark, die anderen Werte leicht.)

Zuerst wollen wir die Konsistenz der Werte prüfen: Wir nehmen näherungsweise an, dass sich die ISS auf einer Kreisbahn bewegt. Dann gilt für den Bahnradius

$$r = \frac{vT}{2\pi} = \frac{7.66 \text{ km/s} \cdot 92.68 \cdot 60 \text{ s}}{2\pi} = 6779 \text{ km} = 6371 \text{ km} + 408 \text{ km} = r_E + h \quad (1)$$

Die 408 km Bahnhöhe passen zu den publizierten Werten.

## 2 Energiesatz

Wird die ISS gebremst, so nimmt ihre potentielle Energie ab, aber ihre kinetische Energie zu (Satellitenparadoxon). Potentielle und kinetische Energie sind über den Virialsatz verknüpft:

$$F_{\text{res}} = ma_z \quad (2)$$

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \parallel \cdot \frac{r}{2} \quad (3)$$

$$\frac{GMm}{2r} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2}E_{\text{pot}} = E_{\text{kin}} \quad (5)$$

Die kinetische Energie ist betragsmässig halb so gross wie die potentielle Gravitationsenergie. Für Kreisbahnen gilt das exakt, für andere Bahnen im Mittel.

Die atmosphärische Reibung lässt sich mit dem Energiesatz für offene, d.h. nicht-abgeschlossene Systeme bestimmen:  $\Delta E = W + \dots$ . Die Veränderung der Energie der ISS ist gleich der an der Raumstation verrichteten Arbeit. Andere Energietransfers (+ ..), wie z.B. Wärmezufuhr durch Sonnenlicht, spielen hier untergeordnete

Rollen. Der Luftwiderstand bremst die ISS, sie sinkt ab und gewinnt dabei kinetische Energie.

$$\Delta E = W + .. \quad (6)$$

$$dE_{\text{pot}} + dE_{\text{kin}} = -F_R \cdot ds \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \frac{dE_{\text{pot}}}{dt} = -F_R \cdot \frac{ds}{dt} \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left( -\frac{GMm}{r} \right) \frac{dr}{dt} = -F_R \cdot v \quad (9)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{GMm}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt} = -F_R \cdot v \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{mv^2}{r} \cdot \frac{dr}{dt} = -F_R \cdot v \quad (11)$$

$$F_R = -\frac{1}{2} \frac{mv}{r} \frac{dr}{dt} \quad (12)$$

$$F_R = \frac{\pi m}{T} \cdot \left( -\frac{dr}{dt} \right) = \frac{\pi \cdot 455 \cdot 10^3 \text{ kg}}{92.68 \cdot 60 \text{ s}} \cdot \frac{66 \text{ m}}{86400 \text{ s}} = 0.20 \text{ N} \quad (13)$$

Das tönt jetzt nicht nach sehr viel, aber die Bremsleistung ist immerhin

$$P_R = F_R \cdot v = 0.20 \text{ N} \cdot 7.66 \text{ km/s} = 1.5 \text{ kW} \approx \frac{1}{2} mg \Delta h / \Delta t \quad (14)$$

Die Rechnung lässt sich leicht mit anderen Sinkraten wiederholen.

### 3 Diskussion

Darf man von Bremsen sprechen, wenn der Luftwiderstand die Raumstation effektiv schneller macht? Die Dichte der Luft in 400 km Höhe beträgt<sup>3</sup> etwa  $2.8 \cdot 10^{-12} \text{ kg/m}^3$ . Wie hängt die Sinkrate mit der höhenabhängigen Dichte zusammen? Raketentriebwerke stossen Verbrennungsgase mit 2 bis 3 km/s aus. Mit welcher Rate müssten Gase ausgestossen werden, um die Reibung durch die Restatmosphäre zu kompensieren? Warum macht man das nicht laufend sondern in grösseren Abständen? Was ist der Unterschied der ISS-Abbremsung zum Aerobraking eines Raumfahrzeugs, z.B. des Mars Climate Orbiter in der Marsatmosphäre?

3. April 2019, Lie.

<sup>1</sup> [https://de.wikipedia.org/wiki/Internationale\\_Raumstation](https://de.wikipedia.org/wiki/Internationale_Raumstation) (Abruf am 3. April 2019)

<sup>2</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/International\\_Space\\_Station](https://en.wikipedia.org/wiki/International_Space_Station) (Abruf am 3. April 2019)

<sup>3</sup> CRC Handbook of Chemistry and Physics, 71st Edition, 1990-1991

Den auf den folgenden Seiten abgedruckten Artikel zum Thema SI-Revision durften wir unverändert aus dem METinfo übernehmen.

