

Internet-Adressen — *Adresses Internet*
www.vsmf.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch

Titelseite — *Page de Titre*
Papierstreifenkonstruktion der Ellipse (Artikel ab S. 52 in dieser Ausgabe)

In dieser Ausgabe — *Dans ce numéro*

VSMP – SSPMP – SSIMF	2
Einladung zur Generalversammlung – Invitation à l’assemblée générale – Invito all’assemblea generale	2
Deutschweizerische Physikkommission	3
H.U. Keller Sinusoidale Bewässerungen	3
Martin Lieberherr Nicht-Keplersche Ellipsenbahn	6
Mirjam Sager Schweizer Jugendliche zeigen ihr Können an internationalen Physik- und Mathematik-Olympiaden	8
<i>Kurs: Physik in München</i>	12
Commission Romande de Mathématique	14
Alexandre Junod Initiation aux équations de Pell-Fermat	14
Arnaud Maret Les Olympiades suisses de mathématiques	18
Deutschschweizerische Mathematikkommission	22
Georg Keller Fixpunktfreie Permutationen	22
Meike Akveld, Lena Wiegmann Kangaroo goes Science	25
Arnaud Maret Die Schweizer Mathematik-Olympiade	26
Beat Jaggi Gerade oder ungerade – das ist hier die Frage!	30
Eric Wermelinger Mathe-Camp DATCH 2018 in Quinten	46
<i>Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht</i>	48
Daniela Grawehr <i>Buchrezension: Schnelleinstieg Differentialgleichungen</i>	50
Christian Blatter Eine Maximumaufgabe	52



V S M P
S S P M P
S S I M F

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica

Einladung zur Generalversammlung des VSMP

Invitation à l'assemblée générale de la SSPMP

Invito all'assemblea generale della SSIMF

Freitag, 30. November 2018 – *vendredi 30 novembre 2018* – venerdì 30 novembre 2018
Neuchâtel

A. Rahmenprogramm

15:30 Uhr, visite guidée du *Centre Dürrenmatt*. Genauere Angaben auf der Website www.vsmf.ch (ab Ende Oktober)

B. Generalversammlung 2018 – Assemblée générale 2018 – Assemblea generale 2018

Beginn: 17:30 Uhr, Ort/lieu/luogo: siehe/voir/vedere Website www.vsmf.ch (ab Ende Oktober)

Traktandenliste – Ordre du jour – Ordine del giorno:

0. Begrüssung – *Salutations* – Saluto
1. Traktandenliste 2018, Protokoll 2017 – *Ordre du jour 2018, procès-verbal 2017* – Ordine del giorno 2018, verbale 2017
2. Jahresberichte des Vereins und der Kommissionen – *Rapports annuels de la société et des commissions* – Rapporti annuali della società e delle commissioni
3. Jahresrechnungen des Vereins und der Kommissionen 2017/18 – *Comptes annuels de la société et des commissions 2017/18* – Conti annuali della società e delle commissioni 2017/18
4. Budget 2018/19 und Mitgliederbeitrag – *Budget 2018/19 et cotisations* – Preventivo 2018/19 e quota sociale
5. Mutationen – *Mutations* – Mutazioni
6. Anträge von Mitgliedern – *Propositions des membres* – Mozioni di membri
7. Varia – *Divers* – Eventuali

Bemerkungen – Remarques – Commenti:

- Das Protokoll der letzten GV und die Einladung zur diesjährigen GV (inklusive Traktandenliste) sind ab Ende Oktober 2018 auf unserer Website www.vsmf.ch zu finden.
- *Le procès-verbal de la dernière AG et l'invitation de cette année (ordre du jour inclus) se trouveront sur notre site internet www.sspmp.ch à partir de fin d'octobre 2018.*
- A partire dalla fine di ottobre 2018 saranno disponibili sul sito www.ssimf.ch il verbale dell'ultima AG e l'invito all'AG di quest'anno (inclusivo dell'ordine del giorno).

C. Gemeinsames Abendessen – Repas du soir en commun - Cena comune

- Im Anschluss an die GV werden wir in einem Restaurant ein gemeinsames Nachtessen einnehmen. Der Ort wird an der GV bekannt gegeben.
- *Après l'assemblée générale on va prendre le diner ensemble. Le restaurant sera communiqué à la fin de l'AG.*
- Al termine è prevista una cena comune; il ristorante sarà comunicato all'AG.

Locarno, settembre 2018, Arno Gropengiesser, Präsident / *Président* / Presidente

Sinusoidale Bewässerungen

H.U. Keller (hukkeller@bluewin.ch), MNG Zürich

Die Temperaturen in diesem Sommer sind hoch, und die Pflanzen dürsten nach Wasser! Da kann mit einer Spritzkanne, einem Schlauch oder mit einer Berieselungsvorrichtung Abhilfe geschaffen werden. Nur: Wie schaffe ich es, dass alle Pflanzen in meinem Beet gerecht gleich viel Wasser erhalten?

Schauen wir uns in vereinfachender Weise ein schmales, rechteckiges und horizontal liegendes Beet der Länge $2a$ und der Breite $b \ll 2a$ an. Weiter soll die Spritzkanne oder der Schlauch konstant die gleiche Wasserleistung $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{m_o}{T}$ erbringen und so geführt werden, dass das Wasser an einer Stelle

$x = x(t)$ entlang der Länge des Beetes senkrecht nach unten aus dem Ausguss ausfliesse und sich sofort uniform über die ganze Breite b verteile. Für die Orts-Zeit-Funktion nehmen wir eine nicht

ganz unplausible Form $x = x(t) = a \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ an, also eine "sinusoidale" Bewässerung! Wie viel

Wasser erhält nun jedes Flächenstück entlang der Länge des Beetes? Dazu lösen wir die Orts-Zeit-

Funktion nach der Zeit t auf und erhalten $t = t(x) = \frac{T}{2\pi} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$, wobei wir natürlich nur gerade

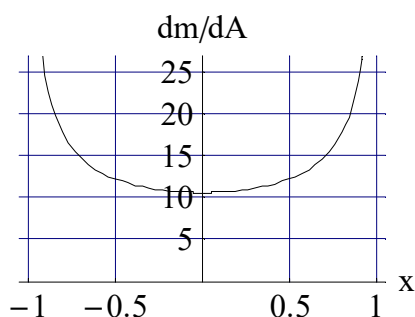
einen einzigen Halb-Zyklus mit $-\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4}$ anschauen.

Der Quotient $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ gibt dabei an, wie lange der Ausguss über dem zugehörigen Längenintervall zu

finden ist, und der Ausdruck $\frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{m_o}{T} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$ gibt an, welche Wassermasse Δm in einem

Zeitintervall $\Delta t \ll T$ auf das Flächenstück $\Delta A = b \cdot \Delta x$ der Breite b an der Stelle x zwischen $x(t)$ und $x(t + \Delta t)$ auftrifft. Das stimmt exakt natürlich nur für den Grenzfall $\Delta t \rightarrow 0$: Mit dem üblichen und meist erfolgreichen Glauben der Physiker, dass die Ableitung eine gute Näherung für einen Differenzenquotienten darstellt, ergibt sich nach der Ableitung von $t(x)$ nach x der Ausdruck

$$\frac{dm}{dA} = \frac{dm}{dA}(x) = 2 \cdot \frac{m_o}{T} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{m_o}{a \cdot b} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2/a^2}}$$



Der Faktor 2 ergibt sich aus der Tatsache, dass wegen

$$-\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4}$$

nur die Hälfte der Periode T abgedeckt

wird. Mit den Annahmen $a = 1$ m, $b = 0.3$ m und $m_o =$

10 kg erhalten wir für $\frac{dm}{dA}$ (in kg/m²) als Funktion von x

(in m) die links wiedergegebene Graphik.

Es kann z. B. leicht gezeigt werden, dass ein äusserster Viertel des Beets doppelt so viel Wasser erhält wie einer der inneren Viertel.

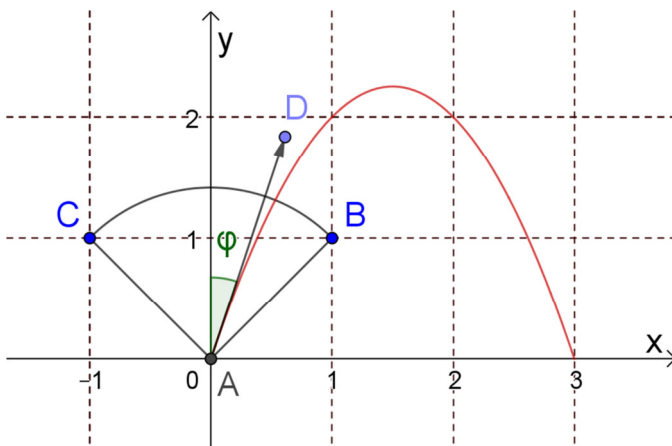
Die Verteilung ist für Pflanzen im Zentrum des Beets also ziemlich ungerecht! Vielleicht wird das besser mit einer automatischen Sprinkleranlage, die wiederum die gleiche konstante Wasserleistung

$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{m_o}{T}$ erbringen soll, wobei das Wasser nun aber in einem Winkel φ zur Vertikalen, im

Wesentlichen nach oben, zwischen einem Winkel $-\varphi_o \leq \varphi \leq \varphi_o$, und mit einer konstanten Schnelligkeit v_o , ausgebracht wird. Für den Winkel φ nehmen wir auch hier wieder eine sinusoidale

Bewegung an: $\varphi = \varphi(t) = \varphi_o \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$; der Wasserstrahl soll dabei wiederum auf eine Breite b

beschränkt sein, die klein ist verglichen mit der maximalen Reichweite des Sprinklers.



Die nebenstehende Graphik zeigt die Verhältnisse. Für φ_o wurde als Beispiel ein Winkel von 45° gewählt. Die Geschwindigkeit des Wasserstrahls wurde hier zu $v_o \approx 7\text{ m/s}$ gewählt. Natürlich wird der Einfachheit halber hier auf die Berücksichtigung des Luftwiderstandes verzichtet.

Wir übernehmen aus dem Physikunterricht die Formel für die Wurfweite $x = \frac{v_o^2}{g} \cdot \sin(2\varphi)$, die

netterweise auch richtig ist, wenn statt des üblichen Elevations-Winkels der in obiger Figur verwendete Winkel zur Vertikalen mit φ bezeichnet wird! Damit wird die Wurfweite

$$x = \frac{v_o^2}{g} \cdot \sin\left(2\varphi_o \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right)$$

Diese Gleichung lässt sich mit der nötigen Vorsicht nach t auflösen:

$$t = \frac{T}{2\pi} \arcsin\left(\arcsin\left(\frac{g \cdot x}{v_o^2}\right) / (2\varphi_o)\right)$$

Auch hier gibt der Ausdruck $\frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{m_o}{T} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$ an, welche Wassermasse Δm in einem

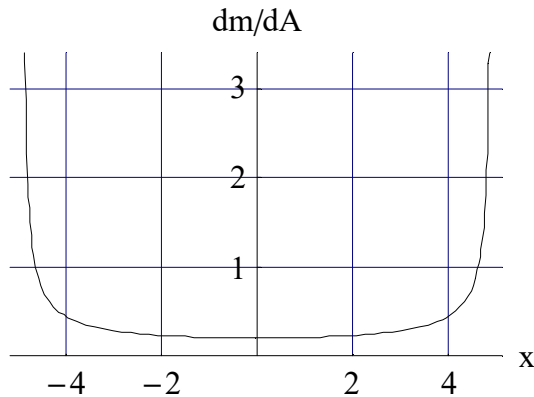
Zeitintervall $\Delta t \ll T$ auf das Flächenstück $\Delta A = b \cdot \Delta x$ der Breite b an der Stelle x zwischen $x(t)$ und $x(t + \Delta t)$ auftrifft. Wir betrachten hier nur eine erste Phase von $0 \leq t \leq T/4$, und kompensieren

dies wegen des Rücklaufs des Berieselungsfans von φ_o zurück zu $\varphi = 0$ mit einem Faktor 2. Die Periodenzeit T kürzt sich natürlich weg, und wir erhalten für die Verteilung des Wassers mit der

Masse m_o über die maximale Wurfweite $x_{\max} = \frac{v_o^2}{g} \cdot \sin(2\varphi_o)$:

$$\frac{dm}{dA} = \frac{dm}{dA}(x) = 2 \cdot \frac{m_o}{T} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{dt}{dx} = 2 \cdot \frac{m_o}{b} \cdot \frac{g}{4\pi \cdot \varphi_o \cdot v_o^2} \cdot \left(1 - \frac{g^2 \cdot x^2}{v_o^4}\right)^{-1/2} \cdot \left(1 - \frac{(\arcsin(g \cdot x / v_o^2))^2}{4\varphi_o^2}\right)^{-1/2}$$

Ist diese Verteilung "gerechter" für alle Pflanzen unter diesem Sprinkler? Als Beispiel wählen wir hier $v_o = 7 \text{ m/s}$, $m_o = 10 \text{ kg}$, $\varphi_o = 45^\circ$, und $g \approx 10 \text{ m/s}^2$, was eine maximale Wurfweite x_{max} von 4.9 m ergibt:



Die nebenstehende Grafik gibt die Wasserverteilung für die oben gewählten Parameter (alle in SI-Einheiten) an.

Die Integration dieser Verteilungsfunktion $\frac{dm}{dA}$ über den Ort x zeigt, dass diese Verteilung noch viel extremer ausfällt als bei der ersten Giessvariante: So bekommt beispielsweise der Bereich $-4.4 \text{ m} \leq x \leq 4.4 \text{ m}$ etwa die Hälfte des Wassers, und je ein Viertel des Wassers ergiesst sich in die äusseren Bereiche $4.4 \text{ m} < x \leq 4.9 \text{ m}$ ($= x_{max}$), resp. $(-x_{max}) = -4.9 \text{ m} \leq x < -4.4 \text{ m}$!

Ich wünsche auf jeden Fall allen Pflanzen – mit oder ohne sinusoidale Bewässerung – ausreichend Wasser, um diese heissen Sommertage erfolgreich zu überleben!

Nicht-Keplersche Ellipsenbahn

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

1 Einleitung

Worauf ich mich in den Ferien immer freue, ist, die Artikel zu lesen, die sich bis dann angesammelt haben. Einige davon verarbeite ich zu Aufgaben oder Unterrichtssequenzen für meine Schülerinnen und Schüler, andere bereiten mir einfach Vergnügen. Ein Beispiel für den zweiten Fall ist ein Artikel von W. D. Pesnell zu Newtons Gedankenexperiment einer Kanone, die auf einem hohen Berg eine Kugel auf eine elliptische Erdumlaufbahn schießt.¹ Der Autor hat sich gefragt, wie die Bahn der Kanonenkugel im Erdinnern weiterlaufen würde, wenn sie zu langsam abgeschossen wird und man ihr im Voraus einen passenden Tunnel durch die Erde gegraben hätte. Der Autor nahm eine homogene Erde an, weil die Aufgabe dann geschlossen lösbar wird: Die Bahnstücke in den Tunnels sind Ellipsen mit Mittelpunkt im Zentrum der Erde. Pesnells akademische Aufgabe ist eine Variation des berühmten “freien Falls durch den Erdmittelpunkt”.

Erfüllen diese “nicht-keplerschen” Ellipsen auch eine Art keplersche Gesetze? Gibt es wie bei den echten Keplerellipsen einen einfachen Ausdruck für die Gesamtenergie?

Das erste keplersche Gesetz ist teilweise erfüllt: Die Geschosbahnen sind Ellipsen, wobei aber die *Ellipsenmittelpunkte* mit dem Erdmittelpunkt übereinstimmen. Die Begründung steckt implizit im restlichen Text.

Das zweite keplersche Gesetz ist natürlich erfüllt, denn es folgt aus dem Drehimpulserhaltungssatz.

Ob es ein Analogon zum dritten Gesetz gibt, werden wir noch sehen.

2 Ellipsenbahn

Eine Ellipse mit grosser Halbachse a und kleiner Halbachse b sowie Mittelpunkt im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems wird durch folgende Relationen beschrieben.²

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \omega t \\ b \sin \omega t \end{pmatrix} \quad \text{oder ...}$$

Wir setzen im Folgenden voraus, dass die ganze Ellipse im Erdinnern liegt, damit wir keine Fallunterscheidungen treffen oder die Bahn stückweise diskutieren müssen.

3 Umlaufzeit

Die Kanonenkugel mit Masse m auf ihrem Flug durch das homogene Erdinnere wird nur vom Anteil der Erdmasse innerhalb des Abstands r angezogen (Newtonsches Schalentheorem). Dann wächst die Gravitationskraft proportional zum Abstand r bis zum Wert $F_G = mg$ an der Erdoberfläche bei $r = r_E$.

$$F_G = k \cdot r \quad \text{mit} \quad k = \frac{mg}{r_E}$$

Die Kraft gleicht formal dem hookeischen Federgesetz. Auf jeder Bahn gilt $\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}_{\text{normal}} + m\vec{a}_{\text{tangential}}$. Im Hauptscheitel ist $a_{\text{tangential}} = 0$ und $a_{\text{normal}} = mv_a^2/\varrho$ mit dem Krümmungsradius $\varrho = b^2/a$.

$$F_{\text{res}} = \frac{mv_a^2}{\varrho} \rightarrow k \cdot a = \frac{mv_a^2 a}{b^2} \Rightarrow k = \frac{mv_a^2}{b^2}$$

Der Drehimpuls ist bei einer Zentralkraft erhalten. Die Kanonenkugel muss also das zweite keplersche Gesetz erfüllen: Die Verbindungslinie Zentrum-Kugel überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2}bv_b$$

Aus den genannten Beziehungen lässt sich die Umlaufzeit T bestimmen.

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{v_a}{b} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{r_E}{g}}$$

Die Umlaufzeit der Kanonenkugel ist unabhängig von der grossen oder kleinen Halbachse. $T = 2\pi \sqrt{m/k}$ ist die Schwingungsdauer eines Federpendels. Wenn wir $k = mg/r_E$ einsetzen, folgt dasselbe Resultat wie beim freien Fall durch den Erdmittelpunkt.

4 Energie und Drehimpuls

Weil die Anziehungskraft auf die im Tunnel fliegende Kanonenkugel proportional zum Abstand vom Erdmittelpunkt zunimmt (Federgesetz), wächst die potentielle Energie quadratisch mit dem Abstand.

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}kr^2$$

Die Gesamtenergie ist konstant.

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kr^2 = \text{const} = \frac{1}{2}mv_a^2 + \frac{1}{2}ka^2$$

Mit $mv_a^2 = F_{\text{res}} \cdot \varrho = ka \cdot b^2/a$ folgt

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}kb^2 + \frac{1}{2}ka^2$$

Die Gesamtenergie sieht aus wie die Summe der Gesamtenergien zweier harmonischer Schwingungen mit Amplituden a und b . Das ist auch zu erwarten, denn wenn das Kraftgesetz $\vec{F}_{\text{res}} = -k \cdot \vec{r}$ linear ist, sind die Bewegungen der Komponenten nicht an einander gekoppelt. Man hätte durchaus mit dieser Überlegung starten können und hätte dieselben Resultate erhalten.

Um den Betrag des Drehimpulses auszurechnen, verwenden wir $\frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}kb^2$

$$\frac{L}{m} = a \cdot v_a = a \cdot b \sqrt{\frac{k}{m}} = ab \sqrt{\frac{g}{r_E}} = \frac{2\pi ab}{T} = \text{const} = |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{2dA}{dt}$$

Dies entspricht natürlich gerade wieder dem zweiten Keplerschen Gesetz.

24. Juli 2018, Lie.

¹ W. D. Pesnell, "The flight of Newton's cannonball", Am. J. Phys. **86** (5), May 2018, 338-343

² <https://de.wikipedia.org/wiki/Ellipse> (Abruf am 24. Juli 2018)

Schweizer Jugendliche zeigen ihr Können an internationalen Physik- und Mathematik-Olympiaden

Mirjam Sager, Wissenschafts-Olympiade, m.sager@olympiad.ch.

Bilder: Viviane Kehl, Barbara Roos, Arnaud Maret und Lionel Philippoz

Sie verfolgten ein Ziel, die Jugendlichen aus der ganzen Welt: eine Medaille, erkämpft mit ihrem Kopf, mit eleganten Lösungen für mathematische und physikalische Probleme. Die Schweizer Teams zeigten eine gute Leistung an den Olympiaden in Italien, Russland, Rumänien und Portugal im Sommer 2018: Sie gewannen drei Bronzemedailles und fünf Ehrenmeldungen. Das Ticket für die internationalen Wettbewerbe holten sich die Mittelschüler bei den nationalen Finals im Frühling 2018. Insgesamt nahmen 660 Jugendliche bei der Physik-Olympiade und 116 bei der Mathematik-Olympiade teil.

Frauenpower: European Girls' Mathematical Olympiad in Italien

52 Teams kämpften in Florenz um Medaillen, 36 davon aus Europa, 16 aus Gastländern. Insgesamt wurden 17 Gold-, 39 Silber- und 52 Bronzemedailles vergeben. Zwei junge Schweizer Frauen gewannen Bronze:

- **Yunshu Ouyang**, Collège André-Chavanne, GE (im Bild rechts)
- **Yanta Wang**, Sekundarschule Allschwil, BL

Zudem holte das Schweizer Team zwei Ehrenmeldungen. Sie gingen an Sarina Franziska Müller (Gymnasium Interlaken, BE) und Anaëlle Pfister (Gymnase d'Yverdon, VD, im Bild links).



Die EGMO leistet einen Beitrag zur Förderung von weiblichen Mathematiktalenten. Sie will die Teilnehmerinnen für einen wissenschaftlichen oder technischen Ausbildungsweg inspirieren – und so das Potenzial weiblicher Nachwuchskräfte besser ausschöpfen. 2017 fand der Wettbewerb in der Schweiz statt, Gastgeberuniversitäten waren die ETH Zürich und die UZH Zürich.

Die Neue: European Physics Olympiad in Russland

Sie ist quasi die kleine Schwester der grossen Internationalen Physik-Olympiade. Bei der 2. Ausgabe der europäischen Olympiade war die Schweiz eines von 28 Teilnehmerländern. Für eine Medaille reichte es den Schweizer Mittelschülern nicht. Jedoch **ergatterte sich Namu Bae** (Gymnase de Renens, VD) **eine Honorable Mention**, eine Art vierte Medaille.



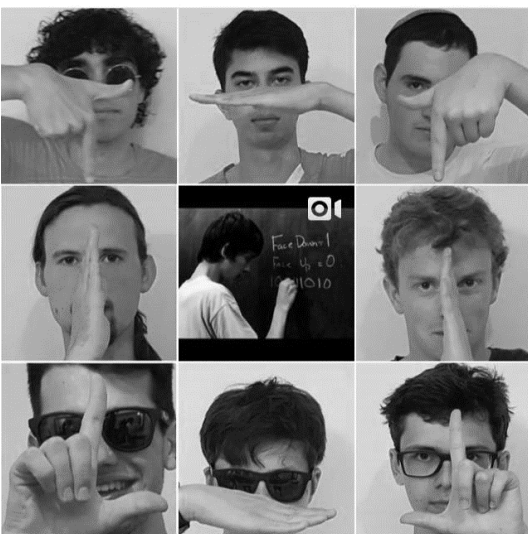
Der Waadtländer freut sich über die Anerkennung: "Es ist schön zu sehen, dass ich in kurzer Zeit so viel dazugelernt habe, dass es jetzt für eine internationale Auszeichnung reicht." Seine Teamkollegen an der EuPhO waren Severin Spörri (Kantonsschule am Burggraben, SG), Marco Rotschi (Kantonsschule Uster, ZH) und Matthias Bürgler (Kantonsschule Schwyz, SZ).

Der Math-Klassiker: International Mathematical Olympiad in Rumänien

Man stelle sich vor: Aus über 100 Ländern reisen schlaue Köpfe an denselben Ort, um Matheprobleme zu lösen. Die Mathematik-Olympiade ist die älteste und grösste der Olympiaden. Die Schweiz war 2018 in Rumänien zum 27. Mal dabei und holte sich zwei Auszeichnung:

- **Bronze: Valentin Imbach**, MNG Rämibühl, ZH
- **Ehrenmeldung: Tanish Patil**, Institut International de Lancy, GE

Ebenfalls ins Schweizer Team geschafft haben es vier Zürcher und Genfer Jugendliche: Jischai Wyler (Literaturgymnasium Rämibühl, ZH), Juraj Rosinsky (Institut International de Lancy, GE), Marco Cavaleri (Collège Rousseau, GE) und Raphael Angst (Kantonsschule Im Lee, ZH).



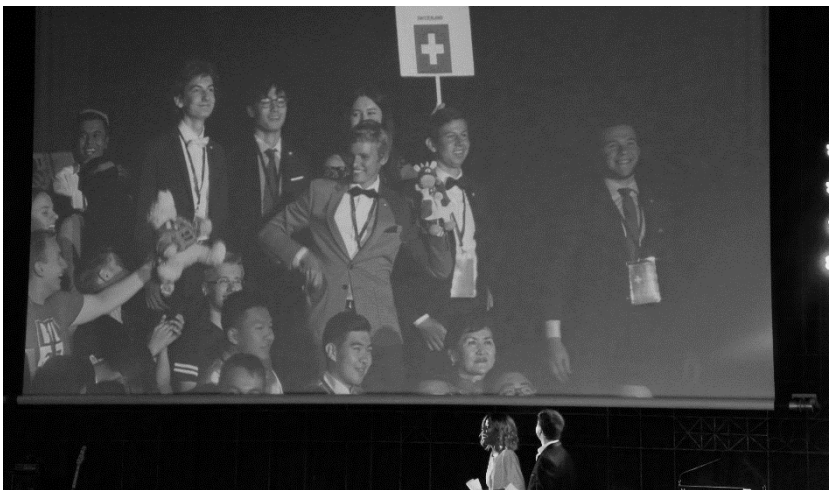
Die Nachwuchstalente waren gefordert: Sie mussten zwei 4.5-stündige Prüfungen lösen mit je drei Aufgaben. Die Fachgebiete hiessen Algebra, Geometrie, Kombinatorik und Zahlentheorie. So suchten die Jugendlichen beispielsweise nach einem Beweis für ein anti-Pascalsches Dreieck.

Der Physik-Klassiker: International Physics Olympiad in Portugal

Zusammen mit 400 Jugendlichen aus 90 Ländern kämpften fünf Jugendliche aus der Schweiz an der Olympiade in Lissabon um Medaillen. Schliesslich reichte es Tobias Hächler (Gymnasium Oberwil, BL) für eine Honorable Mention.

Der Baselbieter freut sich über die Anerkennung: "Die Prüfungen waren spannend, doch die Zeit sehr knapp." Noch wichtiger als das Resultat sei für ihn aber das Erlebnis: "Wir lernten Jugendliche aus der ganzen Welt kennen und entdeckten das Gastland Portugal. Das war toll!"

Ebenfalls für den Wettbewerb qualifiziert hatten sich Arthur Jacques (Liceo cantonale di Lugano 2, TI), Ciril Humbel (Alte Kantonsschule Aarau, AG), Tim Mosimann (Gymnasium Biel-Seeland, BE) und Hiro Josep Farré Kaga (Institut le Rosey, BE/VD).



Die jungen Physikerinnen und Physiker lösten an den beiden Prüfungstagen drei Theorieaufgaben und zwei Experimente. Sie untersuchten beispielsweise die Elastizität eines Polymerfadens, analysierten das Signal einer Gravitationswelle oder modellierten das Wachstum eines Tumors. Lionel Philipoz, Astrophysiker und Begleiter des Schweizer Teams betont: "Die Aufgaben stammen aus der aktuellen Forschung. Die Mittelschüler übten, wie eine Forscherin oder ein Forscher zu denken. Davon werden sie in Zukunft profitieren."

Action fürs Hirn auch im 2018/19?



Die Wissenschafts-Olympiade startet im August 2018 in die neue Runde. Alle Informationen zur Teilnahme an den acht Wettbewerben finden Sie auf der neuen Website science.olympiad.ch.

- Einsendeschluss Physik-Test der ersten Runde: 30. September 2018
- Math-Workshops ab Oktober 2018. Erste Prüfung am 8. Dezember 2018

Physik in München

Weiterbildungsangebot der DPK vom 21. bis 23. März 2019 im Kerschensteiner Kolleg, Deutsches Museum in München

Wir führen eine tolle Tradition weiter und gehen mit Euch ins Deutsche Museum nach München! Dieses gehört zu den weltweit führenden technischen Museen und ist in den letzten zwei Jahren gross renoviert worden – eine Freude für jede technikbegeisterte Person!

Wir logieren im Kerschensteiner Kolleg, das im Museum integriert ist (www.deutsches-museum.de/angebote/fortbildung/kerschensteiner-kolleg).

Neben den Aktivitäten im Museum (Führungen, Workshops) besuchen wir die Flugwerft in Schleißheim und die grosse Produktionsstätte von Texas Instruments in Freising (Führung Produktion und Input «Automotive Systems»).

Zielgruppe: Physiklehrkräfte an Gymnasien der Schweiz (max. 30 Personen)

Organisator: Deutschscheizerische Physikkommission DPK

Kursleitung: Hans Kammer, Stefan Walser, Hanno Gassmann und Jürg Barblan

Kosten: CHF 450.–
inklusive Eintritte, Führungen, Übernachtungen mit Frühstück im Kerschensteiner Kolleg, sowie ein Mittagessen und zwei gemeinsame Nachtessen;
exklusive Reisekosten nach München

Anreise: individuell am 20. März (z.B. SBB-Bus Zürich – München, momentan 19 €)

Programm: provisorisches Programm auf www.dpk.ch/kurse

Teilnehmer: beschränkt auf 30 Teilnehmerinnen und Teilnehmer

Fragen: per E-Mail an juerg.barblan@gymthun.ch oder hanno.gassmann@gymthun.ch

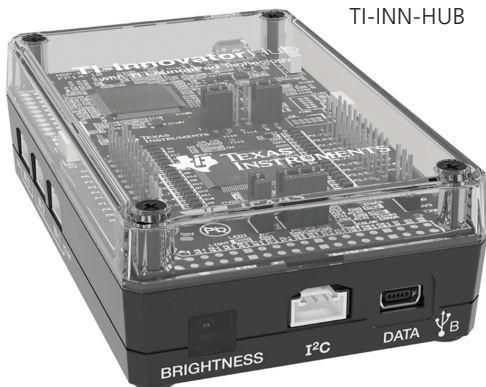
Anmeldung: www.dpk.ch/kurse/muenchen2019

DIE NEUEN TEXAS INSTRUMENTS - PRODUKTE JETZT BEI EDUCATEC BESTELLEN

educatec.ch/texas-instruments/

TI-Innovator™ Hub Kit

Artikel-Nr:
TI-INN-HUB



Programmieren. Konstruieren. Verstehen.

Die praktische Kombination für Ihren MINT-Unterricht. Vermitteln Sie Ihrer Klasse mit dem TI-Innovator™ Hub die Grundlagen der Programmierung und lassen Sie Ihre Schülerinnen und Schüler realitätsnah technische Zusammenhänge entdecken. Einfach den TI-Innovator™ Hub an den TI Graphikrechner oder Computer anschliessen – und los geht's.

Technische Daten:

- » Drei Eingänge
- » Drei Ausgänge
- » Steckplattenanschluss (20 Pins)
- » I²C port
- » Eingebaute Sensoren: Rote LED, RGB LED, Helligkeitssensor, Lautsprecher
- » Kompatible Modelle: TI-84 Plus CE, TI-Nspire™ CX, TI-Nspire™ CX CAS

TI-Innovator™ Rover

Noch mehr Anwendungen lassen sich in Kombination mit dem TI-Innovator™ Rover erschaffen. Der Roboter wird via TI Graphikrechner und TI-Innovator™ Hub gesteuert.

Plug&Play

Der TI-Innovator Rover ist fahrbereit: Stecken Sie den TI-Innovator Hub ein und setzen Sie Ihren TI Graphikrechner oben auf den dafür vorgesehenen Platz ein. Eine wiederaufladbare Batterie speist die beiden Antriebsmotoren.

Neue Dimension des Lernens

Gerade in Gruppenarbeiten fördert der Rover die Kreativität. Neue Ideen werden direkt dem Praxistest unterzogen.

Coding

Rover ist ideal für den Einstieg in die Programmierung. Die Programmiersprache TI Basic ist in den TI Graphikrechnern integriert und auch für Anfänger leicht erlernbar.



Artikel-Nr:
TI-INN-ROVER

Technische Daten:

- » Fahrzeugchassis aus Aluminium
- » Wiederaufladbare Batterie
- » Zwei Räder, jedes mit einem Elektromotor
- » Hochauflösende Motorgeber-Sensoren
- » Stifthalter
- » Front-Abstandssensor
- » Gyroskop
- » Unterboden-Farbsensor
- » Rot-Grün-Blau (RGB) LED

Mathematik in Bewegung

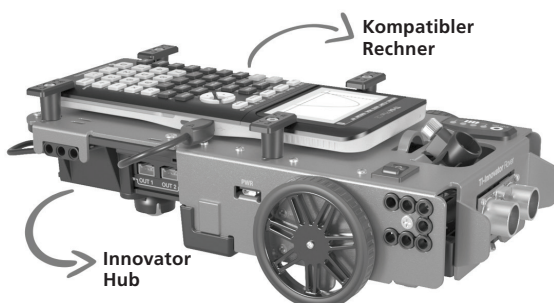
Richtig programmiert, zeichnet der Rover beispielsweise geometrische Formen und Funktionsgraphen.

Flexibel im Unterricht

Der Rover enthält einen Farbsensor, einen Abstandssensor, einen Gyrosensor und einen Stifthalter, um Zeichnungen aufs Papier zu bringen.

Unbegrenzte Möglichkeiten

Über die I/O-Ports des TI-Innovator™ Hubs können zusätzliche Komponenten angeschlossen werden.



Der TI-SensorLink™ Adapter, welcher den Anschluss von vier beliebigen Vernier-Sensoren an den TI-Innovator™ Hub ermöglicht, wird zum Schuljahresbeginn 2018/2019 erhältlich sein.

Weitere Informationen finden Sie in unserem Online Shop unter:
Für weitere Kataloge von uns wenden Sie sich an:

www.educatec.ch
contact@educatec.ch

EducaTec AG

Altes Schulhaus, Kanzleigasse 2
Postfach, 5312 Döttingen

T +41 56 245 81 61, F +41 56 245 81 63
contact@educatec.ch, www.educatec.ch



Initiation aux équations de Pell-Fermat

Alexandre Junod, Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), alexandre.junod@rpn.ch

1. Problématique

Nous voulons déterminer les entiers $n \geq 1$ pour lesquels la somme $1 + 2 + \dots + n$ est un carré parfait, autrement dit nous voulons résoudre l'équation diophantienne $\frac{n(n+1)}{2} = m^2$. En multipliant l'équation par 8 et en développant le membre de gauche, on obtient $4n^2 + 4n = 8m^2$, donc $(2n+1)^2 - 1 = 8m^2$, ou encore $(2n+1)^2 - 8m^2 = 1$. En posant $x = 2n+1$ (entier impair) et $y = m$, on aboutit à une équation de Pell-Fermat $x^2 - 8y^2 = 1$. L'objectif de cet article est d'expliquer le lien entre les solutions $(x; y)$ de cette équation avec la fraction continue de $\sqrt{8}$.

2. Fractions continues

Tout nombre réel positif x_0 s'écrit de manière unique comme la somme d'un nombre naturel $a_0 = [x_0]$ (appelé la *partie entière* de x_0) et d'un nombre compris dans l'intervalle $[0; 1[$. Si ce dernier nombre est non nul, on peut l'exprimer comme l'inverse d'un nombre $x_1 > 1$ et on peut itérer la démarche. On fabrique ainsi petit à petit la fraction continue de x_0 :

$$x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{x_3}}} = \dots$$

Pour gagner de la place, on liste simplement les nombres naturels a_k (non nuls sauf éventuellement pour $k = 0$) : $x_0 = [a_0; x_1] = [a_0; a_1; x_2] = [a_0; a_1; a_2; x_3] = \dots$

Premier exemple : fraction continue de $80/7$

Par l'algorithme de division euclidienne, on a $80 = 11 \cdot 7 + 3$, donc $\frac{80}{7} = 11 + \frac{3}{7} = [11; \frac{7}{3}]$ et on peut poursuivre : $7 = 2 \cdot 3 + 1$, donc $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$ et $\frac{80}{7} = [11; 2; 3]$. On obtient ici une fraction continue finie. Notons que l'on peut également écrire $\frac{80}{7} = [11; 2; 2; 1]$ et on retiendra que pour un nombre rationnel, on peut choisir une fraction continue de longueur paire ou impaire. Nous utiliserons également le fait que deux fractions continues de même longueur qui sont associées au même nombre sont égales coefficients à coefficients : si $[a_0; a_1; \dots; a_n] = [b_0; b_1; \dots; b_n]$, alors $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$.

Deuxième exemple : fraction continue de $\sqrt{8}$

La partie entière de $\sqrt{8}$ est 2 et $\sqrt{8} - 2 = \frac{4}{\sqrt{8}+2}$ est l'inverse de $\frac{\sqrt{8}+2}{4}$ donc $\sqrt{8} = [2; \frac{\sqrt{8}+2}{4}]$. On peut poursuivre la démarche : la partie entière de $\frac{\sqrt{8}+2}{4}$ est 1 et $\frac{\sqrt{8}+2}{4} - 1 = \frac{\sqrt{8}-2}{4} = \frac{1}{\sqrt{8}+2}$ est l'inverse de $\sqrt{8} + 2$, donc $\sqrt{8} = [2; 1; \sqrt{8} + 2]$. On peut alors introduire la fraction continue de $\sqrt{8}$ dans elle-même : $\sqrt{8} = [2; 1; 4; 1; \sqrt{8} + 2] = [2; 1; 4; 1; 4; 1; \sqrt{8} + 2]$, etc... On obtient ici une fraction continue infinie qui présente une répétition : $\sqrt{8} = [2; \overline{1; 4}]$.

De manière générale, nous pouvons énoncer les propriétés suivantes :

- Un nombre admet une fraction continue finie si et seulement s'il est rationnel.
- Un nombre admet une fraction continue présentant une période si et seulement s'il est irrationnel et annule un polynôme quadratique à coefficients entiers.
- Pour un nombre naturel n non carré, on a $\sqrt{n} = [a_0; \underbrace{a_1; a_2; \dots; a_2; a_1}_{\text{palindrome}}; 2a_0]$.

3. Approche matricielle

Pour un nombre x et une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on définit le nombre $M * x = \frac{ax + b}{cx + d}$ et on vérifie sans peine que $M_1 * (M_2 * x) = (M_1 M_2) * x$. Par exemple, avec la matrice $\mathcal{M}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient $M(\alpha) * x = \alpha + \frac{1}{x}$ et plus généralement $\mathcal{M}(a_0)\mathcal{M}(a_1)\cdots\mathcal{M}(a_n) * x = [a_0; a_1; \dots; a_n; x]$.

Dans le deuxième exemple, nous avons trouvé $\sqrt{8} = \mathcal{M}(2)\mathcal{M}(1) * (\sqrt{8} + 2)$. En considérant la matrice $\mathcal{M}(2)\mathcal{M}(1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, cette relation devient $\sqrt{8} = \frac{a\sqrt{8} + 2a + b}{c\sqrt{8} + 2c + d}$. En multipliant cette égalité par le dénominateur du membre de droite, on obtient $8c + (2c + d)\sqrt{8} = a\sqrt{8} + 2a + b$, autrement dit $(-a + 2c + d)\sqrt{8} = 2a + b - 8c$. Comme $\sqrt{8}$ n'est pas rationnel, on en déduit que $2c + d = a$ et $2a + b = 8c$. Multiplions la première relation par a , la seconde par c et soustrayons les résultats :

$$a^2 - 8c^2 = (2ca + da) - (2ac + bc) = ad - bc = \det(\mathcal{M}(2)\mathcal{M}(1)) = 1,$$

la dernière égalité provenant du fait que le déterminant d'une matrice $\mathcal{M}(\alpha)$ vaut -1 . Par le théorème de Bézout, a et c sont relativement premiers et en remarquant encore que

$$\frac{a}{c} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \infty = \mathcal{M}(2)\mathcal{M}(1) * \infty = [2; 1] = 2 + \frac{1}{1} = \frac{3}{1},$$

on trouve $a = 3$ et $c = 1$. Ainsi le couple $(3; 1)$ vérifie l'équation $x^2 - 8y^2 = 1$. On peut refaire tout le raisonnement avec la relation $\sqrt{8} = \mathcal{M}(2)\mathcal{M}(1)\mathcal{M}(4)\mathcal{M}(1) * (\sqrt{8} + 2)$ et $[2; 1; 4; 1] = \frac{17}{6}$ fournit la solution $(17; 6)$. De même, $[2; 1; 4; 1; 4; 1] = \frac{99}{35}$ fournit la solution $(99; 35)$ et $[2; 1; 4; 1; 4; 1; 4; 1] = \frac{577}{204}$ fournit la solution $(577; 204)$, etc...

4. Raccourci

La matrice $M = \mathcal{M}(2)\mathcal{M}(1)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ permet, par multiplication à gauche, de passer de $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{M}(2)\mathcal{M}(1)$, puis à $\mathcal{M}(2)\mathcal{M}(1)\mathcal{M}(4)\mathcal{M}(1)$, puis à $\mathcal{M}(2)\mathcal{M}(1)\mathcal{M}(4)\mathcal{M}(1)\mathcal{M}(4)\mathcal{M}(1)$, etc... On en déduit que la k -ième solution $(a; c)$ fournie par notre méthode est donnée par la première colonne de la matrice $M^k\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui correspond à celle de la matrice M^k . On peut remarquer que la matrice M est associée à la multiplication par $3 + \sqrt{8}$ dans $\mathbb{Z}[\sqrt{8}]$ par rapport à la base $\mathcal{B}(1; \sqrt{8})$: une matrice est construite avec les images des vecteurs de base et les images de 1 et $\sqrt{8}$ (associés à des vecteurs de base $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) sont respectivement $3 + \sqrt{8}$ et $8 + 3\sqrt{8}$ (associées aux vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$). Il s'ensuit que la matrice M^k est associée à la multiplication par $(3 + \sqrt{8})^k$. La première colonne de M^k correspond à $M^k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc à $(3 + \sqrt{8})^k$ et en développant cette puissance sous la forme $x + y\sqrt{8}$, on aboutit à une solution $(x; y)$ de l'équation $x^2 - 8y^2 = 1$. Par exemple, $(3 + \sqrt{8})^4 = 577 + 204\sqrt{8}$ donne la solution $(577; 204)$.