# Schweizer Schüler gewinnen Bronzemedailien an Internationaler Physik-Olympiade

Lara Gafner, Wissenschafts-Olympiade, info@olympiad.ch

**Fünf Jugendliche aus der Schweiz nahmen an der Internationalen Physik-Olympiade teil, welche vom 7. bis zum 15. Juli in Tel Aviv stattfand. Sie wurden mit zwei Bronzemedailien und einer Ehrenmeldung ausgezeichnet.**

Die Internationale Physik-Olympiade feierte in Israel ihr fünfzigstes Jubiläum. Mit dabei waren fünf Schweizer Gymnasiasten, welche sich zuvor auf nationaler Ebene gegen 800 andere Schweizer Physik-Fans durchgesetzt hatten: Cédric Solenthaler (Kantonsschule am Burggraben, SG), Fabian Graf (Gymnasium St. Antonius, AI), Hiro Farré (Institut Le Rosey in Rolle, VD), Jonas Hofmann (Kantonsschule Uster, ZH), Nicolas Schmid (Lycée cantonal de Porrentruy, JU).



Cédric Solenthaler und Hiro Farré erhielten Bronze, Jonas Hofmann eine Honorable Mention.

## Optimismus trotz besonders schwierigen Prüfungen

Die Prüfungen waren dieses Jahr überraschend schwierig, darüber sind sich die Teilnehmer und ihre Begleitpersonen einig. Dennoch kann Hiro Farré stolz darauf sein, sich selbst übertroffen zu haben. Bei seiner Teilnahme an der letzten IPhO reichte es noch nicht für eine Auszeichnung, nun nimmt er eine Bronzemedaille mit nach Hause. Jonas Hofmann war nach der experimentellen Prüfung zuversichtlich, dass eine Auszeichnung auf ihn warten könnte. Die experimentelle und die theoretische Prüfung machen den Wettbewerb der IPhO aus. Beide dauern fünf Stunden und erfordern ein gründliches Verständnis von physikalischen Konzepten, sowie mathematische Fertigkeiten und Kreativität. Dieses Jahr mussten die Teilnehmenden unter anderem die Wärmeleitfähigkeit verschiedener Metalle und die Funktionsweise einer Mikrowelle untersuchen.

## Abenteuer und Entspannung bei 30 Grad

Abgesehen von den Prüfungen sorgte ein intensives Freizeitprogramm dafür, dass die Teilnehmenden möglichst viel von ihrem Gastland zu sehen bekamen, von Jerusalem bis zum Toten Meer. Nebst der schwerelosen Entspannung im Salzwasser wurde es auch abenteuerlich beim River Rafting auf dem Jordan – laut den Schülern ein Highlight auf ihrer Reise. Trotz frühem Aufstehen und täglichem Sonnenbrand hatte Fabian Graf grossen Spass. Sich mit anderen physikbegeisterten Jugendlichen aus über 80 Ländern zu messen, sei eine tolle Erfahrung gewesen.

Die Physik-Olympiade startet in die neue Runde 2019/2020: Alle Informationen zur Anmeldung und zum ersten Test finden Sie ab August 2019 auf der Website [physics.olympiad.ch](http://physics.olympiad.ch)



## 20. Schweizerischer Tag für Physik und Unterricht

Donnerstag, 14. November 2019, 13:00 - 17:30 Uhr an der ETH Zürich im  
Zentrum (NO Gebäude, Sonneggstrasse 5, 8092 Zürich)

### ***Themen: Geothermie und das Innere der Erde, sowie Flipped Classroom in Physik***

12:30 - 13:00 **Begrüßungskaffee** (NO Gebäude ETH Zentrum, Ausstellung *focusTerra*)

13:00 - 13:05 **Begrüßung und Einführung** (NO D45)

13:05 - 13:35 **Flipped vs unflipped physics classroom at ETH** (NO D45)  
*Dr. Guillaume Schiltz, Physik*

13:35 – 14:25 **Die Physik in der Geothermie** (NO D45)  
*Prof. Martin Saar, Erdwissenschaften*

14:25 – 14:55 **Kaffeepause** (Kaffeetheke Ausstellung *focusTerra*)