Notons $(x_k; y_k)$ la solution découlant de $(3 + \sqrt{8})^k$. On a donc la relation $(3 + \sqrt{8})^k = x_k + y_k\sqrt{8}$ et on vérifie que $(3 - \sqrt{8})^k = x_k - y_k\sqrt{8}$. On en déduit

$$x_k = \frac{(3 + \sqrt{8})^k + (3 - \sqrt{8})^k}{2} \quad \text{et} \quad y_k = \frac{(3 + \sqrt{8})^k - (3 - \sqrt{8})^k}{2\sqrt{8}}.$$

Comme on peut négliger les puissances de $3 - \sqrt{8} \cong 0.17$, on peut dire que x_k est l'entier directement supérieur à $\frac{(3 + \sqrt{8})^k}{2}$ et y_k est l'entier directement inférieur à $\frac{(3 + \sqrt{8})^k}{2\sqrt{8}}$.

5. Retour au problème initial

Nous cherchions les entiers n pour lesquels la somme $1 + 2 + \dots + n$ est un carré parfait et nous avons remarqué que chaque couple $(x; y)$ vérifiant $x^2 - 8y^2 = 1$ fournit une solution

$$n = \frac{x - 1}{2} = \frac{1}{2} \left(\left\lceil \frac{(3 + \sqrt{8})^k}{2} \right\rceil - 1 \right).$$

Les dix premières valeurs de n sont 1, 8, 49, 288, 1681, 9800, 57121, 332928, 1940449 et 11309768.

Remarquons que l'équation $x^2 - 8y^2 = 1$ est équivalente à $x^2 - 2y^2 = 1$ avec y pair. Cette dernière équation est souvent utilisée pour résoudre notre problème initial (voir par exemple le sujet "*Nombre carré triangulaire*" sur Wikipédia) mais la fraction continue $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$ présente une période minimale de longueur 1 et ce cas trop particulier aurait certainement moins aidé à comprendre le mécanisme dans sa généralité. En fait, les fractions continues de longueur paire (comme $[1; \overline{2}] = \frac{3}{2}$ et $[1; \overline{2; 2}] = \frac{17}{12}$) livrent des solutions de l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ alors que celles de longueur impaire (comme $[1] = \frac{1}{1}$, $[1; \overline{2; 2}] = \frac{7}{5}$ et $[1; \overline{2; 2; 2}] = \frac{41}{29}$) livrent des solutions de l'équation $x^2 - 2y^2 = -1$ (car le déterminant d'une matrice $\mathcal{M}(\alpha)$ vaut $-1\dots$).

6. Problème entièrement résolu

Nous allons montrer maintenant que la fraction continue de $\sqrt{8}$ permet de trouver **toutes** les solutions de l'équation diophantienne $x^2 - 8y^2 = 1$.

Considérons une solution $(x; y)$, la fraction continue $x/y = [a_0; a_1; \dots; a_n]$ de longueur paire (choix), ainsi que la matrice $M = \mathcal{M}(a_1)\mathcal{M}(a_2)\dots\mathcal{M}(a_n) = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$. Son déterminant est $ps - qr = -1$ et comme $\frac{x}{y} = \mathcal{M}(a_0)M * \infty = \mathcal{M}(a_0) * \frac{p}{q} = \frac{a_0p + q}{p}$, on a $p = y$ et $q = x - a_0p = x - a_0y$ car les fractions sont irréductibles¹. On peut remarquer que $q^2 - 1 = (x - a_0y)^2 - 1 = (x^2 - 1) - 2a_0xy + a_0^2y^2$ est un multiple de $y = p$, disons $q^2 - 1 = kp$, et on a $p(s - k) = ps - pk = (qr - 1) - (q^2 - 1) = q(r - q)$. Relativement premier avec q , le nombre p divise forcément $r - q$, mais comme² $r, q \in \{1, \dots, p - 1\}$, on a $|r - q| \leq p - 2$, donc $r - q = 0$. Ainsi, la matrice M est symétrique et comme les matrices $\mathcal{M}(\alpha)$ le sont également, on peut écrire $[a_1; \dots; a_n] = M * \infty = {}^tM * \infty = \mathcal{M}(a_n)\dots\mathcal{M}(a_1) * \infty = [a_n; \dots; a_1]$, donc la fraction continue $[a_1; \dots; a_n]$ est un palindrome ($a_n = a_1, a_{n-1} = a_2$, etc).

1. Avec le théorème de Bézout, l'irréductibilité de x/y est évidente et celle de $(a_0p + q)/p$ découle de la relation $(a_0p + q)r - p(s + a_0r) = qr - ps = 1$.
 2. On montre facilement par induction que le plus grand coefficient d'un produit de n matrices $\mathcal{M}(\cdot)$ se trouve en haut à gauche.

Considérons maintenant la fraction continue périodique $\theta = [a_0; \overline{a_1; \dots; a_1; 2a_0}]$ qui commence par celle de x/y . On a alors $\theta - a_0 = [0; a_1; \dots; a_1; a_0 + \theta]$, autrement dit

$$\begin{aligned}\theta - a_0 &= \mathcal{M}(0) \overbrace{\mathcal{M}(a_1) \cdots \mathcal{M}(a_1)}^{=M} * (\theta + a_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ q & s \end{pmatrix} * (\theta + a_0) \\ &= \begin{pmatrix} q & s \\ p & q \end{pmatrix} * (\theta + a_0) = \frac{q(\theta + a_0) + s}{p(\theta + a_0) + q}\end{aligned}$$

En multipliant les deux extrémités de cette chaîne d'égalités par $p(\theta + a_0) + q$, on obtient la relation $p(\theta^2 - a_0^2) + q(\theta - a_0) = q(\theta + a_0) + s$, donc $p\theta^2 - a_0^2p - a_0q = a_0q + s$ et $p^2\theta^2 = a_0^2p^2 + 2a_0pq + ps$. Comme le déterminant de M est $ps - q^2 = -1$, on a

$$p^2\theta^2 = a_0^2p^2 + 2a_0pq + q^2 - 1 = (a_0p + q)^2 - 1 = x^2 - 1 = 8y^2 = 8p^2.$$

On a ainsi $\theta = \sqrt{8}$ et la fraction continue de x/y commence celle de $\sqrt{8}$ avant que cette dernière se répète indéfiniment. Ceci montre que la méthode présentée avec la fraction continue de $\sqrt{8}$ permet de trouver toutes les solutions de l'équation $x^2 - 8y^2 = 1$.

7. Théorie

Après avoir traité un cas particulier, il serait intéressant de connaître le résultat général. Pour n'importe quel nombre naturel N qui n'est pas un carré parfait, la fraction continue de \sqrt{N} présente une période (motif répétitif). Une telle période permet de trouver une solution de l'équation $x^2 - Ny^2 = 1$ si elle est de longueur paire, ou de l'équation $x^2 - Ny^2 = -1$ si elle est de longueur impaire. Notons que s'il existe une période de longueur n , alors il existe des périodes de longueur kn pour n'importe quel nombre entier $k \geq 1$. Ainsi, la fraction continue de \sqrt{N} livre une infinité de solutions de l'équation $x^2 - Ny^2 = 1$, ainsi que de l'équation $x^2 - Ny^2 = -1$ si la période minimale est de longueur impaire. Elle donne en réalité toutes les solutions.

Exemple

La fraction continue $\sqrt{41} = [6; \overline{2; 2; 12}]$ a une période de longueur 3. On a $[6; 2; 2] = 32/5$, donc $(32; 5)$ vérifie l'équation $x^2 - 41y^2 = -1$. On peut également dire que $\sqrt{41} = [6; \overline{2; 2; 12; 2; 2; 12}]$ a une période de longueur 6, on a $[6; 2; 2; 12; 2; 2] = 2049/320$ donc $(2049; 320)$ vérifie $x^2 - 41y^2 = 1$. Remarquons qu'avec le raccourci présenté au paragraphe 4, on a directement $(32 + 5\sqrt{41})^2 = 2049 + 320\sqrt{41}$ et le carré de ce nombre livre $(8'396'801; 1'311'360)$ comme deuxième solution de l'équation $x^2 - 41y^2 = 1$, dans le sens où il n'y a aucune solution $(x; y)$ avec $2049 < x < 8'396'801$.

8. Conclusion

Nous espérons que cette brève incursion dans le monde fascinant des fractions continues a intéressé le lecteur. Les fractions continues permettent de résoudre divers types d'équations diophantiennes, comme les équations de Bézout $ax + by = 1$ (où a et b sont des entiers premiers entre eux), les équations d'Euler $p = x^2 + y^2$ (où p est un nombre premier congru à 1 modulo 4) ou les équations de Pell-Fermat $x^2 - Ny^2 = \pm 1$ (où N est un entier positif non carré). Concernant ces dernières, une approche alternative est présentée dans l'article "*An algorithm to solve a Pell equation*", disponible sur internet à l'adresse www.geman.in/volumes//all_volumes-page1_2015

Les Olympiades suisses de mathématiques

Maret Arnaud, ETH Zürich, arnaud@imosuisse.ch

1 Les Olympiades de mathématiques

Les Olympiades internationales de mathématiques (OIM) sont une compétition mondiale destinée aux collégiens [2]. L'OIM a lieu chaque année en juillet dans un pays différent et fêtera ses 60 ans d'existence en 2019. Regroupant chaque année plus d'une centaine de pays de tous les continents, elle demeure la compétition de référence au niveau pré-universitaire. Plusieurs grands noms des mathématiques, comme Grigori Perelman, Stanislav Smirnov ou Maryam Mirzakhani, sont en effet d'anciens médaillés de l'OIM. De plus, une bonne performance lors de l'OIM est un argument sérieux pris en compte par les universités pour évaluer un dossier de candidature. Selon la tradition olympique, chaque pays, peu importe sa taille et ses résultats passés, peut envoyer au plus six participants par édition.

La Suisse participe à l'OIM depuis plus d'une vingtaine d'années. La sélection nationale, ainsi que les Olympiades suisses de mathématiques (OSM) sont organisées par l'association imosuisse [1]. Constituée presque uniquement d'anciens participants qui œuvrent bénévolement à côté de leurs études, un esprit jeune et dynamique règne dans l'association. En plus de l'OIM, la Suisse participe chaque année à deux autres Olympiades internationales : les Olympiades Européennes de mathématiques pour filles (EGMO) et les Olympiades mathématiques d'Europe centrale (MEMO).

L'EGMO est une compétition organisée depuis une dizaine d'années qui a pour but d'encourager la participation féminine aux Olympiades de mathématiques [3]. En effet, consterné par la très faible proportion de filles à l'OIM, un comité a initié l'EGMO pour populariser les Olympiades de mathématiques auprès de la gente féminine. La Suisse recherche chaque année activement de nouvelles jeunes étudiantes motivées par le défi des Olympiades pour former l'équipe EGMO. L'EGMO a traditionnellement lieu au mois d'avril dans une ville Européenne différente et dure une semaine.

La MEMO, quant à elle, est une anti-chambre pour l'OIM et permet aux six étudiants qui ont manqué de se qualifier pour l'OIM d'avoir la possibilité de participer à une Olympiade internationale. Une des particularités de la MEMO réside dans un concours par équipe en plus de la compétition individuelle traditionnelle. Lors du concours par équipe, les sélections de chaque pays travaillent ensemble sur le même examen. On renforce ainsi les liens sociaux et les étudiants ont également la possibilité de comparer en temps réel les méthodes de travail de chacun. La MEMO regroupe dix pays d'Europe centrale qui se succèdent chaque année pour accueillir la compétition. La MEMO a lieu à la fin du mois d'août et dure également une semaine.

Chaque année, à travers plusieurs étapes de sélection, les six meilleurs collégiens helvétiques se qualifient pour représenter la Suisse à l'OIM et les quatre meilleures filles sont sélectionnées pour participer à l'EGMO. Le tour préliminaire, ouvert à tous les lycéens de moins de vingt ans, a lieu au début du mois de décembre. Les vingt-cinq meilleurs Suisses se qualifient pour le tour final qui a lieu au mois de mars. A la suite du tour final, les douze meilleurs sont sélectionnés pour une ultime étape de sélection en mai au terme de laquelle l'équipe nationale est déterminée. Les six viennent-ensuite participent à la MEMO. Tous nos examens sont systématiquement traduits en français, en allemand et en anglais. Au besoin, nous produisons également une version italienne. Les étudiants sont, bien entendu, libres de répondre dans la langue qui leur convient.

Pour préparer au mieux les élèves, des rencontres de préparations sont organisées avant chaque sélection. En particulier, les néophytes ont la possibilité de suivre trois journées de préparation avant la tenue du tour préliminaire. Durant ces journées, les différents sujets examinés sont présentés pour que les nouveaux puissent se familiariser avec les mathématiques olympiques (différentes des mathématiques scolaires par leur contenu). Le format ressemble à celui d'un cours où l'accent est mis sur le raisonnement et les preuves, plutôt que sur le calcul méthodique (à lire [5]). Des exemples précis de problèmes sont abordés et les élèves ont également du temps à disposition pour résoudre certains problèmes par eux-mêmes. Les rencontres ont lieu simultanément à Lausanne, Zurich et Lugano dans la langue correspondante.

De plus, depuis cette année, un Junior Camp est organisé au début du mois de juin. S'inspirant d'un modèle existant dans d'autres pays, le Junior Camp est destiné aux jeunes participants malheureux du premier tour âgés de moins de seize ans. Le raisonnement pur, la rédaction d'une preuve ou simplement la nouvelle matière mathématique sont des notions difficiles à apprivoiser pour les plus jeunes et, parfois même, effraient les routiniers. Le Junior Camp offre une possibilité, le temps d'un weekend, de s'entraîner à un rythme adapté sur ces différents aspects et ce de manière ludique. En effet, l'accent est également mis sur les activités sociales. Le Junior Camp propose ainsi un événement supplémentaire à ceux qui ont manqué la qualification pour le tour final et augmente leur chance de se qualifier l'année suivante.

Parmi les autres événements majeurs du calendrier, un camp d'une semaine est organisé au début du mois de mars pour les qualifiés du premier tour. Il se clôture par l'examen du tour final. Durant cette semaine, les étudiants travaillent les mathématiques durant la journée, puis participent à des activités sociales en fin d'après-midi et en soirée. Nous avons à cœur de maintenir une ambiance fraternelle et de ne pas exacerber l'esprit compétitif. Les participants sont invités à partager leur raisonnement et à travailler en commun sur les problèmes les plus récalcitrants. Nous essayons autant que possible de susciter la curiosité des élèves et de les sensibiliser à la beauté des arguments mathématiques.



Figure 1 – Programme de l'édition 2018/2019 des Olympiades suisses de mathématiques

Nous travaillons depuis quelques années à populariser les Olympiades en Suisse pour qu'elles deviennent un événement reconnu incontournable et un objectif chez tous les férus de mathématiques en Suisse. Tous les professeurs de mathématiques de Suisse sont ainsi cordialement conviés à présenter les Olympiades de mathématiques à leurs classes et à motiver les plus friands à s'inscrire aux rencontres de préparation du premier tour. Toutes les informations pratiques sont disponibles sur notre site internet [1]. La participation est entièrement gratuite (les frais de transport sont systématiquement remboursés). Au delà des mathématiques, les Olympiades offrent une possibilité en or de voyager et de lier de nouvelles amitiés avec d'autres jeunes du monde entier. Nous sommes convaincus qu'il s'agit là d'une véritable expérience humaine aux profits sociaux incommensurables.

2 Un exemple pour la route

Ne prenez pas peur ! Même si les problèmes proposés aux Olympiades font parfois naître une certaine réticence chez les professionnels de l'enseignement de par leur hermétisme apparent, il va de soi qu'avec l'appropriation adéquat il n'y a plus rien à craindre. Le problème suivant provient de l'OIM 2011 à Amsterdam. Selon la plupart des experts actifs dans le monde des Olympiades aujourd'hui, il s'agit là d'un des plus beaux problèmes jamais proposés lors d'une OIM. L'énoncé est le suivant :

OIM 2011, Problème 2. Soit \mathcal{S} un ensemble fini de points du plan, contenant au moins deux points. Supposons que \mathcal{S} ne contienne pas trois points alignés. On appelle *moulin* le processus suivant : le processus commence avec une droite ℓ contenant un unique point P de \mathcal{S} ; la droite ℓ tourne, dans le sens des aiguilles d'une montre, autour du point P , appelé *pivot*, jusqu'à ce qu'elle rencontre pour la première fois un autre point de \mathcal{S} ; ce point, Q , devient le nouveau pivot ; la droite continue alors sa rotation dans le sens des aiguilles d'une montre autour de Q , jusqu'à rencontrer un nouveau point de \mathcal{S} ; ce processus continue indéfiniment. Montrer qu'on peut choisir un point P de \mathcal{S} et une droite ℓ contenant P , de façon que le moulin à vent commençant par ℓ utilise chaque point de \mathcal{S} comme pivot une infinité de fois.

En lisant uniquement la solution présentée ci-dessous, le problème pourrait paraître simple. Les arguments de la solution sont en effet faciles à comprendre et ne requièrent aucun outil mathématique sophistiqué. Et là est toute la beauté des problèmes olympiques ! Des énoncés simples qui admettent des preuves astucieuses ne nécessitant aucune mathématique avancée. Toutefois, cette beauté est aussi source de difficulté accrue.

La solution se présente comme suit. Il s'agit de choisir un bon point et une bonne droite. En adaptant notre point de vue, on commence par supposer que deux points de \mathcal{S} ne se trouvent pas sur la même droite verticale. On choisit ensuite un point P de \mathcal{S} tel que la droite verticale qui passe par P sépare les autres points de \mathcal{S} en deux sous-ensembles dont la taille diffère d'au plus 1 (si le nombre d'éléments dans \mathcal{S} est impair, alors P peut être choisi tel que les deux sous-ensembles aient le même nombre d'éléments, si le nombre d'éléments dans \mathcal{S} est pair, alors il y aura toujours au moins un élément en plus dans l'un des deux sous-ensembles). On prétend que choisir ce point P et la droite ℓ comme étant la droite verticale (orientée) par P fonctionne.

En effet, représentons les points à gauche de ℓ par des croix, ceux à droite par des disques et P par un cercle. L'observation clef est la suivante : à chaque changement de pivot, l'ancien pivot passe du côté de la droite ℓ d'où provient le nouveau pivot. En "re-représentant" les points par rapport à la nouvelle position de ℓ , ceux à gauche par des croix, ceux à droite par des disques et le nouveau pivot par un cercle, on conserve donc le même nombre de points de chaque forme.

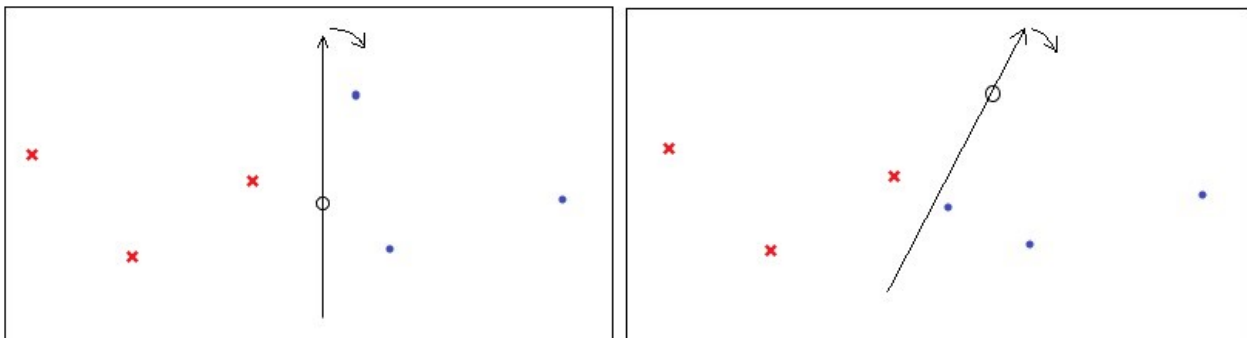


Figure 2 – Situation initiale lorsque \mathcal{S} contient sept points. Au premier changement de pivot, on observe que l'ancien pivot passe à droite de ℓ et donc devient un disque, i.e. l'ancienne forme du nouveau pivot devenu un cercle.

La droite ℓ était initialement verticale. Après un certain nombre de changements de pivot, la droite aura tourné de 180° . Il n'est pas clair a priori par quel point de \mathcal{S} passera la droite ℓ à ce moment-là. Or, rappelons que le nombre de points de chaque forme est conservé et que la droite a effectué un demi-tour. Notez qu'après un demi-tour, on a permuté les notions de droite et de gauche par rapport à ℓ , ainsi les points représentés par des croix, présents en nombre constant, sont désormais à droite de ℓ et les points représentés par des disques à gauche. Par conséquent, le point de \mathcal{S} , par lequel passe ℓ à présent, est soit P , soit un des deux points voisins (voisins selon l'abscisse). En particulier, chaque point a changé de forme au moins une fois et donc chaque point a été utilisé au moins une fois comme pivot après que ℓ ait effectué un demi-tour. En continuant de tourner ℓ ainsi une infinité de fois, on utilise bien chaque point comme pivot une infinité de fois. CQFD

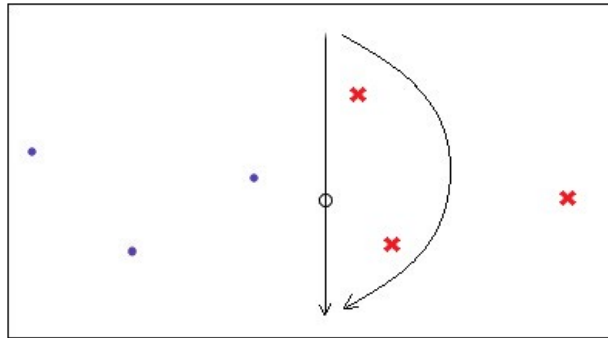


Figure 3 – Situation lorsque ℓ a effectué un demi-tour. Pour les raisons de constance dans les formes expliquées plus haut, le pivot actuel doit être le pivot initial (car 7 est impair). Comme la droite et la gauche de ℓ sont inversées après un demi-tour, les points ont changé de forme.

Références

- [1] *Verein Schweizerischer Mathematik-Olympiaden* (www.imosuisse.ch)
- [2] *International Mathematical Olympiad* (www.imo-official.org)
- [3] *European Girls' Mathematical Olympiad* (www.egmo.org)
- [4] *Verband Schweizer Wissenschafts-Olympiaden* (www.science.olympiad.ch)
- [5] *Couvrez cette calculatrice que je ne saurais voir : le retour du raisonnement à l'école* (<https://science.olympiad.ch/fr/actuel/detail/news/news/couvrez-cette-calculatrice-que-je-ne-saurais-voir-le-retour-du-raisonnement-a-lecole/>)

Fixpunktfreie Permutationen

Georg Keller, Kantonsschule Schaffhausen, georg.keller@kanti.sh.ch

1 Einleitung

Im letzten VSMP-Bulletin wurde von anderer Seite dargelegt, wie die Wahrscheinlichkeiten für fixpunktfreie Permutationen resp. für solche mit k Fixpunkten berechnet werden können. Vor etwa einem halben Jahr habe ich mir - angeregt durch unsere Schüler - dieselbe Aufgabe gestellt und dabei einen alternativen und, aus Sicht einiger Fachkollegen, schönen Lösungsweg gefunden.

Diese Aufgabe wurde deswegen durch unsere Schüler angeregt, weil viele unserer Klassen in der Adventszeit „wichteln“. D.h. in einer solchen Klasse schreiben die Schüler ihre Namen auf jeweils ein Stück Papier, legen diese Papierstücke in eine „Urne“ und jeder zieht dann blind eines der Papierstücke; sofern der gezogene Name nicht der eigene ist, wird der Ziehende während der Adventszeit dem Gezogenen wenige Male ein kleines Geschenk machen, und zwar so, dass der Beschenkte nicht weiss, von wem das Geschenk ist. Eine Frage, die sich hier natürlicherweise stellt, ist, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine solche Namensziehungsrunde „funktioniert“, d.h. dass keiner der Ziehenden den eigenen Namen zieht. Mathematisch ist dies gleichbedeutend zur Frage, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine zufällige Permutation von n Elementen keinen Fixpunkt hat.

Diese Wahrscheinlichkeit soll im Folgenden für alle $n \in \mathbb{N}$ berechnet werden, und ausserdem soll das asymptotische Verhalten dieser Wahrscheinlichkeiten für $n \rightarrow \infty$ untersucht werden.

2 Wahrscheinlichkeitsberechnung

Wir definieren (nicht nur für alle $n \in \mathbb{N}$, sondern zwecks einheitlicher Darstellung der anschliessenden Überlegungen auch für $n = 0$)

$$f(n) := \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \text{Anzahl fixpunktfreier Permutationen von } n \text{ Elementen,} & n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (1)$$

Mit Hilfe der nachfolgend beschriebenen kombinatorischen Überlegungen erhalten wir für $n \geq 1$ die Rekursionsgleichung

$$f(n) = n! - \binom{n}{1} f(n-1) - \binom{n}{2} f(n-2) - \dots - \binom{n}{n-1} f(1) - \binom{n}{n} f(0) \quad (2)$$

Begründung von (2): Die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen von n Elementen, d.h. $f(n)$, ist doch gleich ...

- der Anzahl aller Permutationen von n Elementen ($= n!$) ...
- minus die Anzahl aller Permutationen mit genau 1 Fixpunkt ($=$ Anzahl aller Möglichkeiten zur Wahl des Fixpunktes ($= \binom{n}{1}$) mal Anzahl aller fixpunktfreien Permutationen der restlichen $n - 1$ Elemente

- (= $f(n - 1)$) ...
- minus die Anzahl aller Permutationen mit genau 2 Fixpunkten (= Anzahl aller Möglichkeiten zur Wahl der 2 Fixpunkte (= $\binom{n}{2}$) mal Anzahl aller fixpunktfreien Permutationen der restlichen $n - 2$ Elemente (= $f(n - 2)$) ...
- etc.

Die letztlich interessierenden Wahrscheinlichkeiten $p(n)$ (nicht nur für $n \in \mathbb{N}$, sondern aus Einheitlichkeitsgründen auch für $n = 0$) sind definiert als

$$p(n) := \begin{cases} 1, & n = 0 \\ P(\text{eine zufällige Permutation von } n \text{ Elementen ist fixpunktfrei}), & n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3)$$

Weil natürlich

$$p(n) = \frac{f(n)}{n!} \quad (4)$$

ist, erhalten wir mittels Division von (2) durch $n!$ und via (4) eine Rekursionsgleichung für $p(n)$:

$$\begin{aligned} p(n) &= 1 - \frac{n!}{1!(n-1)!n!} f(n-1) - \frac{n!}{2!(n-2)!n!} f(n-2) - \dots - \frac{n!}{(n-1)!1!n!} f(1) - \frac{1}{n!} f(0) \\ &= 1 - \frac{1}{1!} p(n-1) - \frac{1}{2!} p(n-2) - \dots - \frac{1}{(n-1)!} p(1) - \frac{1}{n!} p(0) \end{aligned} \quad (5)$$

Um daraus eine explizite Darstellung für $p(n)$ zu gewinnen, nehmen wir zuerst in (5) alle Terme mit $p(j)$ auf die linke Seite, was zu

$$\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} p(n-j) = 1 \quad (6)$$

führt. Motiviert durch die spezielle Struktur der linken Seite von (6) betrachten wir jetzt die erzeugende Funktion $w(x)$ aller $p(n)$, d.h.

$$w(x) := \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n, \quad (7)$$

welche mindestens für $|x| < 1$ absolut konvergiert (oder als formale Potenzreihe in x betrachtet werden kann). Für $|x| < 1$ können wir nun Folgendes beobachten:

$$e^x w(x) \stackrel{(7)}{=} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} p(k) x^k \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{j!} p(k) x^{j+k},$$

was durch geeignetes Ändern der Summationssystematik (statt über die unabhängigen Indizes j und k summieren wir jetzt erstens über $j+k =: n$ (von 0 bis ∞) und zweitens, für gegebenes n , über j (von 0 bis n)) ergibt

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} p(n-j) \right) x^n \stackrel{(6)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Es gilt also die einfache Gleichung $e^x w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, welche wir durch e^x dividieren:

$$\begin{aligned}
 w(x) &= e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^j}{j!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} x^{j+k} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!} \right) x^n \quad ,
 \end{aligned}$$

woraus wir aufgrund von (7) die explizite Darstellung von $p(n)$ ablesen können:

$$p(n) = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!} \quad . \tag{8}$$

Aus (8) folgt das asymptotische Verhalten $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = e^{-1}$, wobei die Konvergenz sehr rasch erfolgt (Resultate auf 6 Stellen nach dem Komma gerundet):

n	p(n)
1	0
2	0.5
3	0.333333
4	0.375
5	0.366667
6	0.368056
7	0.367857
8	0.367881
9	0.367879
10	0.367879
11	0.367879
12	0.367879
...	...
∞	0.367879

3 Anmerkungen

Tatsächlich hat die damals von mir befragte Klasse 3-mal probieren müssen, bis die Namensziehungs-Runde „funktionierte“.

Und noch eine Bemerkung zu Permutationen mit k Fixpunkten: Gemäss der zu (5) führenden Überlegung ist $p(n, k) := P(\text{eine zufällige Permutation von } n \text{ Elementen hat } k \text{ Fixpunkte}) = \frac{1}{k!} p(n - k)$, was via (8) zu folgendem Resultat führt: $p(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n, k) = \frac{1}{k!} e^{-1}$.



Kangaroo goes Science

„Voll Power und Begeisterung kam Anna nach Hause und erzählte uns mit Feuereifer was sie alles erlebt hatte. Ich bin sicher, dass dieser Tag Impulse bei ihr gesetzt hat.“ - Zitat Mutter einer der Mädchen.

Am Freitag, 22.6.18, besuchten über 90 Schülerinnen und knapp 80 Eltern den vom Departement Mathematik, dem Verein „Känguru Schweiz“, der ETH Zurich und der Zürcher Sektion von 500womenscientists organisierten Event „Kangaroo goes Science“. Bei Sommerwetter durften die Schülerinnen, allesamt in der 7. Klasse und angereist aus der ganzen Schweiz, sich schon einmal wie richtige ETH Studentinnen fühlen. Sie wurden an die ETH eingeladen, da sie zu den 100 besten Teilnehmerinnen des jährlichen „Känguru der Mathematik“ Wettbewerbes gehörten und wurden so für ihre herausragenden Leistungen belohnt.

Neben einer Ansprache von ETH Rektorin Prof. Sarah Springman lauschten die Mädchen und ihre Eltern einem inspirierenden Vortrag von Prof. Marloes Maathuis über die Bedeutung der Mathematik im Alltag. Gleich danach folgte der Input von ETH Studentinnen, die ihren persönlichen Weg zur ETH vorstellten – hoffentlich eine weitere Inspirationsquelle für die Schülerinnen.

Nach der Preisverleihung für die Top 5 des Wettbewerbes ging es dann in den aktiveren Teil des Tages über. In kleinen Gruppen wurden die Mädchen von ETH Studentinnen betreut und nach einem stärkenden Mittagessen in der Mensa zum zweiten Highlight des Tages begleitet: Zusammen mit ihren Mentorinnen standen für jede Schülerinnen zwei Workshops in Laboren der ETH Zürich und des Unispitals an – von einem Blick ins menschliche Herz über den Bau einer Farbstoff-Solarzelle und einer Einführung in die Programmierung konnten die Schülerinnen ihren Forschergeist ausleben und einen Einblick in die vielen spannenden Aktivitäten an der ETH bekommen.



Gestärkt vom Abschlussapero, bei dem den Eltern von den Erlebnissen berichtet wurde, war dieser Tag an der ETH für die Schülerinnen schon wieder vorbei und hat hoffentlich bleibende Inspiration und Begeisterung für die Wissenschaft, Technik und ein Studium an der ETH hinterlassen.

Meike Akveld & Lena Wiegmann



Die Schweizer Mathematik-Olympiade

Maret Arnaud, ETH Zürich, arnaud@imosuisse.ch

Übersetzung: Patrick Stadler, EPF Lausanne, patrick@imosuisse.ch

1 Die Mathematik-Olympiade

Die Internationale Mathematik-Olympiade (IMO) ist ein weltweiter Wettbewerb für Gymnasiastinnen und Gymnasiasten [2]. Die IMO findet jedes Jahr anfangs Juli in einem anderen Land statt und feiert im Jahr 2019 ihr 60-jähriges Jubiläum. Mit mehr als 100 teilnehmenden Ländern aus allen Kontinenten ist die IMO der bekannteste Mathematik-Wettbewerb auf voruniversitärer Stufe. Mehrere grosse Namen der Mathematik, wie Grigori Perelman oder Stanislav Smirnov, sind im Besitz von IMO-Medaillen. Zudem ist eine gute Leistung an einer IMO ein berücksichtigtes Argument für die Kandidatur an einer Universität. Nach der olympischen Tradition kann jedes Land 6 Teilnehmer an jede IMO schicken.

Die Schweiz nimmt seit mehr als zwanzig Jahren an der IMO teil. Die nationale Selektion sowie die Schweizer Mathematik-Olympiade sind von der Organisation imosuisse organisiert [1]. Weil der Verein beinahe nur aus ehemaligen Teilnehmern besteht, welche neben ihrem Studium freiwillig für den Verein tätig sind, besitzt er eine junge und dynamische Atmosphäre. Neben der IMO nimmt die Schweiz auch jedes Jahr an anderen internationalen Olympiaden teil: Die Europäische Frauen-Mathematik-Olympiade (EGMO) und die Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (MEMO).

Die EGMO ist ein seit mehreren Jahren organisierter Wettbewerb, der das Ziel hat, Mädchen zu ermutigen, an den Mathematik-Olympiaden mitzumachen [3]. Weil es sehr wenige Teilnehmerinnen an der IMO gab, hat ein Komitee entschieden, die EGMO zu gründen, um so für einen grösseren Frauenanteil an der IMO zu sorgen. Die Schweiz sucht jedes Jahr junge Studentinnen, die motiviert sind, Olympiadaufgaben zu lösen, um das EGMO-Team zusammenzustellen. Die EGMO findet jedes Jahr im April in einem anderen europäischen Land statt und dauert eine Woche.

Die MEMO ist die Vorstufe der IMO und erlaubt es 6 Teilnehmern, welche nicht an die IMO gehen konnten, trotzdem noch an einer internationalen Olympiade teilzunehmen. Eine Besonderheit der MEMO ist der zusätzliche Teamwettbewerb, der nach dem normalen Einzelwettbewerb stattfindet. Beim Teamwettbewerb arbeiten alle Teilnehmer eines Landes gemeinsam an der gleichen Prüfung. Dadurch werden die Sozialkompetenzen gestärkt und die Teilnehmenden haben die Möglichkeit, ihre Arbeitsmethoden zu vergleichen. An der MEMO nehmen zehn mitteleuropäische Länder teil, welche abwechselungsweise die Gastgeberrolle übernehmen. Sie findet Ende August statt und dauert auch eine Woche.

Jedes Jahr finden mehrere Qualifikationsrunden statt. Die sechs besten Gymnasiasten dürfen die Schweiz an der IMO vertreten und die vier besten Mädchen dürfen zudem an der EGMO teilnehmen. Die Vorrunde, an welcher alle Jugendlichen unter zwanzig Jahre teilnehmen dürfen, findet Anfang Dezember statt. Die 25 besten Teilnehmer qualifizieren sich für die Finalrunde im März. Die besten zwölf werden ausgewählt, an der IMO-Selektion im Mai teilzunehmen. Die besten sechs Teilnehmenden bilden das nationale Team. Die nachfolgenden 6 Besten qualifizieren sich für die MEMO. Alle Prüfungen werden jeweils auf Deutsch, Französisch und Englisch übersetzt. Auf Anfrage erstellen wir auch eine italienische Prüfung. Den Teilnehmenden dürfen die Sprache frei wählen.

Um die Jugendlichen möglichst gut vorzubereiten, wird vor jeder Runde ein dreitägiges Vorbereitungstreffen organisiert, wo den Neulingen verschiedenen Prüfungsthemen vorgestellt werden, damit sie sich an die Mathematik-Olympiade gewöhnen können. Die Mathematik-Olympiade unterscheidet sich vom Schulstoff durch den Inhalt. Sie legt den Schwerpunkt auf die Argumentation und die Beweise und nicht auf methodische Berechnungen (nachzulesen [5]). Spezifische Probleme werden diskutiert und die Jugendlichen haben auch die Gelegenheit, einige Probleme selber zu lösen. Die Treffen finden in der jeweiligen Sprache in Zürich, Lausanne und Lugano statt.

Zudem wird seit diesem Jahr auch ein Junior-Camp im Juni organisiert. Inspiriert von einem Modell, das in anderen Ländern bereits existiert, ist das Junior-Camp für erfolglose Teilnehmer der Vorrunde reserviert, welche noch nicht sechzehn Jahre alt sind. Die logische Argumentation, die Beweisführung und der neue mathematische Stoff sind die Herausforderungen, die an die Jüngsten gestellt werden. Der Junior-Camp bietet die Möglichkeit, mit einer angepassten Geschwindigkeit spielerisch in diesen Bereichen zu trainieren. Ein Schwerpunkt wird auch auf soziale Aktivitäten gelegt. Das Junior-Camp ist somit ein zusätzlicher Event für diejenigen, die sich nicht für die Finalrunde qualifiziert haben und erhöht deren Qualifikationschancen im das nächste Jahr.

Unter den wichtigsten Terminen im Olympiade-Kalender ist die Lagerwoche Anfang März, welche für die Teilnehmenden der Finalrunde reserviert ist. Sie wird durch die beiden Prüfungen der Finalrunde abgeschlossen. Während dieser Woche lösen die Jugendlichen den ganzen Tag Mathematikaufgaben und nehmen an sozialen Aktivitäten - vor allem Spielen - am späten Nachmittag und am Abend teil. Es ist uns wichtig, eine kollegiale Atmosphäre zu pflegen und nicht den Wettbewerbsgedanken zu verstärken. Die Teilnehmenden sind eingeladen, ihre Argumentationen auszutauschen und gemeinsam an den hartnäckigsten Problemen zu arbeiten. Wir versuchen, ihre Neugier zu wecken und sie für die Schönheit der mathematischen Argumente zu sensibilisieren.



Abbildung 1 – Programm der Schweizer Mathematik-Olympiade für das Jahr 2018/2019

Wir arbeiten seit einigen Jahren daran, die Mathematik-Olympiaden zu popularisieren, damit sie anerkannte und feste Events werden bei allen Mathematikbegeisterten der Schweiz. Alle Mathematiklehrer der Schweiz werden deshalb gebeten, die Schweizer Mathematik-Olympiade ihren Schülerinnen und Schülern vorzustellen und die besten zu motivieren, sich für die Vorbereitungstreffen einzuschreiben. Alle notwendigen Informationen sind auf unserer Webseite verfügbar [1]. Die Teilnahme ist komplett gratis, sogar die Transportkosten werden zurückerstattet. Neben der Mathematik bietet die Olympiade eine Möglichkeit, zu reisen und neue Freundschaften mit anderen Jugendlichen aus der ganzen Welt zu schließen. Wir sind überzeugt, dass dabei menschlich bereichernde Erfahrungen gemacht werden.

2 Ein Beispiel für unterwegs

Habt keine Angst ! Auch wenn die Olympiade-Aufgaben manchmal etwas schwierig erscheinen - manchmal selbst für Professionelle als kaum lösbar - gibt es mit der angemessenen Einarbeitung nichts zu befürchten. Das folgende Problem soll das illustrieren. Es wurde auf diese Art an der IMO 2011 in Amsterdam gestellt. Nach einem grossen Teil der Experten der Olympiaden-Welt handelt es sich um eines der schönsten Probleme, das jemals an einer IMO vorgeschlagen wurde.

IMO 2011, Problem 2. Sei \mathcal{S} eine endliche Menge von mindestens zwei Punkten in der Ebene. Dabei wird angenommen, dass keine drei Punkte von \mathcal{S} kollinear sind. Als Windmühle bezeichnen wir einen Prozess der folgenden Art. Wir starten mit einer Geraden ℓ , die genau einen Punkt P von \mathcal{S} enthält. Die Gerade ℓ wird im Uhrzeigersinn um den Drehpunkt P so lange gedreht, bis sie zum ersten Mal auf einen weiteren Punkt aus \mathcal{S} , der mit Q bezeichnet sei, trifft. Die Gerade wird weiter im Uhrzeigersinn mit Q als neuem Drehpunkt gedreht, bis sie wieder auf einen Punkt aus \mathcal{S} trifft. Dieser Prozess wird unbegrenzt fortgesetzt. Man beweise, dass für geeignete Wahl eines Punktes P von \mathcal{S} und einer Ausgangsgeraden ℓ , die P enthält, die resultierende Windmühle jeden Punkt aus \mathcal{S} unendlich oft als Drehpunkt hat.

Wenn man nur die nachfolgende Lösung liest, erscheint das Problem einfach. Die Argumente der Lösung sind einfach zu verstehen und erfordern kein kompliziertes mathematisches Werkzeug. Und das ist die ganze Schönheit der Olympiade-Probleme. Kurze Aufgabenstellungen, die raffinierte Beweise ohne fortgeschrittene mathematische Techniken erfordern. Diese Schönheit ist aber auch die Quelle der Schwierigkeit, denn die Lösung ist nicht immer einfach zu finden.

Nun zur Lösung: Man wählt einen Punkt und eine Gerade. Wir verändern unsere Sichtweise und vermuten, dass zwei Punkte von \mathcal{S} sich nicht auf der gleichen vertikalen Gerade befinden. Anschliessend wird ein Punkt P von \mathcal{S} gewählt, sodass die vertikale Gerade durch P die anderen Punkte von \mathcal{S} in zwei Teilmengen teilt, welche ein Grössenunterschied von höchstens 1 haben (Wenn die Anzahl der Elemente in \mathcal{S} ungerade ist, kann P so gewählt werden, dass die beiden Teilmengen gleich gross sind, wenn \mathcal{S} eine gerade Anzahl Elemente besitzt, dann hat eine Teilmenge immer mindestens ein Element mehr als die andere). Wir beweisen nun, dass dieser Punkt P und die Gerade ℓ eine Lösung der Aufgabenstellung sind.

Zuerst werden alle Punkte links von ℓ rot gefärbt (im Bild ein Kreuz), die Punkte rechts von ℓ blau (im Bild ein Punkt) und P wird weiss gefärbt. Das Schlüsselargument ist folgendes: Bei jedem Wechsel des Drehpunktes, geht der alte Drehpunkt auf die Seite von ℓ , auf der vorher der neue Drehpunkt war. Wenn man nun die Punkte neu einfärbt für die neue Position von ℓ , links rot, rechts blau und der Drehpunkt weiss, stellt man fest, dass die Anzahl Punkte einer Farbe konstant bleiben.

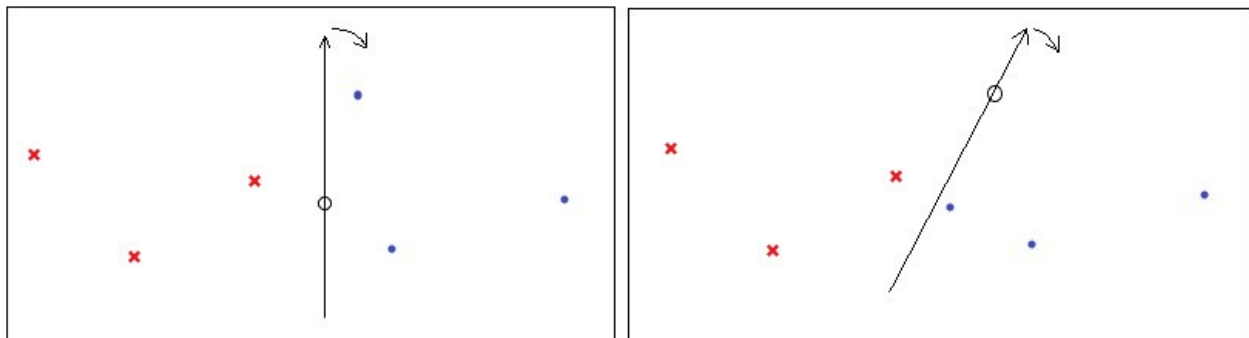


Abbildung 2 – Anfangssituation wenn \mathcal{S} sieben Punkte enthält. Beim ersten Wechsel des Drehpunktes, beobachtet man, dass der alte Drehpunkt nach rechts geht und blau wird, was genau die Farbe des neuen Drehpunkt war, welcher weiss wurde.

Die Gerade ℓ war ursprünglich vertikal. Nach einer bestimmten Anzahl von Wechsels des Drehpunktes, hat sich die Gerade um 180° gedreht. Es ist zu Beginn nicht klar, durch welchen Punkt von \mathcal{S} die Gerade ℓ zu diesem Zeitpunkt gehen wird. Mit der Bedingung, dass die Anzahl Punkte einer Farbe immer gleich bleibt, stellt man aber fest, dass nach einer halben Umdrehung immer noch gleich viele Punkte rot und blau sind. Wegen der halben Umdrehung wurde aber die Bedeutung von rechts und links bezüglich ℓ vertauscht. Das heisst, die roten Punkte sind nun auf der rechten Seite von ℓ und die blauen Punkte auf der linken Seite von ℓ . Also ist der Punkt von \mathcal{S} , durch welchen ℓ jetzt geht, entweder P oder einer der beiden Nachbarpunkte von P (bezüglich der horizontalen Distanz.) Somit hat jeder Punkt mindestens einmal die Farbe gewechselt, das heisst, jeder Punkt war einmal der Drehpunkt, wenn ℓ eine halbe Umdrehung gemacht hat. Wenn ℓ eine unendliche Anzahl Umdrehungen macht, wird folglich auch jeder Punkt unendlich oft als Drehpunkt verwendet. QED

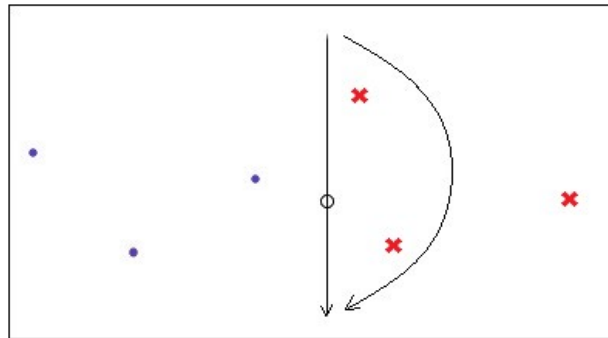


Abbildung 3 – Situation sobald ℓ eine halbe Umdrehung gemacht hat. Aus den oben erklärten Gründen ist der aktuelle Drehpunkt der ursprüngliche Drehpunkt (7 ist ungerade). Da die Gerade ℓ gedreht ist, haben die Punkte ihre Farbe gewechselt.

Links

- [1] *Verein Schweizerischer Mathematik-Olympiaden* (www.imosuisse.ch)
- [2] *International Mathematical Olympiad* (www.imo-official.org)
- [3] *European Girls' Mathematical Olympiad* (www.egmo.org)
- [4] *Verband Schweizer Wissenschafts-Olympiaden* (www.science.olympiad.ch)
- [5] *Couvrez cette calculatrice que je ne saurais voir: le retour du raisonnement à l'école* (<https://science.olympiad.ch/fr/actuel/detail/news/news/couvrez-cette-calculatrice-que-je-ne-saurais-voir-le-retour-du-raisonnement-a-lecole/>)

Gerade oder ungerade - das ist hier die Frage!

Beat Jaggi, beat.jaggi@phbern.ch

1 Einleitung

Es erstaunt, bei wie vielen mathematischen Phänomenen die Parität (Eigenschaft einer ganzen Zahl, gerade oder ungerade zu sein) eine entscheidende Rolle spielt! Die Parität ist wichtig beim Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$, beim sogenannten "Igelsatz" oder bei der Euler-Charakteristik, es gibt gerade und ungerade Funktionen, gerade und ungerade Permutationen,

Die Liste der aufgeführten Beispiele ist nicht abschliessend.

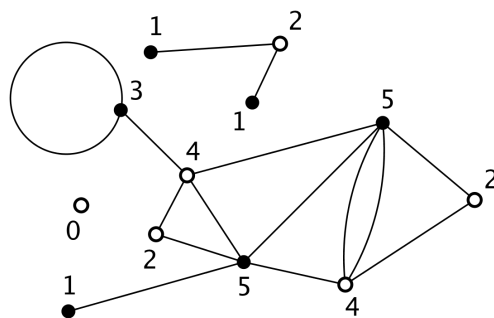
2 Ein Satz der Graphentheorie, das Lemma von Sperner und der Fixpunktsatz von Brouwer

Wir beginnen mit einem einfachen Satz aus der Graphentheorie. Mit diesem Satz lässt sich das sogenannte Lemma von Sperner beweisen. Aus dem Lemma von Sperner wiederum kann der bekannte Fixpunktsatz von Brouwer gefolgert werden!

Ein **Graph** besteht aus einer Menge von Ecken (Punkten) zusammen mit einer Menge von Kanten (Linien), welche je zwei Ecken (nicht unbedingt verschiedene) verbinden.

Der **Grad** einer Ecke E ist die Anzahl Kanten, die bei E ankommen.

Satz: In einem Graphen ist die Anzahl der Ecken mit ungeradem Grad stets gerade.



In diesem Graphen gibt es 6 Ecken (schwarz) mit ungeradem Grad.

Beweis: Mit Induktion über die Anzahl der Kanten:

In einem Graphen ohne Kanten ist der Grad jeder Ecke gleich 0, also ist die Anzahl der Ecken mit ungeradem Grad ebenfalls gleich 0 und somit gerade.

Sei \mathcal{G} ein Graph, in dem die Anzahl der Ecken mit ungeradem Grad gerade ist. Wir fügen zu \mathcal{G} eine weitere Kante k hinzu, welche die Ecken E_i und E_j verbindet.

Fall 1: Hatten E_i und E_j vor dem Zufügen von k unterschiedliche Parität, dann verändert sich durch das Zufügen von k die Anzahl der Ecken mit ungeraden Grad und auch die Anzahl der Ecken mit geraden Grad nicht; die Paritäten werden einfach vertauscht.

Fall 2: Ist $E_i = E_j$, dann erhöht sich durch das Hinzufügen der Kante k der Grad von $E_i = E_j$ um 2, die Parität (gerade oder ungerade) bleibt.

Wir können im Folgenden $E_i \neq E_j$ annehmen.

Fall 3a: Hatten E_i und E_j vor dem Zufügen von k beide geraden Grad, dann vermindert sich durch das Zufügen von k die Anzahl der Ecken mit geraden Grad um 2, während sich die Anzahl der Ecken mit ungeradem Grad um 2 erhöht.

Fall 3b: Hatten E_i und E_j vor dem Zufügen von k beide ungeraden Grad, dann erhöht sich durch das Zufügen von k die Anzahl der Ecken mit geraden Grad um 2, während sich die Anzahl der Ecken mit ungeradem Grad um 2 vermindert.

In jedem Fall hat auch der neue Graph $\mathcal{G} \cup \{k\}$ eine gerade Anzahl von Ecken mit ungeradem Grad.
□

Das Lemma von Sperner

Ein Dreieck ABC sei trianguliert, also in eine endliche Anzahl von "kleinen" Teildreiecken zerlegt, die Kante an Kante zusammenstossen. Die Eckpunkte der Triangulierung (i.e. der Teildreiecke) seien mit den Farben schwarz, grau und weiss gefärbt und zwar so, dass

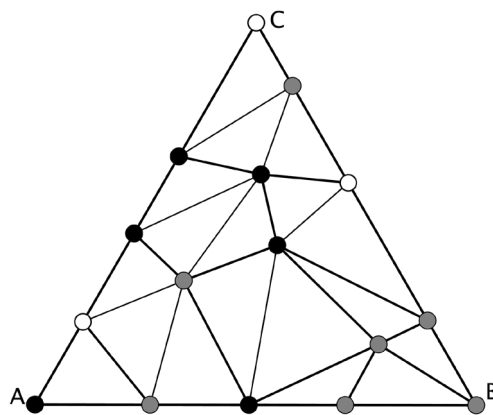
bei den Eckpunkten A, B und C alle drei Farben vorkommen
(das Dreieck ABC ist "3-gefärbt");

Punkte auf der Kante schwarz-grau nur mit den Farben schwarz und grau,

Punkte auf der Kante grau-weiss nur mit den Farben grau und weiss,

Punkte auf der Kante weiss-schwarz nur mit den Farben weiss und schwarz gefärbt sind.

Punkte im Innern des Dreiecks ABC können beliebig gefärbt sein.

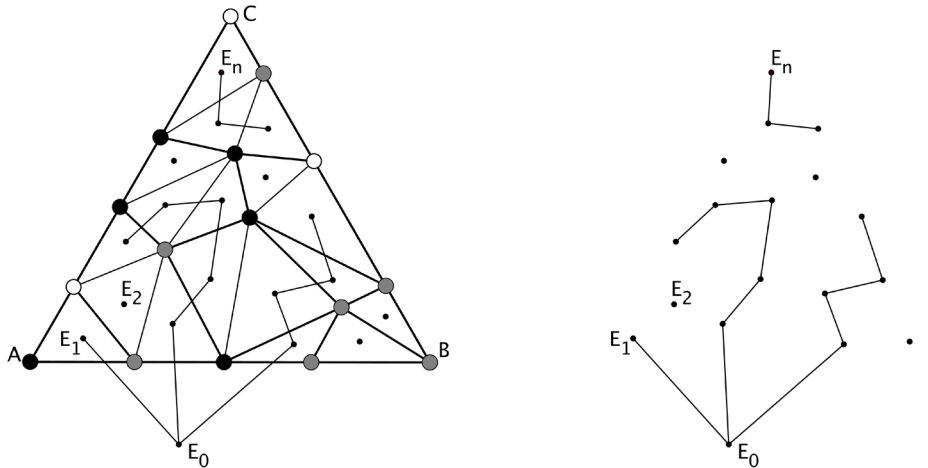


Dann gibt es in der Triangulierung stets eine ungerade Anzahl "3-gefärbter" Teildreiecke, also mindestens eines!

Beweis: Ein Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C sei trianguliert und die Eckpunkte der Triangulierung nach den Vorgaben des Lemmas gefärbt.

Wir erzeugen einen Graphen in der folgenden Art:

Wir wählen einen Punkt E_0 ausserhalb des grossen Dreiecks ABC und in jedem Teildreieck der Triangulierung einen Punkt E_1, E_2, \dots, E_n . Wir verbinden zwei dieser Punkte genau dann mit einer Linie/Kante, wenn die beiden zugehörigen Teildreiecke der Triangulierung eine gemeinsame Seite mit einem schwarzen und einem grauen Eckpunkt haben (siehe Bild links).



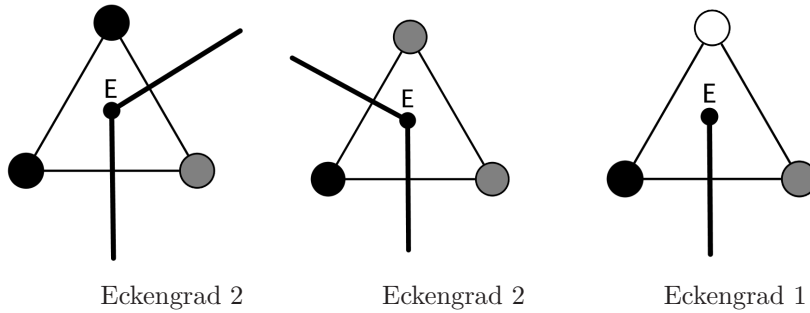
Man beachte, dass so die Seiten schwarz-weiss und weiss-grau des Dreiecks ABC von keinen Kanten gekreuzt werden.

Nun betrachten wir die Grade (Anzahl Kanten, die bei einer Ecke ankommen) der Punkte $E_0, E_1, E_2, \dots, E_n$ des so entstandenen Graphen (Bild rechts):

Entlang der Kante AB muss es eine ungerade Anzahl Wechsel zwischen den Farben schwarz und grau geben. Somit kreuzt eine ungerade Zahl von Kanten diese grosse Kante. Der Grad von E_0 wird also ungerade sein.

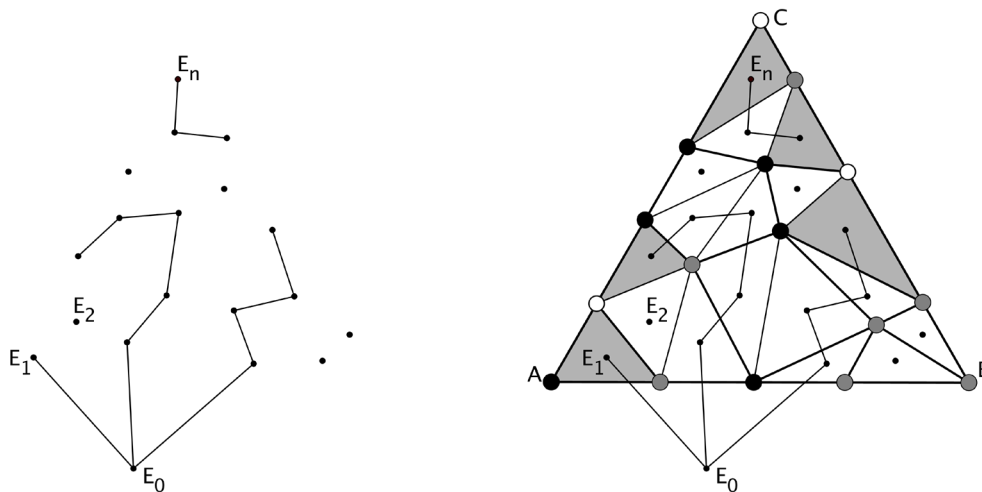
Für die Punkte E_1, E_2, \dots, E_n im Innern des Dreiecks ABC gibt es zuerst einmal zwei Fälle zu unterscheiden:

- (a) Der Punkt gehört zu einem Teildreieck der Triangulierung, welches keine Seite mit einem schwarzen und einem grauen Eckpunkt hat. Dann ist der Grad des entsprechenden Punktes gleich 0 (zum Beispiel E_2).
- (b) Der Punkt gehört zu einem Teildreieck mit (mindestens) einer schwarz-grauen Seite. Dann gibt es für die Farbe der dritten Ecke des Dreiecks drei Möglichkeiten: schwarz, grau oder weiss.



Nur beim Dreieck rechts mit den Ecken schwarz, grau und weiss ist der Grad des Punktes E ungerade (nämlich 1).

Weil nun der Grad von E_0 ungerade ist und weil die Anzahl der Punkte mit ungeradem Grad gerade ist (siehe oben), muss es im Innern des Dreiecks mindestens einen Punkt mit ungeradem Grad, also mit Grad 1, geben. Es muss also mindestens ein Teildreieck mit einer schwarzen, einer grauen und einer weissen Ecke existieren.



Genau die Punkte mit Grad 1 gehören zu Teildreiecken, deren Ecken mit den drei Farben gefärbt sind! In unserem Beispiel sind es 5 Punkte mit Grad 1, also gibt es genau 5 dreifarbige Teildreiecke (grau schattiert). □

Bemerkung: Das Lemma von Sperner lässt sich auf n -dimensionale Simplexe verallgemeinern.

Fixpunktsatz von Brouwer (1911): Jede stetige Abbildung $f : B^n \rightarrow B^n$ einer n -dimensionalen Kugel auf sich selber hat mindestens einen Fixpunkt (also einen Punkt $x \in B^n$ mit $f(x) = x$).

Für Dimension $n = 1$, also für ein Intervall, folgt dieser Satz leicht aus dem Zwischenwertsatz:

Sei $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ eine stetige Abbildung des Intervalls $[a, b]$ auf sich selbst ($a < b$ vorausgesetzt).

Da f stetig ist, ist auch $\phi(x) := f(x) - x$ stetig.

Nun ist $\phi(a) = f(a) - a \geq 0$ und $\phi(b) = f(b) - b \leq 0$.

Die Spezialfälle $\phi(a) = 0$ bzw. $\phi(b) = 0$ ergeben sich nur, wenn $f(a) = a$ bzw. $f(b) = b$ gilt. Das heisst also, dass entweder a oder b Fixpunkte von f sind oder $\phi(a) > 0$ bzw. $\phi(b) < 0$ gelten muss.

Aus Letzterem folgt nach dem Zwischenwertsatz mittels der Stetigkeit von ϕ , dass es mindestens ein $x_0 \in (a, b)$ geben muss mit $\phi(x_0) = 0$. Daraus folgt dann $f(x_0) = x_0$ und somit, dass x_0 ein Fixpunkt von f ist. \square

Für höhere Dimensionen ist Brouwers Beweis doch einigermaßen kompliziert. Es war daher eine grosse Überraschung, als 1928 der junge Emanuel Sperner (er war damals 23 Jahre alt) ein einfaches kombinatorisches Resultat (das Lemma von Sperner) vorlegte, aus dem Brouwers Fixpunktsatz gefolgert werden kann!

Für die Dimension 2 führt Sperner den Beweis nicht für eine Kreisscheibe, sondern für ein Dreieck. In diesem Dreieck betrachtet er eine Folge immer feinerer Triangulationen zusammen mit einer Folge 3-gefärbter Dreiecke, welche schliesslich gegen einen Fixpunkt der Abbildung f konvergieren.

Für einen vollständigen Beweis siehe zum Beispiel M. Aigner, G. Ziegler, Das Buch der Beweise, Springer Verlag, 2002

3 Noch mehr Graphentheorie: Eulerzüge/Eulerkreise

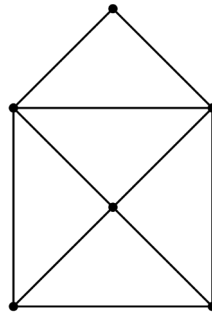
Ein **Eulerzug** in einem Graphen ist ein Weg, der alle Kanten eines Graphen genau einmal enthält.

Ein **Eulerkreis** in einem Graphen ist ein geschlossener Weg, der alle Kanten eines Graphen genau einmal enthält. Anfangs- und Endpunkt des Weges sind identisch.

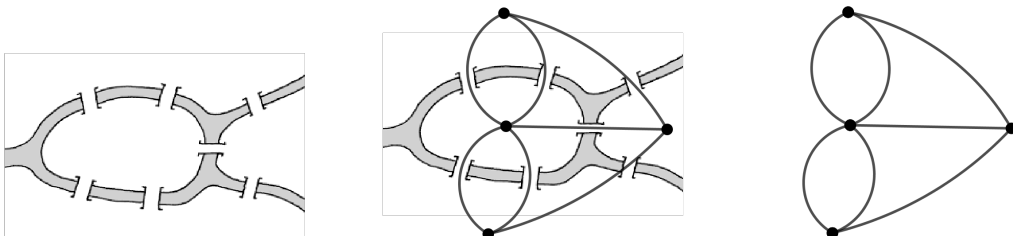
Satz: Ein zusammenhängender Graph besitzt genau dann einen Eulerzug, wenn die Anzahl Ecken mit ungeradem Grad gleich 0 oder gleich 2 ist.

Satz: Ein zusammenhängender Graph besitzt genau dann einen Eulerkreis, wenn die Anzahl Ecken mit ungeradem Grad gleich 0 ist.

Der Graph, der zum "Haus des Nikolaus" gehört, besitzt einen Eulerzug. Nur die beiden Eckpunkte unten haben Grad 3, also ungeraden Grad.

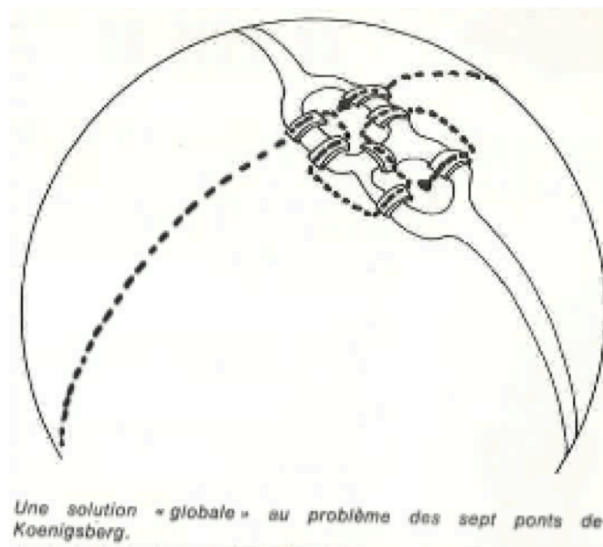


Der Graph, der zum berühmten 'Königsberger Brückenproblem' gehört, besitzt keinen Eulerzug. Alle vier Eckpunkte des zugehörigen Graphen haben ungeraden Grad.



Der Fluss Pregel in Königsberg mit den sieben Brücken

Vorsicht: Eine 'globale' Lösung des Problems existiert sehr wohl! Siehe unten.



4 Gerade und ungerade Funktionen

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst gerade, wenn $f(x) = f(-x)$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst ungerade, wenn $f(x) = -f(-x)$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiele für gerade Funktionen sind

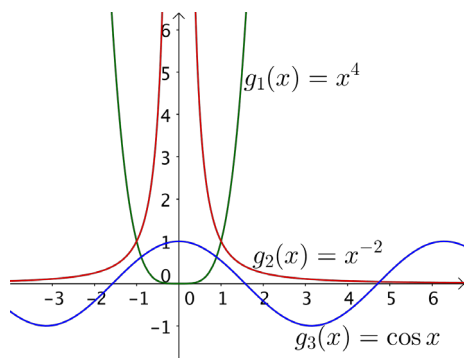
$$f(x) = \dots, x^{-4}, x^{-2}, x^0, x^2, x^4, \dots, \text{weiter } f(x) = \cos x.$$

Beispiele für ungerade Funktionen sind

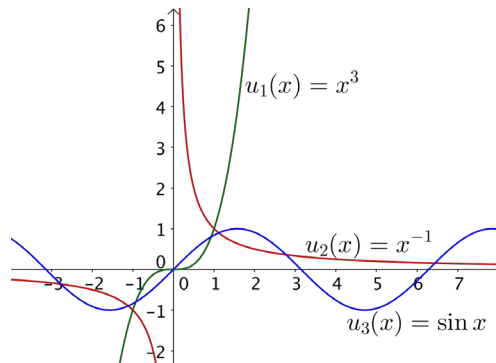
$$f(x) = \dots, x^{-3}, x^{-1}, x^1, x^3, x^5, \dots, \text{weiter } f(x) = \sin x.$$

Wie häufig überträgt sich diese spezielle Eigenschaft einer Funktion auf deren Graphen und umgekehrt:

$$\begin{aligned} f \text{ ist gerade} &\iff \text{Der Graph von } f \text{ ist achsensymmetrisch zur } y\text{-Achse.} \\ f \text{ ist ungerade} &\iff \text{Der Graph von } f \text{ ist punktsymmetrisch zum Ursprung.} \end{aligned}$$



Drei Beispiele von geraden Funktionen



Drei Beispiele von ungeraden Funktionen

Erstaunlich ist der folgende

Satz: Jede Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion darstellen.

Begründung: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben.

$$\text{Wir setzen } g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \text{ und } u(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

$$\text{So wird } g(x) + u(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = \frac{f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)}{2} = f(x).$$

Weiter gilt

$$g(-x) = \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x), \text{ also ist } g \text{ eine gerade Funktion.}$$

und

$$u(-x) = \frac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -u(x), \text{ also ist } u \text{ eine ungerade Funktion. } \square$$

Beispiele:

$$1. f(x) = e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \cosh x + \sinh x$$

$$2. f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d =$$

$$\begin{aligned} & \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d + a(-x)^3 + b(-x)^2 + c(-x) + d}{2} \\ & + \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d - (a(-x)^3 + b(-x)^2 + c(-x) + d)}{2} \\ & = \frac{2bx^2 + 2d}{2} + \frac{2ax^3 + 2cx}{2} = (bx^2 + dx^0) + (ax^3 + cx^1) \end{aligned}$$

Eine Polynomfunktion wird einfach in Terme mit geraden und Terme mit ungeraden Potenzen von x aufgespalten.

5 Gerade und ungerade Permutationen

Mit S_n bezeichnen wir die Gruppe aller **Permutationen** der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$.

Das **Vorzeichen** einer Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \cdots & \pi(n-1) & \pi(n) \end{pmatrix}$$

ist definiert durch $\text{sgn } \pi = (-1)^{|\text{inv } (\pi)|}$, wobei

$$\text{inv } (\pi) = \{(\pi(i), \pi(j)) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\} : i < j \text{ und } \pi(i) > \pi(j)\}$$

die Menge der Fehlstände der Permutation ist.

Ist das Vorzeichen von π gleich $+1$, nennt man die Permutation gerade, ist $\text{sgn } \pi = -1$, dann heisst π ungerade.

Beispiel 1: Die Fehlstände der Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

sind $(2, 1)$, $(4, 3)$ und $(5, 3)$, somit ist $\text{sgn } (\pi) = (-1)^3 = -1$ und damit ist π ungerade.

Beispiel 2: Die identische Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

ist immer gerade, denn sie weist keine Fehlstände auf.

Beispiel 3: Permutationen von S_3

Permutation	Fehlstände	Vorzeichen
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	–	+1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	(3, 2)	–1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	(2, 1)	–1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	(2, 1), (3, 1)	+1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	(3, 1), (3, 2)	+1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	(3, 2), (3, 1), (2, 1)	–1

Anwendung: Im Jahre 1880 erfand der amerikanische Postbeamte Noyes Palmer Chapman folgendes Rätsel:

In einer quadratischen Schachtel liegen Spielsteine mit den Zahlen 1 – 15. Ein Feld (schwarz) ist frei. Ein (vertikal oder horizontal) benachbarter Spielstein kann jeweils in das freie Feld hineingeschoben werden.

Nun werden die Steine 14 und 15 vertauscht (Bild links). Ziel ist es, die ursprüngliche Anordnung der Spielsteine (Bild rechts) wiederherzustellen.

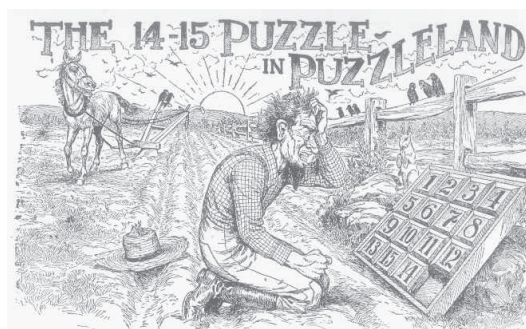
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

die Steine 14 und 15 sind vertauscht

ursprüngliche Anordnung

Der erste Preis von 1000 Dollar, der für die richtige Lösung ausgeschrieben war, wurde nie vergeben, obgleich Tausende von Leuten behaupteten, die gestellte Aufgabe gelöst zu haben. Das erstaunt nicht, denn das Rätsel ist unlösbar!



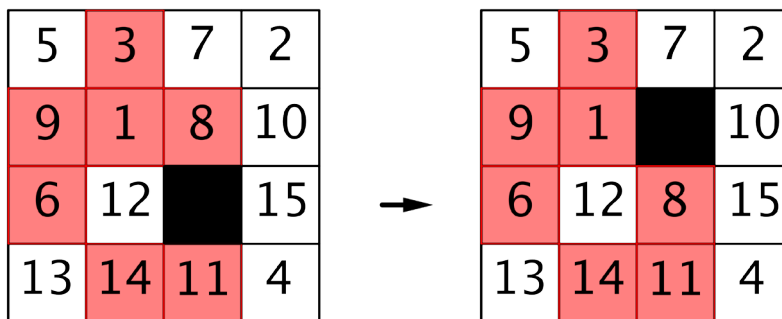
Zum Beweis übersetzt man eine Anordnung der Spielsteine in eine Permutation π (das leere Feld wird einfach ignoriert) und betrachtet dann die Summe

$$N = |\text{inv}(\pi)| + n$$

wobei $|\text{inv}(\pi)| =$ die Anzahl der Fehlstände der Permutation und $n =$ die Zeile des leeren Feldes ist.

Mittels Fallunterscheidung ist leicht einzusehen, dass die Parität von N bei jedem erlaubten Zug invariant bleibt. Wird ein Spielstein horizontal verschoben, ändert weder die Permutation noch die Zeile, in der sich das leere Feld befindet. Wird ein Spielstein vertikal verschoben, dann ändert die Zeile des leeren Feldes um ± 1 , bei der Permutation gibt es immer genau drei Zahlenpaare, bei denen der Zustand von 'kein Fehlstand' zu 'Fehlstand' oder von 'Fehlstand' zu 'kein Fehlstand' ändert.

Beispiel:



Ein möglicher Zug: Spielstein 8 wird senkrecht nach unten geschoben.

Der Stellung links entspricht die Permutation

$$\pi_1 = \left(\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 5 & 3 & 7 & 2 & 9 & 1 & 8 & 10 & 6 & 12 & 15 & 13 & 14 & 11 & 4 \end{array} \right)$$

π_1 hat 31 Fehlstände. Das schwarze Feld ist in der Zeile 3, also ist $N_1 = 31 + 3 = 34$.

Der Stellung rechts entspricht die Permutation

$$\pi_2 = \left(\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 5 & 3 & 7 & 2 & 9 & 1 & 10 & 6 & 12 & 8 & 15 & 13 & 14 & 11 & 4 \end{array} \right)$$

π_2 hat 32 Fehlstände. Das schwarze Feld ist in der Zeile 2, also ist $N_2 = 32 + 2 = 34$.

Vergleicht man π_1 mit π_2 , dann wird aus $(8, 10)$ der Fehlstand $(10, 8)$, aus dem Fehlstand $(8, 6)$ wird $(6, 8)$ und aus $(8, 12)$ wird der Fehlstand $(12, 8)$. Bei allen anderen Zahlenpaaren ändert sich nichts.

Die Paritäten von N_1 und N_2 sind folglich gleich. (In unserem Beispiel sind ausnahmsweise sogar die Summen selber gleich.)

6 Die 'Russische' Bauernmultiplikation

Die Russische Bauernmultiplikation (auch Ägyptisches Multiplizieren, Abessinische Bauernregel oder Verdopplungs-Halbierungs-Methode genannt) ist ein einfaches Verfahren zur Multiplikation zweier natürlicher Zahlen. Schon im Altertum bekannt, war das Verfahren in Deutschland bis ins Mittelalter und in Russland bis weit in die Neuzeit üblich, woher auch der Name rührt.

Beispiel: Wir möchten das Produkt $178 \cdot 113$ berechnen.

Den ersten Faktor 178 teilen wir fortgesetzt durch 2. Geht es nicht auf, dann runden wir ab. (Siehe Spalte links im Bild 1)

Den zweiten Faktor 113 verdoppeln wir fortgesetzt. (Siehe Spalte rechts im Bild 1).

178	x	113
89	x	226
44	x	452
22	x	904
11	x	1808
5	x	3616
2	x	7232
1	x	14464

Bild 1

89	x	226
11	x	1808
5	x	3616
1	x	14464
Produkt =		20114

Bild 2

Nun streichen wir Zeilen, bei denen die linke Zahl gerade ist (siehe Bild 2).

Das Produkt von 178 und 113 ergibt sich dann als Summe der verbleibenden Zahlen in der Spalte rechts in Bild 2:

$$178 \cdot 113 = 226 + 1808 + 3616 + 14'464 = 20'114$$

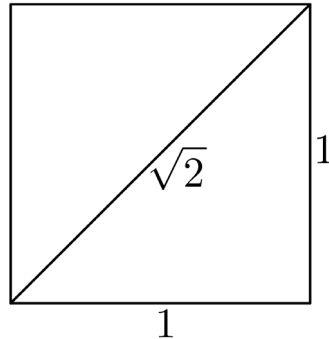
Die russische Bauernmultiplikation kann durch Zerlegung des einen Faktors in Zweierpotenzen nachvollzogen werden:

$$\begin{aligned} 178 \cdot 113 &= (0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7) \cdot 113 \\ &= 2^1 \cdot 113 + 2^4 \cdot 113 + 2^5 \cdot 113 + 2^7 \cdot 113 \\ &= 226 + 1808 + 3616 + 14'464 = 20'114 \end{aligned}$$

Die Summanden, die den Faktor Null enthalten, entsprechen den Zeilen, die gestrichen werden.

7 Irrationalität von $\sqrt{2}$

Satz: $\sqrt{2}$ ist irrational.



Beweis: Gegenannahme: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ für natürliche Zahlen p und q .

Wir können annehmen, dass der Bruch $\frac{p}{q}$ schon gekürzt ist.

Es wird $2 = \frac{p^2}{q^2} \implies p^2 = 2q^2$. Also ist p^2 eine gerade Zahl und damit ist auch p eine gerade Zahl.

(Wäre $p = 2k - 1$ ungerade, dann auch $p^2 = (2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1$.)

Mit $p = 2k$ wird $p^2 = 4k^2$ und damit $p^2 = 4k^2 = 2q^2$ oder $q^2 = 2k^2$. Also ist q^2 gerade und damit auch q gerade.

Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme, dass der Bruch $\frac{p}{q}$ schon gekürzt ist. □

8 Der Satz von Euler-Poincaré für d -dimensionale Polytope

Unter einem d -Polytop verstehen wir ein verallgemeinertes Polygon der Dimension d .

Ein 0-Polytop ist eine einzelne Ecke (ein Punkt);

ein 1-Polytop besteht aus zwei Ecken, die durch eine Kante verbunden sind;

ein 2-Polytop besteht aus mehreren, jeweils an einer Ecke verbundenen, einen Zyklus bildenden 1-Polytopen und stellt somit ein Polygon dar;

ein 3-Polytop besteht wiederum aus mehreren an den Kanten verbundenen 2-Polytopen und stellt somit ein Polyeder dar.

Allgemein wird ein d -Polytop gebildet aus mehreren $(d - 1)$ -Polytopen, die untereinander jeweils ein $(d - 2)$ -Polytop gemeinsam haben können (wie die gemeinsame Ecke zweier Kanten oder die gemeinsame Kante zweier Flächen).

Des Weiteren müssen alle $(d - 2)$ -Unterpolytope in genau zwei $(d - 1)$ -Polytopen enthalten sein, und zwischen zwei $(d - 1)$ -Unterpolytopen muss eine Reihe von $(d - 1)$ -Unterpolytopen existieren, so dass jeweils zwei benachbarte Glieder auf die zuvor beschriebene Weise verbunden sind – so bilden etwa nach dieser Definition mehrere disjunkte Polygone zusammen kein 2-Polytop.

Satz (Euler-Poincaré): Für ein d -Polytop P bezeichnen wir mit $f_i(P)$ die Anzahl der i -dimensionalen Seitenflächen. Dann gilt für die Euler-Charakteristik von P :

$$\chi(P) = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i f_i(P) = 1 - (-1)^d$$

resp.

$$\chi(P) = f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) - f_3(P) + \dots \pm \dots - f_{d-1}(P) = 0 \text{ für } d \text{ gerade}$$

$$\chi(P) = f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) - f_3(P) + \dots \mp \dots + f_{d-1}(P) = 2 \text{ für } d \text{ ungerade}$$

Beispiele:

1. $d = 0$: Es gibt gar keine $(d - 1)$ -dimensionalen Seitenflächen. Also ist

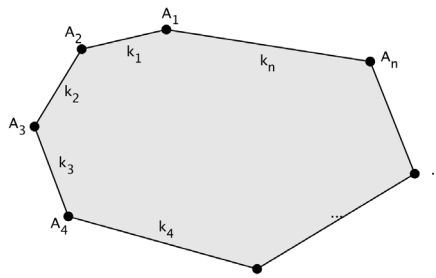
$$\chi(P) = \sum_{i=0}^{-1} (-1)^i f_i(P) = 1 - (-1)^0 = 0$$

2. Ein 1-Polytop ist eine Strecke mit zwei Endpunkten. Also ist

$$\chi(P) = \sum_{i=0}^0 (-1)^i f_i(P) = f_0(P) = 1 - (-1)^1 = 2$$

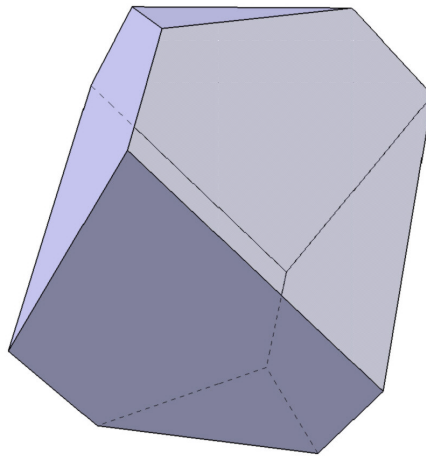
3. Ein 2-Polytop ist Vieleck mit n Ecken und n Kanten. Also ist

$$\chi(P) = \sum_{i=0}^1 (-1)^i f_i(P) = f_0(P) - f_1(P) = n - n = 1 - (-1)^2 = 0$$



4. Ein 3-Polytop ist ein Polyeder mit e Ecken, k Kanten und f Seitenflächen. Nach der berühmten Eulerschen Polyederformel gilt:

$$\chi(P) = \sum_{i=0}^2 (-1)^i f_i(P) = f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) = e - k + f = 1 - (-1)^3 = 2$$



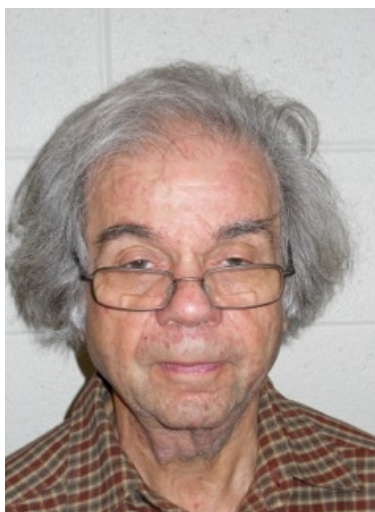
Das Dürer-Polyeder

9 Der Satz von Monsky

Frage: Kann man das Einheitsquadrat in n Dreiecke der Fläche $\frac{1}{n}$ zerlegen?

Antwort: Das hängt von der Parität von n ab!

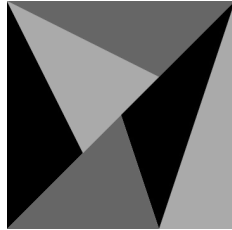
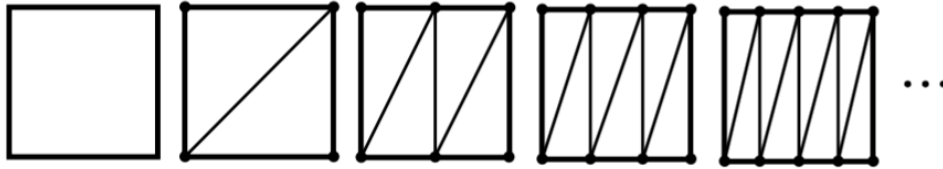
Satz (Paul Monsky, 1970): Es ist nicht möglich, ein Quadrat in eine ungerade Anzahl von Dreiecken gleicher Fläche zu zerlegen.



Paul Monsky (1936 -)

Bemerkungen:

1. In Frankreich ist dieser Satz unter "Même aire $\implies n$ pair!" bekannt.
2. Es ist natürlich möglich, ein Quadrat in eine gerade Anzahl flächengleicher Dreiecke zu zerlegen.



Dieses Quadrat ist in sechs flächengleiche Dreiecke zerlegt.

3. Für den Beweis des Satzes hat Monsky neben Bewertungstheorie auch das Lemma von Sperner verwendet! Siehe zum Beispiel

https://en.wikipedia.org/wiki/Monsky%27s_theorem

10 Der "Igelsatz"

Satz von Poincaré-Brouwer: Auf einer Sphäre S^n gibt es genau dann ein tangenciales, stetiges, nirgends verschwindendes Vektorfeld, wenn n ungerade ist.

Bemerkungen:

1. Für S^2 (Kugeloberfläche) gibt es sehr anschauliche Formulierungen des Satzes:

"Jeder stetig gekämmte Igel hat mindestens einen Glatzpunkt!"

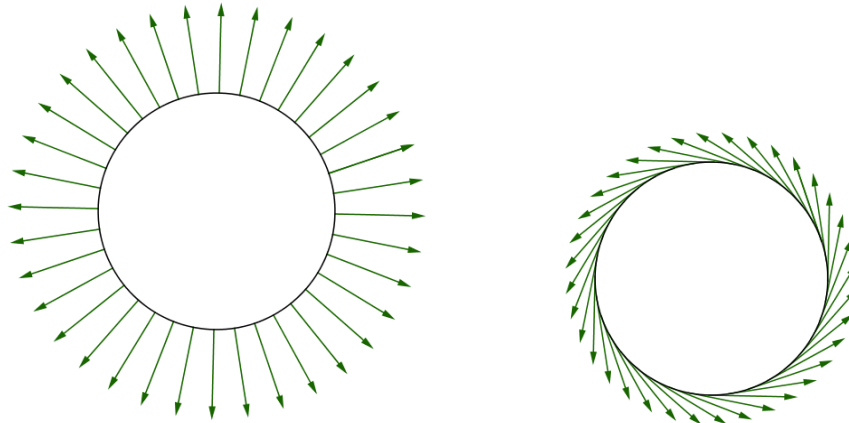
oder

"Ein Igel lässt sich nicht kämmen!"

Es ist nicht möglich, die senkrecht nach oben stehenden Stachel des Igels überall glatt (tangential an den Igel) zu "kämmen".

Interpretiert man den Satz im physikalischen Sinne, so kann prinzipiell nicht überall auf der Erde zugleich Wind wehen – es muss auf der Oberfläche eines dreidimensionalen kugelförmigen Planeten immer windstille Stellen geben.

2. \mathbb{S}^1 (Kreislinie) besitzt ein tangenciales, stetiges, nirgends verschwindendes Vektorfeld! Im Bild links stehen die "Haare" noch senkrecht nach oben. Im Bild rechts ist die Kreislinie "gekämmt".



3. John Milnor hat 1978 einen elementaren analytischen Beweis des "Igelsatzes" gegeben und dabei zugleich gezeigt, dass der Brouwersche Fixpunktsatz (siehe Kapitel 2) direkt auf ihn zurückgeführt werden kann.

Siehe auch

Ian Stewart, *Die gekämmte Kugel: 17 mathematische Kurzgeschichten aus Spektrum der Wissenschaft*, Gebundene Ausgabe 1997, ISBN-13: 978-3827400901

11 Zu guter Letzt: "Sie liebt mich - sie liebt mich nicht"!?

In einer Kurzgeschichte von Ian Stewart

(siehe <https://www.spektrum.de/magazin/sie-liebt-mich-sie-liebt-mich-nicht/823037>)

wird behauptet, dass eine bestimmte Art Gänseblümchen immer 34 Blütenblätter hat.

Stimmt diese Behauptung, dann lässt sich durch Betrachten der Parität der Anzahl Blütenblätter dem 'Zufall' bei diesem Entscheidungsverfahren doch sehr gezielt nachhelfen!

Mathe-Camp DATCH 2018 in Quarten

Eindrücke des CH-Teilnehmers Eric Wermelinger (Villmergen)

DATCH klingt für manche etwas speziell, ist aber nichts anderes als die Aneinanderreihung der Abkürzungen der deutschsprachigen Länder Deutschland, Österreich und Schweiz (D, AT, CH). Der Verein Känguru Schweiz organisiert jährlich das DATCH-Treffen für die jeweils besten drei Teilnehmerinnen und Teilnehmer des Känguruwettbewerbs der 7. und 8. Klassen jedes Landes. Das Ziel ist es, dass sich mathematisch interessierte und begabte Jugendliche über die Landesgrenzen hinweg kennenlernen und sich in einem spielerischen Länderwettkampf messen. Dieses Jahr fand das Treffen vom 21. bis 24. Juni in der Schweiz in Quarten oberhalb des Walensees statt.



Donnerstag:

Nachdem sich das Schweizer Team in Zürich getroffen hatte, reiste es als Delegation in das Bildungszentrum Neu-Schönstatt oberhalb des strahlend blauen Walensees in Quarten. Auf der verhältnismässig kurzen Fahrt lernte sich das Team bereits gut kennen. Als die Teilnehmer der anderen Länder ebenfalls eingetroffen waren, bezog man die Zimmer und es folgte eine offizielle Begrüssung. Nach dem Nachtessen, bei dem wir kulinarisch verwöhnt wurden, ging es Schlag auf Schlag bereits los mit dem ersten von insgesamt drei Wettkämpfen: dem Speedwettbewerb. In ausgelosten Dreier-Teams waren insgesamt 30 Multiple-Choice-Aufgaben zu lösen. Das Schwierige dabei war, wie der Name schon verrät, die Balance zwischen Tempo und richtigen Antworten zu finden. Nach dem ersten Wettkampftag lag Deutschland in Führung vor Österreich, die Schweiz in Lauerstellung.

Freitag:

Am Morgen direkt nach dem feinen Frühstück stand der Einzelwettbewerb auf dem Programm. In diesem musste jeder Teilnehmer 7 knifflige Aufgaben bearbeiten und diese sauber mit vollständigem Lösungsweg und Begründung abgeben. Erst dann konnte man die volle Punktzahl einstreichen.



Nach dem Mittagessen ging es auf eine spektakuläre Wanderung in die Taminaschlucht. Mit dem Postauto wurden wir bis zum Restaurant gefahren, danach ging es zu Fuss in den Berg und die Schlucht hinein. Anschliessend gab es die fakultative Möglichkeit, nach Bad Ragaz zurückzuwandern. Am Bahnhof hatten wir noch Zeit für ein feines Eis. Am Abend folgte nach dem Nachtessen der Match der Schweiz gegen Serbien, den wir gebannt verfolgten. Und bei diesem spannenden Spiel kamen selbst die Fussballmuffel auf ihre Kosten!

Samstag:

Am Morgen begannen wir nach dem Frühstück mit dem Gruppenwettbewerb. Man musste als Team 4 von 7 schwierigen und aufwändigen Aufgaben auswählen, diese lösen und wiederum vollständig, also mit Lösungsweg und Begründung, abgeben. Zudem musste jedes Team eine zusätzlich gelöste Aufgabe vor den anderen Ländern und der internationalen Jury präsentieren. Hier wurde vom österreichischem Team eine sehr kreative Präsentation geboten, mit der unser östlicher Nachbar gut punkten konnte.



Nach dem leckeren Mittagessen stand ein interessanter Besuch im Schloss Sargans auf dem Programm. Vom Bahnhof Sargans führte der Weg auf den Schlossberg hoch, wo eine spannende Führung folgte, die uns viele neue Einblicke gewährte. Nach der Fotosession ging es dann wieder zurück in unsere Unterkunft. Dort fand dann das spannende und aufregende Rangverlesen statt. Deutschland gewann das DATCH-Treffen 2018 souverän vor Österreich und der Schweiz. Anschliessend stand der Grillabend an, und wir liessen den Tag gemeinsam mit Spielen ausklingen.

Sonntag:

Am Morgen packten die Teilnehmer die Koffer, verabschiedeten sich voneinander und reisten in den Delegationen zurück. Es war ein tolles Lager voller Freude und Spass für die Teilnehmer und Betreuer. Wir hatten viel gelernt und konnten tolle Freundschaften knüpfen.

Vielen Dank den Sponsoren Verein Känguru Schweiz, Mensa Stiftung für Hochbegabte und ETH Zürich für die finanzielle Unterstützung. Ein herzliches Dankeschön auch an die Betreuer für ihr grosses Engagement. Ohne ihren grossen Einsatz wäre es nicht möglich gewesen, ein DATCH-Treffen durchzuführen. Ebenfalls ein grosses Dankeschön an das Bildungszentrum Neu-Schönstatt für die tollen vier Tage, die wir dort verweilen durften.



Nähere Hinweise zu den DATCH-Treffen sind hier zu finden: <http://www.mathe-kaenguru.ch>

CH-Leitung 2018: L. Florez, D. Nikolenkov, C. Pohle & Hj. Stocker

Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht Programm Herbstsemester 2018

Die Vorträge finden jeweils am Donnerstag um 17.15 Uhr im Hörsaal HG G 3 des Hauptgebäudes der ETH Zürich statt. Abgeschlossen werden die Veranstaltungen mit einem Apéro im HG G 69 (D-MATH Common Room).

Donnerstag, 25. Oktober 2018:

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Gerichtssaal

Raj Spielmann, Gymnasium Kirchenfeld

Abstract: Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist im Gerichtssaal allgegenwärtig, denn nicht in jedem Fall sind schlagende Beweise vorhanden. Egal, ob in Zahlen oder als "Gewissheit" umschrieben, müssen Richter und Geschworene dann ihre Überzeugung zur Schuld oder Unschuld als Wahrscheinlichkeit formulieren. Eine Reihe von offensichtlichen Justizirrtümern weist auf typische Fehler hin, die in der Interpretation von Zahlen oder im verwendeten Modell liegen. Einige von ihnen, darunter der Mordprozess gegen den Footballprofi O.J. Simpson sowie der Prozess gegen Sally Clark wegen doppeltem Kindsmord, sollen hier analysiert werden. Zunehmende Bedeutung kommt den Ergebnissen der DNA-Analyse zu. Es lässt sich sowohl theoretisch als auch praktisch nachweisen, dass die Datensätze bei der Spurenanalyse realer Verbrechen keine eindeutige Identifizierung von Personen erlauben. Diese Tatsache entspricht dem klassischen Geburtstagsparadoxon und wird deshalb als Geburtstagsparadoxon in der Datenbank bezeichnet. Damit wird klar, dass die Aufklärung von Verbrechen durch sogenannte Cold Hits mit Skepsis betrachtet werden sollte. Weiter wird das "Racial Profiling" – eine auch in der Schweiz praktizierte präventive Beobachtung von ethnischen oder religiösen Minderheiten bei der Verbrechensbekämpfung - aus Sicht der Wahrscheinlichkeitsrechnung kritisiert. Ein Ziel des Vortrags ist eine Brücke zwischen Mathematik, Biologie und Geisteswissenschaften. Durch die Beleuchtung bekannter Grundbegriffe und Konzepte der Wahrscheinlichkeitsrechnung in einem neuen Kontext erhalten diese mehr Anschaulichkeit. Zugleich wird deutlich, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung auch für Juristen und Sozialwissenschaftler unverzichtbar ist.

Donnerstag, 8. November 2018:

Productive Failure in Learning Math

Manu Kapur, ETH Zürich

Abstract: It is rather intuitive and compelling to assert that we learn from our mistakes, errors, and failures. However, if it is so, why do we wait for failure to happen? If failure is a powerful mechanism for learning, why don't we deliberately design for it? In my talk, I will briefly describe what deliberately designing for failure entails, and articulate key findings from my program of research on Productive Failure in mathematical cognition and learning. Through actual student-generated examples of failure-based learning in

mathematical cognition, I will argue how and why Productive Failure affords the development of not only deep knowledge, but also critical domain-general competencies such as persistence, resilience, motivation, and overall productive mindsets towards learning and being. I will end by discussing implications for the design of teaching and learning.

Donnerstag, 22. November 2018:

Sums of squares

Özlem Imamoglu, ETH Zürich

Abstract: Clearly not every integer is a square, even sum of two or three squares. On the other hand a famous theorem of Lagrange says that every positive integer is a sum of four squares. In this talk we will explore some questions related to sums of squares.

Donnerstag, 6. Dezember 2018:

Vom Newton-Verfahren zu Gruppengesetzen auf Kegelschnitte

Franz Lemmermeyer, Gymnasium St. Gertrudis

Abstract: Hinter dem Newton-Verfahren für Funktionen wie Parabeln oder Hyperbeln steckt ein Gruppengesetz, das sich relativ einfach verstehen lässt. Derartige Gruppengesetze existieren auf beliebigen Kegelschnitten und ähneln der Addition von Punkten auf elliptischen Kurven; allerdings existieren im Falle von Kegelschnitten nur drei wesentlich verschiedene Gruppengesetze. Dennoch lassen sich damit Lösungen einer Pellschen Gleichung ebenso verknüpfen wie pythagoreische Tripel. Am Schluss werden wir auf eines der berühmtesten Probleme der Internationalen Mathematik-Olympiade (aus dem Jahre 1988) eingehen.

Herzlich laden ein: N. Hungerbühler, J. Hromkovič, M. Akveld, H. Klemenz

Albert Fässler

„Schnelleinstieg Differentialgleichungen“

174 Seiten, Springer-Verlag GmbH Deutschland, 2018

Softcover CHF 21.00, ISBN 978-3-662-55738-9

ebook CHF 16.50, ISBN 978-3-662-55739-6

von Daniela Grawehr

Kollegi Schwyz und Institut für Erziehungswissenschaften der Universität Zürich
grawehr@kfanet.ch



Differentialgleichungen gehören im gymnasialen Mathematikunterricht zumindest im Ergänzungs- und Schwerpunktfach zum Standard-Curriculum. Seit der Veröffentlichung des *Kanons Mathematik* (<http://www.math.ch/kanon/>) sollten sich die Gymnasial-Lehrpersonen Gedanken machen, wie und in welchem Umfang Differentialgleichungen auch im Grundlagenfach thematisiert werden sollen, denn im *Kanon* sind unter Analysis „Differentialgleichungen und Modellieren“ aufgeführt.

Der Zugang von Fässler zur Thematik ist denn auch der Weg, der im *Kanon* skizziert ist. Fässler schreibt im Vorwort, dass er inhaltlich weitgehend auf komplexe Lösungsverfahren verzichtet, insbesondere „bei aufwendigeren Problemen“ hat er „mit Nachdruck Wert darauf gelegt, die Richtigkeit von vorgegebenen Lösungen durch Differenzieren und Einsetzen nachzuweisen.“ (Fässler, S. VI) Sein Schwerpunkt liegt auf „einer abwechslungsreichen Palette von Anwendungen aus verschiedenen Gebieten“ (Fässler, S. VI). Die Anwendungsaufgaben werden bei einfachen Lösungsmethoden algebraisch, bei komplexeren numerisch mit Hilfe von „Mathematica“ gelöst (Mathematica wird hauptsächlich bei numerischen Methoden und Vektorfeldern eingesetzt, mit Beispielcode).¹

Das Buch beginnt mit einem Kapitel „Benötigte analytische Vorkenntnisse“, das im Stil Definition-Satz-Beweis gehalten ist, und geht aus meiner Erfahrung als Lehrperson über das hinaus, was man einem Gymnasiasten eins-zu-eins vorsetzen würde. Allerdings sind auch in diesem Kapitel vielfältige Beispiele zu finden, die beim Vorbereiten einer Unterrichtssequenz inspirierend sein werden. Besonders gut gefallen hat mir hier das Beispiel 1.3.4 Optimales Stoppen:

„Eine Touristin, die eine Rheinschiffahrt genießt, weiß nur, dass entlang der Reiseroute insgesamt 20 Schlösser mit Übernachtungsmöglichkeiten vom Schiff angefahren werden. Ihr Wunsch ist es, möglichst im schönsten Schloss zu logieren. Sie weiß aber nicht, an welcher Anlegestelle es liegt und wie es heißt. Beim Anblick eines Schlosses muss sie jeweils sofort entscheiden, ob sie dort übernachten will oder nicht. Es gibt für sie kein Zurück zu schon passiertten Schlössern.

Frage: Welche Strategie soll sie befolgen, damit die Erfolgswahrscheinlichkeit möglichst groß ist?“
(Fässler, S. 17)

Ab Kapitel 2 geht es dann um Differentialgleichungen und hier wechselt der Stil. Fässler verzichtet „auf längere und oft mühsame technische Beweise von Existenzsätzen“ und setzt den Fokus auf Anwendungen und die „Kenntnis des Inhalts solcher Theoreme“ (Fässler, S. VI). Er illustriert zum Beispiel, was eine Differentialgleichung ist, in dem er zum einen durch Einsetzen die Lösung eines Beispiels überprüft und zum anderen mit Hilfe von Richtungsfeldern graphisch Lösungen generiert. Im Buch werden Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung sowie Systeme von Differentialgleichungen behandelt. Was Lösungsmethoden betrifft, wird bei homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung die Methode der Separation der Variablen eingeführt. Bei den inhomogenen Differentialgleichungen erster Ordnung wählt er

¹Ich hätte es aus Sicht einer Lehrperson am Gymnasium begrüsst, wenn der Autor anstatt Mathematica zu wählen, eine offene Software, wie z.B. Sage oder Octave benutzt hätte, da vermutlich an den wenigsten Schulen Mathematica als Software für die Lernenden zur Verfügung gestellt wird. Die Übersetzung der Befehle in die jeweilig gewählte Software sollte aber leicht fallen.

als Methode nicht die Methode der Variation der Konstanten (wird im Buch nicht behandelt), sondern die Methode des sogenannten integrierenden Faktors, die ich bisher nur beim Korrigieren einer Maturaprüfung im Ergänzungsfach als Lösungsmethode bei einer Schülerin gesehen habe und versucht hatte, sie zu verstehen. Hier habe ich endlich den Schlüssel dazu gefunden. Ein eigenes Kapitel ist den numerischen Verfahren gewidmet.

Bei den vielfältigen Beispielen werden zwar die verschiedenen Wachstums-Typen benannt, aber nicht konkret als mögliche Modelle, aus denen man auswählen kann, systematisiert. Hier liegt meiner Ansicht nach die einzige Schwäche des Buchs, denn - auch wenn ausgiebig modelliert wird - so doch immer mit einem physikalischen Modell im Hintergrund, das eine geeignete Wahl der Parameter liefert. Es fehlen mir Beispiele, bei denen aus Datensätzen heraus versucht wird, eine Prognose für die Zukunft zu erstellen, bei denen die Wahl der Parameter sehr offen ist, um zu thematisieren, dass Prognosen mit Hilfe von mathematischen Modellen nicht immer unproblematisch sind und oft auch auf Annahmen beruhen. Ich hatte einmal die Gelegenheit in einem Beratungsunternehmen zu arbeiten, wo es hauptsächlich meine Aufgabe war, grosse Datenmengen zu analysieren und anschliessend mit mathematischen Modellen Prognosen zu erstellen, die oft auf zwar logisch sinnvollen, aber sehr wagen Vermutungen beruhen.²

Trotzdem möchte ich dem Autor gratulieren für seine gelungene Auswahl und Vielfältigkeit der Beispiele und Aufgaben – Ökonomie, Physik, Kosmologie, Medizin, Sport, globale Erwärmung, ... - eine Fundgrube, die jeder Lehrperson genügend Ideen für Ihre Unterrichtsvorbereitung liefert, oder wo man das Buch auch direkt als Unterrichtsmaterial einsetzen kann.

Die im Buch vorhandenen Lösungen zu den Aufgaben sind - zumindest für Lehrpersonen - ausreichend detailliert, um den Lösungsweg nachzuvollziehen zu können. Zu den anspruchsvolleren Denkaufgaben, die meistens in einer Art Projektauftrag formuliert sind, erhält man in den Lösungen einen Hinweis, welchen Weg man am besten einschlägt.

Sehr gut gefallen haben mir die immer wieder vorhandenen historischen Anmerkungen oder Bemerkungen zu Realitätsnähe von im Buch vorgestellten Lösungsmodellen, oder wenn im Kapitel über numerische Methoden auch thematisiert wird, worin Vor- und Nachteile dieser Lösungsverfahren liegen. Sehr gelungen finde ich das Beispiel des Fallschirmabsprungs (Fässler, S. 147), wo zuerst analytisch an das Problem herangegangen wird, anschliessend die Realitätsnähe der Lösung geprüft wird (Problem: Was passiert um den Zeitpunkt des Öffnens des Fallschirms?) und dann mit numerischen Methoden das Modell verbessert wird.

Die Einschätzung des Autors über den Interessentenkreis der Leser seines Buches finde ich treffend. Er schreibt, dass es für „mathematisch-naturwissenschaftlich motivierte Schüler gegen Ende der Sekundarstufe II (Gymnasien, Kantonsschulen)“ (Fässler, S. VI), aber hauptsächlich für Studierende oder Dozierende von Interesse ist. Es ist sicher für die Vorbereitung des Unterrichts über Differentialgleichungen sehr hilfreich und bietet viele gute Ideen, die in einen interessanten Unterricht über Differentialgleichungen einfließen können, welcher auf das Verständnis der Thematik Wert legt und nicht nur auf Fertigkeiten bei Lösungsmethoden. In einem Schwerpunkt oder Ergänzungsfach könnte ich mir sogar vorstellen, dass Buch anzuschaffen und ausschnittsweise als Unterrichtsmaterial einzusetzen. Die selbst gemachte Vorgabe von Fässler, den Fokus beim Thema Differentialgleichungen weg von den Lösungsverfahren und hin zum Modellieren zu setzen, finde ich äusserst gelungen umgesetzt. Meiner Ansicht nach sollte dieses Buch in die Bibliothek jeder Mathematiklehrperson gehören.

²Sehr gelungen finde ich zu diesem Thema im Buch „Neue Wege der Mathematik“ die Aufgabe zum Piotrowski-Gesetz (Sprachwandel, logistisches Wachstumsmodell), welche ich bei meinem letzten Schwerpunktfach mit Hilfe von Geogebra habe bearbeiten lassen. Bei diesem Beispiel sieht man deutlich, dass je nach Datenlage die Wahl der Parameter schwierig ist, weil bei logistischen Wachstums-Prozessen, die den Wendepunkt noch nicht überschritten haben, eine Vorhersage eher problematisch ist.

Eine Maximumaufgabe

Christian Blatter, ETHZ, christian.blatter@math.ethz.ch

1. Einleitung

Im Sommer 2017 ist in einem Mathematikforum [2] die folgende Aufgabe über den Bildschirm gegangen: Wir sollen einem gegebenen Dreieck T ein möglichst grosses gleichseitiges Dreieck Δ einbeschreiben. Der Einsender hat auf die Arbeit [1] verwiesen, wo anstelle eines Dreiecks T ein beliebiges konvexes n -Eck ($n \gg 1$) gegeben ist. Er schlug vor, den Fall $n = 3$ “elementargeometrisch” zu behandeln, das heisst: ohne den in [1] dargestellten $O(n^3)$ -Algorithmus anzuwerfen. Keine der in dem Forum vorgeschlagenen Lösungen vermochte allerdings recht zu befriedigen, und so müssen sich nun die Leser des VSMP-Bulletins mit dem Problem herumschlagen.

Mit Δ ist im folgenden immer ein gleichseitiges Dreieck gemeint, und “einbeschreiben” bedeutet nur $\Delta \subset T$. Im Grunde genommen sind das unendlich viele Maximumaufgaben, denn die möglichen Gestalten von T bilden eine zweiparametrische Familie Ω . Wir müssen daher von vorneherein damit rechnen, dass sich das maximale $\Delta \subset T$ nicht nur “zahlenmässig” mit den Winkeln von T verändert, sondern dass die Extreimalsituation für verschiedene T ganz verschieden aussehen kann. Und bei der Wahl von Δ haben wir vier Freiheitsgrade: Wir können Δ beliebig verschieben, drehen und skalieren. Jedenfalls ist der sich ergebende Suchraum X ein komplexes geometrisches Gebilde, das wir nicht mit einem Blick global erfassen können wie ein Intervall $[a, b]$ oder eine Kreislinie.

2. Maximalaufgaben – allgemein

Nur bei den wenigsten Maximalaufgaben können wir den Maximalpunkt ξ erraten oder “herausarbeiten” und dann direkt beweisen, dass $f(\xi) \geq f(x)$ gilt für alle zulässigen x . Das ist zum Beispiel der Fall bei quadratischen Polynomen, wo quadratische Ergänzung weiter hilft, oder bei $f(x) := 3 \cos x + 4 \sin x$, wo trigonometrische Umformung eine Darstellung der Form $f(x) = A \cos(x - \alpha)$ liefert, an der sich das Maximum ohne Weiteres ablesen lässt.

Die allermeisten Maximumaufgaben werden mit Hilfe eines *Ausschlussverfahrens* gelöst. Vorweg überzeugt man sich (oder nimmt als selbstverständlich an), dass ein Maximalpunkt ξ tatsächlich existiert. Im Fall unseres Dreiecksproblems wird man darauf hinweisen, dass der Suchraum X bei gegebenem T kompakt und die Zielfunktion stetig ist. Im zweiten Schritt werden einfache Kriterien identifiziert, mit deren Hilfe die allermeisten Punkte $\xi \in X$ als Maximalpunkte ausgeschlossen werden können. Es bleibt eine (hoffentlich endliche) *Kandidatenliste* übrig. Welche Kandidatenpunkte dann tatsächlich globale Maximalpunkte sind, wird durch einen Wertvergleich unter den Kandidaten ermittelt. Zwei Beispiele:

- Gegeben ist eine Kreisscheibe B . Man bestimme ein einbeschriebenes Dreieck T von maximalem Flächeninhalt. – Dreiecke mit zwei verschiedenen langen Seiten sind nicht maximal, denn es gibt gleichschenklige Dreiecke mit grösserer Fläche. Die maximalen Dreiecke sind somit die gleichseitigen Dreiecke mit Umkreis ∂B . (Es ist übrigens gar nicht so einfach, elementargeometrisch zu beweisen, dass so ein gleichseitiges Dreieck tatsächlich grösseren Flächeninhalt hat als irgend ein anderes Dreieck $T \subset B$.)
- Es soll das Maximum der differenzierbaren Funktion $x \mapsto f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ bestimmt werden. – Innere Punkte $\xi \in [a, b]$, in denen $f'(\xi) \neq 0$ ist, kommen als Maximalpunkte nicht in Frage,

denn $x \mapsto f(x) - f(\xi)$ nimmt unmittelbar links oder rechts von so einem Punkt ξ positive Werte an. Die Kandidatenliste besteht daher aus den Punkten a und b sowie den $r \geq 0$ Nullstellen ξ_k der Ableitung f' in (a, b) , und man hat

$$\max_{a \leq x \leq b} f(x) = \max\{f(a), f(b), f(\xi_1), \dots, f(\xi_r)\} .$$

3. Das Ausschlusskriterium

Nun zu unserem eigentlichen Problem. Ein gleichseitiges Dreieck $\Delta \subset T$ ist bestimmt nicht maximal, wenn Δ nicht irgendwie ‘am Anschlag’ ist. Liegen zum Beispiel zwei Ecken von Δ im Inneren von T , so lässt sich Δ ohne Weiteres vergrößern. Diese Vorstellung gilt es nun in ein allgemeines Prinzip zu verwandeln. Sind V_i die Ecken von Δ und a_j die Seiten von T , so nennen wir jede Inzidenz $V_i \in a_j$ einen *Anschlag* von Δ . Fällt eine Ecke V_i von Δ mit einer Ecke von T zusammen, so ergibt das zwei Anschläge. Für unser Problem ist nun das Folgende entscheidend:

Lemma 1. Ist $\Delta \subset T$ maximal, so besitzt Δ mindestens vier Anschläge.

Beweis. Gleichseitige $\Delta \subset T$ mit ≤ 2 Anschlägen zu vergrößern dürfen wir dem Leser überlassen. Besitzt Δ genau drei Anschläge, so sind folgende Fälle möglich:

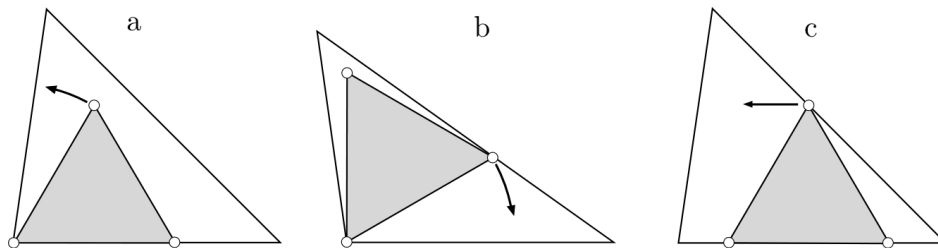


Fig. 1

- Die Ecke V_1 von Δ fällt mit der Ecke A_1 von T zusammen, V_2 liegt auf einer Seite von T und V_3 im Inneren von T (Fig. 1, a–b). Dann lässt sich Δ ein wenig um die Ecke $V_1 = A_1$ drehen, so dass beide Ecken V_2, V_3 ins Innere von T zu liegen kommen.
- Die Ecken V_1 und V_2 von Δ liegen auf derselben Seite von T und V_3 auf einer anderen Seite von T (Fig. 1, c). Dann lässt sich Δ parallel zu der betreffenden Seite verschieben, womit V_3 befreit wird.
- Nun die *pièce de résistance*: Die drei Ecken V_i von Δ liegen auf den drei Seiten a_i von T . Hier kommt uns die bekannte Papierstreifenkonstruktion der Ellipse zu Hilfe: Gleiten V_1 und V_2 auf den Seiten a_1 und a_2 von T mit konstantem Abstand $|V_1 V_2| =: \ell$, so beschreibt V_3 einen Ellipsenbogen, der die Seite a_3 transversal schneidet oder von innen berührt (Fig. 2). Es ist also möglich, die Ecke V_3 durch eine zulässige Bewegung von Δ zu befreien. – Den rechnerischen Beweis, dass in der Fig. 2 tatsächlich eine Ellipse erscheint, holen wir in Abschnitt 5 nach. \square

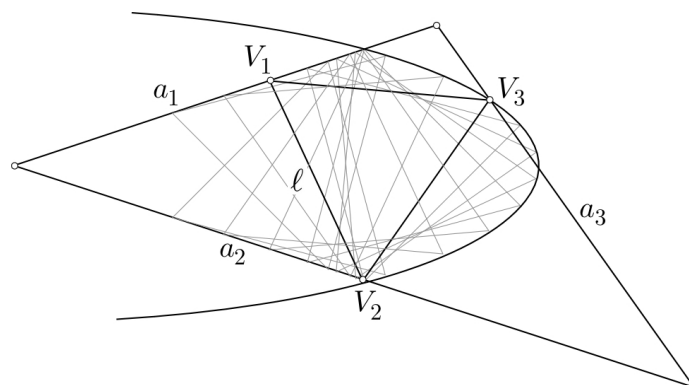


Fig. 2

Lemma 1 impliziert, dass mindestens eine Ecke V_i des maximalen \triangle zwei Anschläge beiträgt, das heisst: mit einer Ecke A_j von T zusammenfällt. Der zugehörige Winkel α_j muss $\geq 60^\circ$ sein. Besitzt T nur *einen* Winkel $\geq 60^\circ$, so sind dann *beide* anderen Ecken V_2, V_3 von \triangle auf je einer Seite von T angeschlagen. Besitzt T zwei Winkel $\geq 60^\circ$, so können zwei Ecken von \triangle in Ecken von T liegen, womit ebenfalls vier Anschläge zustandekommen. Dieser Fall ist etwas komplizierter, und es gibt auch eine Überraschung!

4. Die Kandidaten

Von jetzt an bezeichnen wir die Ecken, Seiten und Winkel von T wie üblich mit A, B, C , undsoweiter. Dabei nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha \geq \beta \geq \gamma > 0$ an. Nach dem eben Gesagten müssen wir dann die Fälle $\beta < 60^\circ$ und $\beta \geq 60^\circ$ unterscheiden.

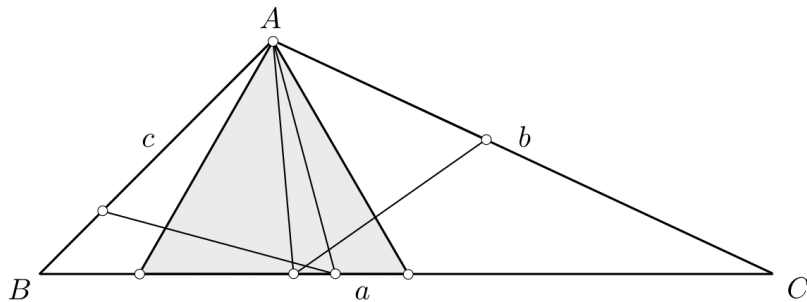


Fig. 3

Ist $\gamma \leq \beta < 60^\circ$, so muss $\alpha > 60^\circ$ sein. Damit ist $V_1 = A$, aber V_2 und V_3 können nicht gleichzeitig auf b und auf c liegen. Vier Anschläge sind damit noch auf die drei Weisen möglich, die in der Fig. 3 zu sehen sind, und es ist klar, dass $V_2, V_3 \in a$ das grösste $\triangle \subset T$ liefert.

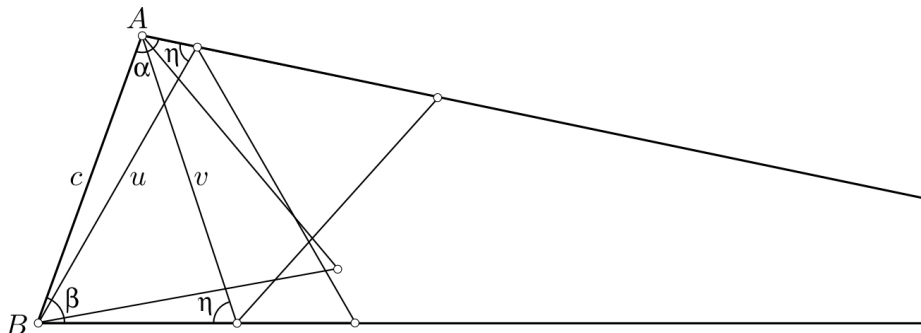


Fig. 4

In der Fig. 4 ist der Fall $\alpha \geq \beta > 60^\circ$ dargestellt. Kandidaten sind die drei gleichseitigen Dreiecke mit den Seitenlängen c, u und v . (Ist $\beta = 60^\circ$ oder sogar $\alpha = \beta = 60^\circ$, so fallen zwei oder sogar alle drei dieser Dreiecke zusammen. Wir gehen dem nicht im Einzelnen nach.) Es geht nun darum festzustellen, welche dieser drei Längen am grössten ist. Hierzu führen wir den Winkel η (siehe die Figur) ein; es gilt $\eta = 240^\circ - \alpha - \beta$. Nach dem Sinussatz hat man

$$\frac{c}{\sin \eta} = \frac{u}{\sin \alpha} = \frac{v}{\sin \beta}$$

und folglich

$$\max\{c, u, v\} = \frac{c}{\sin \eta} \max\{\sin \eta, \sin \alpha, \sin \beta\} .$$

Wegen $\beta \leq \alpha < 180^\circ - \beta$ ist $\sin \alpha \geq \sin \beta$ und folglich $u \geq v$. Weiters gilt

$$\sin \eta = \sin(\alpha + \beta - 60^\circ) \geq \sin \alpha$$

genau dann, wenn

$$\alpha \leq \alpha + \beta - 60^\circ \leq 180^\circ - \alpha,$$

mithin $2\alpha + \beta \leq 240^\circ$ ist. Trifft das zu, so ist c am grössten, andernfalls u . Im Spezialfall $(\alpha, \beta, \gamma) = (80^\circ, 80^\circ, 20^\circ)$ erhalten wir $c = u = v$. Es gibt dann drei verschiedene maximale $\Delta \subset T$!

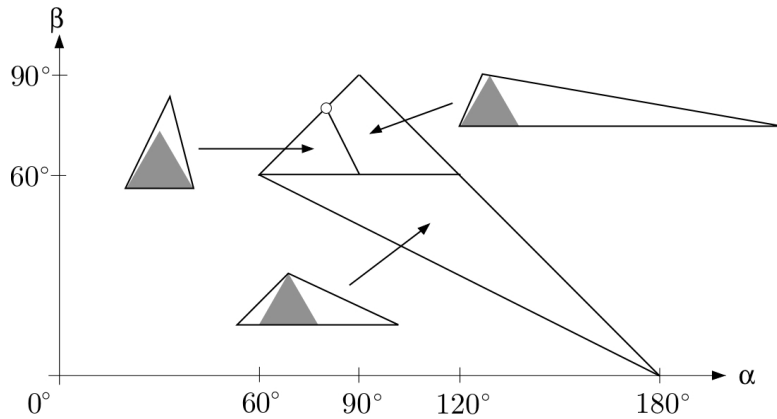


Fig. 5

Die Fig. 5 fasst das Ergebnis dieses Abschnitts zusammen. Sie zeigt den Teil $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ des “moduli space” Ω aller Dreiecke T . Unsere Betrachtungen haben drei Kammern geliefert, in deren Innern die eingezeichneten Maximumregimes gelten. Längs der Wände zwischen den Kammern und zu den nicht gezeichneten Teilen von Ω gibt es Mehrfachlösungen und Lösungen mit zusätzlichen Anschlüssen. Diese Fälle sind nicht im Einzelnen dargestellt.

5. Die Papierstreifenkonstruktion der Ellipse

Zum Schluss holen wir noch den folgenden Hilfssatz nach:

Lemma 2. Gleiten die Endpunkte einer Strecke L der Länge ℓ längs zwei Geraden, die sich in O schneiden, so beschreibt jeder mit der Strecke fest verbundene Punkt eine Ellipse mit Zentrum O .

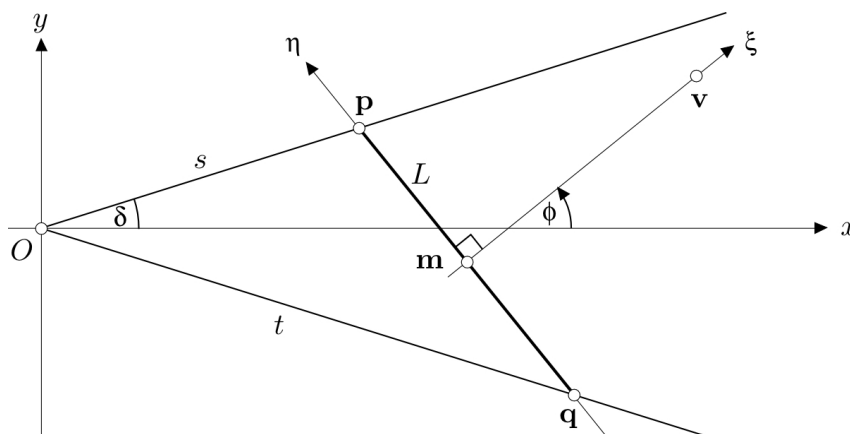


Fig. 6

Beweis. Wir legen die Disposition der Fig. 6 zu Grunde. Die beiden Geraden schneiden sich im Ursprung der (x, y) -Ebene unter dem Winkel 2δ . Der Mittelpunkt \mathbf{m} der beweglichen Strecke ist der Ursprung einer mitbewegten (ξ, η) -Ebene, wobei L auf der η -Achse liegt. Als primäre Variable wählen wir den Winkel ϕ zwischen der x - und der ξ -Achse. Es seien

$$\mathbf{p} = s(\cos \delta, \sin \delta), \quad \mathbf{q} = t(\cos \delta, -\sin \delta)$$

die Endpunkte von L auf den beiden Geraden. Die Grössen $s, t \in \mathbb{R}$ hängen dann in bestimmter Weise von ϕ ab. Aus

$$\mathbf{p} - \mathbf{q} = s(\cos \delta, \sin \delta) - t(\cos \delta, -\sin \delta) \stackrel{!}{=} \ell(-\sin \phi, \cos \phi)$$

ergibt sich

$$s + t = \frac{\ell \cos \phi}{\sin \delta}, \quad s - t = -\frac{\ell \sin \phi}{\cos \delta}$$

und weiter

$$\mathbf{m}(\phi) = \frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \frac{1}{2}((s + t) \cos \delta, (s - t) \sin \delta) = \frac{\ell}{2}(\cot \delta \cos \phi, \tan \delta \sin \phi) .$$

Hiernach bewegt sich jedenfalls \mathbf{m} auf einer Ellipse mit Zentrum O . Wir können aber noch mehr sagen: Besitzt ein Punkt \mathbf{v} der mitbewegten Ebene gegebene Koordinaten (ξ, η) , zum Beispiel die Koordinaten $\xi = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell, \eta = 0$, so entnimmt man der Figur die Bahn

$$\mathbf{v}(\phi) = \mathbf{m}(\phi) + (\xi \cos \phi - \eta \sin \phi, \eta \cos \phi + \xi \sin \phi) = \begin{bmatrix} \frac{\ell}{2} \cos \delta + \xi & -\eta \\ \eta & \frac{\ell}{2} \tan \delta + \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} .$$

Die Bahn $\phi \mapsto \mathbf{v}(\phi)$ ist somit das affine Bild eines Kreises, also eine Ellipse mit Zentrum O .

Literatur

- [1] A. De Pano, Y. Ke, and J. O'Rourke: *Finding largest inscribed equilateral triangles and squares*. Proc. 25th Allerton Conf. Commun. Control Comput. 1987, pp. 869–878.
- [2] <https://math.stackexchange.com/questions/2379188>

Ja – Oui – Sì

Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematikund Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und Gymnasiallehrer (VSG) werden.

J'aimerais devenir membre de la Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique (SSPMP) et de la Société Suisse des Professeurs de l'Enseignement Secondaire (SSPES).

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

Beitrag/Montant/Quota: Fr. 120 (VSG-SSPES-SSISS) + Fr. 40 (SSIMF-SSPMP-VSMP)

Frau/Mme/Sig.ra Herr/M./Sig. Prof. Dr.

Name/Nom/Cognome:

Vorname/Prénom/Nome:

Adresse/Indirizzo:

PLZ Ort/NP Ville/CAP Luogo:

(Land/Pays/Paese):

E-Mail:

Tel.:

Geburtsdatum/Date de Naissance/
Data di nascita:

Sprache/Langue/Lingua: D F I

Schule/École/Scuola:

Kanton/Canton/Cantone:

Kategorie/Catégorie/Categoria: aktiv/actif/attivo passiv/passif/passivo

StudentIn/Étudiant(e)/Studente/ssa.

Mitglied der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft/Membre de la Société Suisse de Physique/Membro della Società Svizzera di Fisica

Einsenden an/envoyer à/inviare a:

VSG – SSPES – SSISS, Sekretariat, z. H. Doris Lazzeri, 3000 Bern

www.vsg-sspes.ch

Herausgeber — *Éditeur*
VSMP — SSPMP — SSIMF

Korrespondenz — *Correspondance*

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Layout — *Mise en page*

Samuel Byland samuel.byland@vsmp.ch
Weinbergstrasse 48B Tel. 079 728 63 97
5000 Aarau

Inserateverwaltung — *Publicité*

Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch
Weinbergstrasse 3 Tel. 032 512 01 28
8807 Freienbach

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

— *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:

ganzseitig Fr. 500.–
halbseitig Fr. 300.–

Beilagen:

bis 20 g Fr. 500.–
über 20 g nach Vereinbarung

Adressänderungen — *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder — Membres de la SSPMP:
VSG – SSPES – SSISS
Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)
Monbijoustrasse 36
3011 Bern
Tel. 031 382 52 33
information@vsg-ssp.es.ch

übrige Abonnenten — autres abonnés:

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Auflage — *Tirage*

900 Exemplare
erscheint dreimal jährlich

Präsident VSMP — SSPMP — SSIMF

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Domenico Galli 44
6600 Locarno-Solduno Tel. 091 751 14 47

Deutschscheizerische Mathematikkommission

Josef Züger j.zueger@sunrise.ch
Via Salens Tel. 081 641 10 94
7402 Bonaduz

Deutschscheizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@gymburgdorf.ch
Strandweg 17 Tel. 031 638 03 03
3400 Burgdorf

Commission Romande de Mathématique

Tatiana Mantuano tatiana.mantuano@gfbiene.ch
Rue Louis-de-Meuron 4 Tél. 032 544 47 53
2074 Marin-Epagnier

Commission Romande de Physique

Stéphane Davet davet.stephane@lyca.eduvs.ch
Av. Plantaud 28B Tél. 024 471 21 83
1870 Monthey

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Luca Rovelli lucarovelli@ticino.com
Via Pedmunt 10 Tel. 091 825 76 69
6513 Monte Carasso

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

— *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 139 30.11.2018 (Ende Januar)
Nr. 140 31.03.2019 (Ende Mai)
Nr. 141 31.07.2019 (Ende September)

Druck und Versand — *Imprimerie*

Niedermann Druck AG
Letzistrasse 37
9015 St. Gallen
www.niedermanndruck.ch