14:55 - 15:30 **Lerneinheit des MINT Zentrums zur Geothermie** (NO D45)  
*Dr. Brigitte Hänger-Surer und Dr. Ralph Schumacher, MINT Lernzentrum*

15:30 – 16:20 **Aufbau und Entwicklung der Erde: moderne Konzepte und Numerische  
Modelle** (NO D45)  
*Prof. Taras Gerya, Erdwissenschaften*

16:20 - 17:35 **Besuch *focusTerra* mit Erdbebensimulator** (NO Gebäude, Ausstellung  
*focusTerra*)  
*Team von *focusTerra*, ETH Zürich*

17:35 **Apéro**

#### **Treffpunkt**

Ort: NO Gebäude ETH Zentrum, Ausstellung *focusTerra*

**Mailen oder schicken Sie die Anmeldung bitte spätestens bis zum 5. November 2019 an:**

Andreas Vaterlaus, ETH Höggerberg HPF G4.1 , 8093 Zürich.

Email: [vaterlaus@phys.ethz.ch](mailto:vaterlaus@phys.ethz.ch)

Für eine frühzeitige Anmeldung sind wir Ihnen sehr dankbar!



## Impressum

### Herausgeber — *Éditeur*

VSMP – SSPMP – SSIMF

### Korrespondenz — *Correspondance*

Franz Meier                      franz.e.meier@bluewin.ch  
Werner-Kälin-Strasse 1      Tel. 041 210 25 58  
8840 Einsiedeln

### Layout — *Mise en page*

Samuel Byland                      samuel.byland@vsmp.ch  
Weinbergstrasse 48b      Tel. 079 728 63 97  
5000 Aarau

### Inserateverwaltung — *Publicité*

Stefan Walser                      stefan.walser@alumni.ethz.ch  
Weinbergstrasse 3              Tel. 032 512 01 28  
8807 Freienbach

### Bestimmungen für Inserate und Beilagen

— *Tarifs pour les annonces et les annexes*

#### Inserate:

ganzseitig                      Fr. 500.–  
halbseitig                      Fr. 300.–

#### Beilagen:

bis 20 g                      Fr. 500.–  
über 20 g                      nach Vereinbarung

### Adressänderungen — *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder — Membres de la SSPMP:  
VSG – SSPES – SSISS  
Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)  
Monbijoustrasse 36  
3011 Bern  
Tel. 031 382 52 33  
information@vsg-sspes.ch

### übrige Abonnenten — autres abonnés:

Franz Meier                      franz.e.meier@bluewin.ch  
Werner-Kälinstrasse 1      Tel. 041 210 25 58  
8840 Einsiedeln

### Auflage — *Tirage*

800 Exemplare  
erscheint dreimal jährlich

### Präsident VSMP — SSPMP — SSIMF

Arno Gropengiesser      groppi@bluewin.ch  
Via Domenico Galli 44  
6600 Locarno-Solduno Tel. 091 751 14 47

### Deutschscheizerische Mathematikkommission

Josef Züger                      j.zueger@sunrise.ch  
Via Salens                      Tel. 081 641 10 94  
7402 Bonaduz

### Deutschscheizerische Physikkommission

Christian Stulz                      christian.stulz@gymburgdorf.ch  
Gymnasium Burgdorf      Tel. 031 638 03 03  
Pestalozzistrasse 17  
3400 Burgdorf

### Commission Romande de Mathématique

Tatiana Mantuano              tatiana.mantuano@gfbienne.ch  
Grand'Rue 16                      Tél. 032 544 47 53  
2075 Wavre

### Commission Romande de Physique

Stéphane Davet                      davet.stephane@lyca.eduvs.ch  
Av. Plantaud 28B                      Tél. 024 471 21 83  
1870 Monthey

### Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Luca Rovelli                      lucarovelli@ticino.com  
Via Pedmunt 10                      Tel. 091 825 76 69  
6513 Monte Carasso

### Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

— *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 142                      30.11.2019 (Ende Januar)  
Nr. 143                      31.03.2020 (Ende Mai)  
Nr. 144                      31.07.2020 (Ende September)

### Druck und Versand — *Imprimerie*

Niedermann Druck AG  
Letzistrasse 37  
9015 St. Gallen  
www.niedermanndruck.ch

### Internet-Adressen — *Adresses Internet*

www.vsmf.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch