



## In dieser Ausgabe — *Dans ce numéro*

<b>VSMP – SSPMP – SSIMF</b>	<b>3</b>
Scientiæ & Robotica	3
<b>Deutschweizerische Physikkommission</b>	<b>4</b>
Martin Lieberherr Konisches Stangenpendel	4
Schweizerischer Tag für Physik und Unterricht	8
<b>Deutschschweizerische Mathematikkommission</b>	<b>9</b>
Meike Akveld, Willi Hager Solitärwellen besser bekannt als perfekte Tsunamis	9
Monika Krichel Mathematik für Ausserirdische	15
<i>Matura Awards 2018</i> der SMG	16
Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht	17
Ella Stein Gender und Mathematikunterricht	18
Herbert Bruderer <i>Buchrezension: Meilensteine der Rechentechnik</i>	24
<i>Kurs: Projektive Geometrie</i>	26
Franz Meier, Hansruedi Schneebeli Hinweis auf ein bemerkenswertes Skript im Bereich Anwendungen der Mathematik	27
Christian Hämmerle, Christian Rüede, Fritz Staub Zwei Lösungswege für eine Gleichung – Wozu eigentlich?	28
<i>Kolloquium</i> über Mathematik, Informatik und Unterricht	32

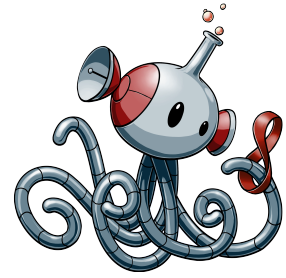
Internet-Adressen — *Adresses Internet*

[www.vsmf.ch](http://www.vsmf.ch) — [www.sspmp.ch](http://www.sspmp.ch) — [www.ssimf.ch](http://www.ssimf.ch)

Titelseite — *Page de Titre*

Solitärwelle (Artikel ab S. 9 in dieser Ausgabe)

<b>Commission Romande de Mathématiques</b>	<b>34</b>
Eugène Pasquier Permutations à points fixes dans les probabilités	34
<i>Matura Awards 2018</i> de la SMS	38
Christian Aebi Puissances de 2 et 3	39
<b>Commission Romande de Physique</b>	<b>41</b>
Alice Gasparini La cosmologie et la relativité générale au gymnase : Exemple d'une séquence sur l'effet de lentille gravitationnelle	41



## Scientiæ & Robotica

Chère collègue, Cher collègue,

En septembre, la SSPMP, conjointement avec la SSPSN, la SSIE et le LSRO-EPFL, organise, un congrès sur le thème

### « Scientiæ & Robotica »

Cette manifestation multi-disciplinaire aura lieu du 5 au 8 septembre 2018 dans les locaux de l'EPFL, à Lausanne.

Ceux d'entre nous qui ont vécu le congrès « Science – Cuisine » à Sion en 2013 s'en souviennent encore avec plaisir et nous sommes convaincus que ce congrès représente une intéressante offre de formation continue pour les branches mathématiques, physique, biologie, chimie et informatique.

Nous vous annonçons ce congrès assez tôt pour que vous puissiez déjà réserver les dates dans vos agendas.

Un flyer de présentation est joint à ce bulletin et vous trouverez d'autres informations (programme, etc) sur le site

[www.scientiaerobotica.ch](http://www.scientiaerobotica.ch)

L'inscription en ligne se fera ensuite via le site du ZEM-CES.

Pour le comité d'organisation:

Patrick Turtschy, vice-président de la SSPMP

Cara collega, caro collega,

il prossimo settembre la SSIMF organizza, congiuntamente con la ASISN, la SSII e il LSRO dell'EPFL un congresso dal titolo

### «Scientiæ & Robotica»

che avrà luogo a Losanna dal 5 all'8 settembre presso l'EPFL.

È certamente ancora vivo, tra coloro che vi hanno partecipato, il ricordo del congresso «Science – Cuisine» tenutosi a Sion nel 2013; siamo certi che anche questo congresso rappresenterà un'esperienza indimenticabile per tutti i partecipanti e sarà un'interessante occasione di aggiornamento, con-

Liebe Kolleginnen, liebe Kollegen

Im Herbst dieses Jahres organisieren der VSN, der SVIA und wir als VSMP gemeinsam einen Kongress zum Thema

### «Scientiæ & Robotica»

Diese breitgefächerte Weiterbildungsveranstaltung findet vom 5. bis 8. September in den Räumlichkeiten der EPFL in Lausanne statt.

Alle diejenigen von Euch, die 2013 in Sion beim Kongress «Science – Cuisine» dabei waren, denken heute noch gerne daran zurück. Und wir sind zuversichtlich, dass auch der diesjährige Kongress für die Bereiche Biologie, Chemie, Informatik, Mathematik und Physik ein interessantes Weiterbildungsangebot darstellen wird. Am besten trägt Ihr das Datum schon einmal in Eure Agenda ein.

Ein Kongress-Flyer ist diesem Bulletin beigelegt; Ihr findet ihn auch auf der folgenden Website:

[www.scientiaerobotica.ch](http://www.scientiaerobotica.ch)

Unter dieser Adresse findet Ihr auch noch viele weitere Hinweise zum geplanten Kongress (Programm, etc.). Die Anmeldung (online) wird via ‚link‘ über die Website der ZEM-CES erfolgen.

Für das Organisationskomitee:

Hansjürg Stocker, Vizepräsident des VSMP

fronto ed approfondimento. Vi invitiamo a prenotare già sin d'ora le date summenzionate.

Troverete un opuscolo di presentazione del congresso in allegato al presente Bollettino; la versione aggiornata del programma è consultabile all'indirizzo

[www.scientiaerobotica.ch](http://www.scientiaerobotica.ch)

L'iscrizione dovrà essere effettuata online a partire dal sito del ZEM-CES.

Per il comitato d'organizzazione:

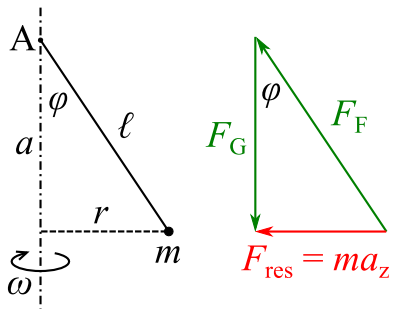
Arno Gropengiesser, Presidente della SSIMF

# Konisches Stangenpendel

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

## 1 Einleitung

Das konische Pendel ist ein mathematisches Pendel, siehe Abbildung 1, das an einem Punkt A aufgehängt und dessen Pendelkörper gleichmässig auf einem horizontalen Kreis in Umlauf gebracht wird. Der Faden des Pendels überstreicht einen Kegel (Konus). Wie hängen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , Spreizwinkel  $\varphi$  und Kreisbahnradius  $r$  mit der Pendellänge  $\ell$ , Masse  $m$  und Fallbeschleunigung  $g$  zusammen? Das konische Pendel ist von Robert Hooke um 1660 als Modell für die Planetenbewegung verwendet worden. Christiaan Huygens hat 1673 die Umlaufzeit angegeben.<sup>1</sup>



$$F_{\text{res}} = ma_z \quad (1)$$

$$F_G \tan \varphi = m\omega^2 r \quad (2)$$

$$mg \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = m\omega^2 \ell \sin \varphi \quad (3)$$

$$1. \text{ Lsg. } \sin \varphi_1 = 0 \quad (4)$$

$$2. \text{ Lsg. } \cos \varphi_2 = \frac{g}{\ell \omega^2} \quad (5)$$

Abbildung 1: konisches Pendel mit Kräfteplan

Falls das Pendel schnell genug dreht ( $\omega^2 > g/\ell$ ), ist seine Umlaufzeit  $T = 2\pi \sqrt{\ell \cos \varphi_2 / g}$ , d.h. gleich der Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels der Länge  $a = \ell \cos \varphi$  (Abb. 1).

Das konische Pendel ist ein hübsches Beispiel zur Kreisbewegung. Die Diskussion ist auch Gymnasiastinnen und Mittelschülern zugänglich. Wie sieht es aber aus, wenn als Pendel eine schwere Stange verwendet wird?

## 2 Konisches Stangenpendel

Eine dünne, gleichmässige Stange der Länge  $\ell$  und Masse  $m$  wird wie in Abbildung 2 als konisches Pendel bewegt. Wir begeben uns ins mitrotierende Bezugssystem (Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  des Bezugssystems relativ zu einem Inertialsystem). Dort ist die Stange in Ruhe. Die Drehmomente der Gewichtskraft und Zentrifugalkraft müssen sich kompensieren. Da die Stange ein ausgedehnter, starrer Körper ist, muss man sich überlegen, wo die Kräfte angreifen.

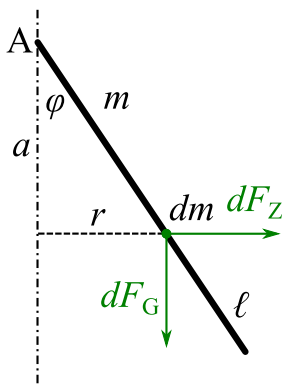
Die Erdanziehungskraft  $F_G$  greift im Gravizentrum an, das hier mit dem Massenmittelpunkt zusammenfällt, weil das Schwerfeld der Erde homogen ist. Das Drehmoment der Gewichtskraft bezogen auf den Punkt A ist also  $M_G = r_G \cdot F_G = \frac{1}{2} \ell \sin \varphi \cdot mg$

Die Zentrifugalbeschleunigung  $r \Omega^2$  variiert entlang der Stange. Um die Zentrifugalkraft zu bestimmen, müssen

wir über alle Massenelemente integrieren.

$$F_Z = \int_0^\ell r \cdot \Omega^2 \cdot dm = \int_0^\ell s \sin \varphi \cdot \Omega^2 \cdot \frac{m}{\ell} ds = \frac{1}{2} \ell \sin \varphi \cdot \Omega^2 \cdot m \quad (6)$$

Das Resultat hätten wir erraten können, aber wo greift diese Kraft an? Die Zentrifugalkraft ist am Ende der Stange stärker als am Aufhängepunkt. Um den Angriffspunkt zu bestimmen, berechnen wir das Drehmoment  $M_Z$  der Zentrifugalkraft bezüglich A durch Integration entlang der Stange und stellen dieses als ‘‘Hebelarm  $\times$  Kraft’’ dar. Dieses Drehmoment muss im Gleichgewicht jenes der Gewichtskraft kompensieren.



$$M_Z = \int_0^\ell a \cdot dF_Z = \int_0^\ell a \cdot r \Omega^2 dm \quad (7)$$

$$= \int_0^\ell s \cos \varphi \cdot s \sin \varphi \Omega^2 \frac{m}{\ell} ds \quad (8)$$

$$= \frac{1}{3} \ell^2 \cos \varphi \sin \varphi \cdot \Omega^2 \cdot m \quad (9)$$

$$= \frac{2}{3} \ell \cos \varphi \times \frac{1}{2} \ell \sin \varphi \Omega^2 m \quad (10)$$

Der Angriffspunkt der Zentrifugalkraft ist  $2/3$  der Stangenlänge vom Aufhängepunkt A entfernt. Die Zentrifugalkraft greift nicht im Massenmittelpunkt an.

Abbildung 2: konisches Stangenpendel mit Zentrifugal- und Gewichtskraft auf ein Massenelement

Drehmomentgleichgewicht

$$M_G = M_Z \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \ell \sin \varphi mg = \frac{1}{3} \ell^2 \cos \varphi \sin \varphi \cdot \Omega^2 \cdot m \quad (12)$$

$$\frac{1}{2} \sin \varphi g = \frac{1}{3} \ell \cos \varphi \sin \varphi \cdot \Omega^2 \quad (13)$$

1. Lösung

$$\sin \varphi_1 = 0 \quad (14)$$

2. Lösung

$$\cos \varphi_2 = \frac{3g}{2\ell\Omega^2} \quad (15)$$

Für genügend hohe Winkelgeschwindigkeiten entspricht die Umlaufzeit  $T = 2\pi \sqrt{2\ell \cos \varphi_2 / (3g)}$  der Schwingungsdauer eines um  $\cos \varphi_2$  verkürzten physikalischen Stangenpendels der Länge  $\ell$ .

### 3 Ausblick

Der Angriffspunkt einer Kraft auf einen starren Körper kann sich vom Massenmittelpunkt unterscheiden. Das trifft sogar auf die Gravitationskraft zu, wenn das Schwerfeld inhomogen ist. Ein berühmtes Beispiel ist unser Mond. Er bewegt sich im inhomogenen Schwerfeld der Erde. Weil der Mond ausserdem nicht kugelsymmetrisch ist, unterscheiden sich Massenmittelpunkt und Gravizentrum. Aus diesem Grund kann die Gravitationskraft ein Drehmoment auf den Mond ausüben. Eine Folge ist die gebundene Rotation des Mondes.

Man soll Kräfte nicht unreflektiert im Schwerpunkt einzeichnen, sondern bei den richtigen Angriffspunkten.

10. Februar 2018, Lie.

<sup>1</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Conical\\_pendulum](https://en.wikipedia.org/wiki/Conical_pendulum)

(Abruf am 10. Feb. 2018)

# DIE NEUEN VERNIER-PRODUKTE JETZT BEI EDUCATEC BESTELLEN

[educatec.ch/vernier](http://educatec.ch/vernier)

## Go Direct™ Charge Station

Die Go Direct™ Ladestation ist die perfekte Lösung zum Aufladen Ihrer Go Direct Sensoren. Jede Ladestation hat 16 Ladeanschlüsse, 8 USB- und 8 Sensor-Ports. LED-Leuchten an den Go Direct-Sensoren zeigen den Ladezustand an. Die Station eignet sich auch zum Laden von Go Wireless®-Geräten.

USB-Kabel nicht enthalten.



Artikel-Nr. GDX-CRG



## Go Direct™ Oberflächentemperaturfühler



Artikel-Nr. GDX-ST

Entwickelt für den Einsatz in Situationen, in denen eine geringe thermische Masse oder Flexibilität erforderlich ist. Der Go Direct™ Oberflächentempersensoren enthält einen exponierten Thermistor mit einer extrem schnellen Reaktionszeit. Die elektronischen Verbindungen sind isoliert, sodass Messungen in Luft und Wasser möglich sind.

Verwenden Sie diesen Sensor in einer Vielzahl von Experimenten:

- Untersuchen Sie den Temperatureinfluss auf die Leistung von Solarpanel.
- Entdecken Sie passive Solarheizung oder Sonnenkollektoren.
- Untersuchen Sie die Wärme bei der Nasenbeatmung.
- Entdecken Sie die Wirkung der Vaskularität auf die Wiederherstellung der Hauttemperatur.

## Go Direct™ Beschleunigungsmesser



Artikel-Nr. GDX-ACC

Sammeln Sie Beschleunigungs-, Rotations- und Höhendaten im Klassenzimmer oder im Gelände mit dem Go Direct™ Beschleunigungssensor. Montieren Sie den Beschleunigungssensor an Ihrem Fahrrad oder befestigen Sie ihn ohne störende Kabel an Ihrem Laborwagen.

Messbereich:

- Geringe Beschleunigung:  $\pm 157$  m/s<sup>2</sup> ( $\pm 16$  g)
- Hohe Beschleunigung:  $\pm 1,960$  m/s<sup>2</sup> ( $\pm 200$  g)
- Gyros:  $\pm 2,000$  °/s, Winkel:  $\pm 180^\circ$
- Höhenmesser:  $-1,800$ m bis  $10,000$  m

## Go Direct™ Weitbereichs-Temperaturfühler



Artikel-Nr. GDX-WRT

Mit dem Go Direct™ Weitbereichs-Temperaturfühler können Ihre Schüler ein Experiment unter dem Laborabzug durchführen und die Daten drahtlos an die Laborstation senden. Das Thermometer ermöglicht Untersuchungen wie die Bestimmung des Schmelzpunktes von Koffein oder des Siedepunktes verschiedener Pflanzenöle.

- Messbereich:  $-20$  bis  $330^\circ\text{C}$
- Temperaturfühler: Platin RTD (100 Ohm)
- Genauigkeit:  $\pm 0,2^\circ\text{C}$  bei  $100^\circ\text{C}$
- Reaktionszeit (von  $25^\circ\text{C}$  bis  $100^\circ\text{C}$  in Wasser): 30 Sekunden
- Edelstahlkörper Länge: 17 cm, Durchmesser: 6.4 mm

Weitere Informationen finden Sie in unserem Online Shop unter [www.educatec.ch](http://www.educatec.ch)

Für weitere Kataloge von uns wenden Sie sich an [contact@educatec.ch](mailto:contact@educatec.ch)

In der nächsten Ausgabe folgt eine Fortsetzung der GDX Sensoren.

Go Direct™

**EducaTec AG**

Altes Schulhaus, Kanzleigasse 2  
Postfach, 5312 Döttingen

T +41 56 245 81 61, F +41 56 245 81 63  
[contact@educatec.ch](mailto:contact@educatec.ch), [www.educatec.ch](http://www.educatec.ch)

educatec

DIE NEUEN LEXSOLAR-PRODUKTE JETZT BEI EDUCATEC BESTELLEN

[educatec.ch/lexsolar-gmbh/](https://educatec.ch/lexsolar-gmbh/)

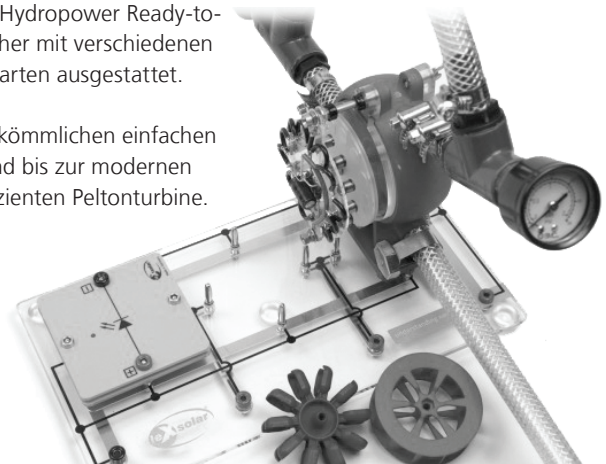
## leXsolar-Hydropower Ready-to-go



Dieser neue Experimentierkoffer bietet neben qualitativen Versuchen zur Einführung in das Thema Wasserkraftnutzung vor allem fundierte quantitative Experimente zur Physik von Wasserturbinen. Im Vordergrund steht dabei, wie bei allen leXsolar-Produkten, der Praxisbezug.

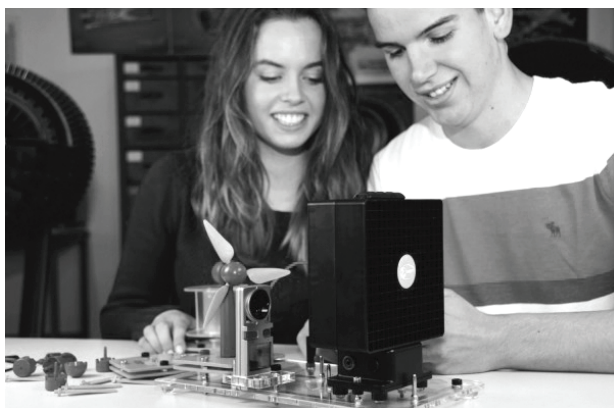
leXsolar-Hydropower Ready-to-go ist daher mit verschiedenen Turbinenarten ausgestattet.

Vom herkömmlichen einfachen Wasserrad bis zur modernen hocheffizienten Pelton-Turbine.



## leXsolar-Wind Large 2.0

Mit diesem System bleiben keine Fragen zu den physikalischen Grundlagen der Windenergienutzung offen. leXsolar-Wind Large vermittelt durch lehrplanbezogene Experimente ein Verständnis für die Funktionsweise von Windkraftanlagen. So kann beispielsweise der Einfluss von Windstärke und Windrichtung oder der Rotorart untersucht werden. Für die Klassenstufe 5 - 7 können die Versuche phänomenologisch anhand einfacher Verbraucher wie Glühlampe oder Hupe durchgeführt werden, für den Physikunterricht bis Klasse 13 auch vollständig quantitativ.



LeXsolar ist der führende Anbieter für Bildungsprodukte im Bereich Erneuerbare Energien. Die Firma Lexsolar baut seit über zehn Jahren Spezial-Koffer für Schüler mit internationalem Erfolg.

Alle LeXsolar Spezial-Koffer können Sie ebenfalls bei EducaTec AG erwerben. Weitere Informationen zu LeXsolar finden Sie in unserem neuen Shop unter:

<https://educatec.ch/lexsolar-gmbh/>

Weitere Informationen finden Sie in unserem Online Shop unter [www.educatec.ch](http://www.educatec.ch)  
Für weitere Kataloge von uns wenden Sie sich an [contact@educatec.ch](mailto:contact@educatec.ch)



**EducaTec AG**  
Altes Schulhaus, Kanzleigasse 2  
Postfach, 5312 Döttingen

T +41 56 245 81 61, F +41 56 245 81 63  
[contact@educatec.ch](mailto:contact@educatec.ch), [www.educatec.ch](http://www.educatec.ch)





## 19. Schweizerischer Tag für Physik und Unterricht

Mittwoch, 07. November 2018, 13:00 - 17:00 Uhr an der ETH Zürich im  
Zentrum

### ***Themen: Philosophische Betrachtungen zur Physik und Data Science im Unterricht***

- 12:30 - 13:00 **Begrüßungskaffee**
- 13:00 - 13:15 **Begrüßung und Einführung**
- 13:15 - 13:45 **Philosophische Betrachtungen zum Experiment in der Physik**  
*PD Dr. Norman Sieroka, ETH Zürich*
- 13:45 - 15:00 **Podiumsdiskussion und Diskussion der Besucherinnen und Besucher zum  
Thema mit Gruppenarbeitsphase und Zusammenfassung der Resultate im  
Plenum**
- 15:00 - 15:30 **Pause mit Austauschmöglichkeit**
- 15:30 - 16:45 **„Data Science“ und mögliche Bezüge zum Unterricht**  
*Prof. Dr. Joachim Buhmann, ETH Zürich*
- 16:45 **Apéro**

#### **Treffpunkt (wird später präzisiert)**

Ort: ETH Zentrum, Hauptgebäude (Raumangabe folgt später)

#### **Anmeldung:**

**Mailen oder schicken Sie die Anmeldung bitte spätestens bis zum 31. Oktober 2018 an:**

Andreas Vaterlaus, ETH Hönggerberg HPF G4.1, 8093 Zürich.

Email: [vaterlaus@phys.ethz.ch](mailto:vaterlaus@phys.ethz.ch)

(für eine frühzeitige, evtl. auch provisorische Anmeldung sind wir sehr dankbar!)

Kosten: keine

#### **Angaben:**

Name und Vorname: .....

Schule: .....

Email: .....

# Solitärwellen besser bekannt als perfekte Tsunamis

Meike Akveld, ETH Zürich, akveld@math.ethz.ch

Willi H. Hager, ETH Zürich, hager@vaw.baug.ethz.ch

Der untenstehende Text ist aus einer Zusammenarbeit zwischen einem Ingenieur und einer Mathematikerin entstanden. Wir haben versucht, ein interessantes physikalisches Phänomen mathematisch verständlich aufzubereiten. Die Mathematik geht über die Mittelschulmathematik hinaus, zeigt aber eine interessante und *echte* Anwendung von Differentialgleichungen. Wir haben den Text als Übungsblatt aufgebaut um lange Berechnungen wegzulassen. Eventuell lässt sich dieses Beispiel im Schwerpunkt- oder Ergänzungsfach behandeln.

## 1 Motivation

Die Einzelwelle oder Solitärwelle (Solitary wave) ist die stabilste aller Wasserwellen, da sie nur einen Wellenberg, jedoch keine Wellentäler besitzt. Sie entspricht einem Tsunami, falls dieser zweidimensional approximiert wird. Seit dem South-East Asia Tsunami Disaster von 2004 haben diese Wellen grosse Aufmerksamkeit erfahren, insbesondere infolge der immensen Schäden an Menschen sowie an Bauten längs der Küste. Weiter bekannt wurden Tsunamis durch das Fukushima-Unglück im Jahr 2011, welches nicht nur viele Menschen zu Schaden kommen liess, sondern zudem das AKW an der Nordostküste Japans zerstörte, begleitet von einem Austritt radioaktiver Schadstoffe. Dieses Unglück führte zu einer kritischen Überdenkung der weiteren Anwendung von Nuklearenergie; in der Schweiz ist der Austritt auf etwa 2030 geplant.

## 2 Geschichte

Die Solitärwelle wurde erstmals 1837 vom Engländer John Scott-Russell (1808-1882) beschrieben. Während eines Besuchs an einem der englischen Kanäle beobachtete er, wie eine Welle an einer Pferderaststätte sich weiter fortpflanzte, obwohl das Schiff zum Auswechseln der Pferde ruhte. Die eigenartige Wellenform weckte seine Aufmerksamkeit, er machte Messungen und veröffentlichte seine Resultate. Damit fand er das Interesse der Fachwelt, an der mathematischen Beschreibung dieser Welle zu arbeiten.



Abbildung 1: Gedenkstein John Scott Russell (1808-1882)

Es dauerte über 30 Jahre, bis schliesslich der Franzose Joseph V. Boussinesq (1842-1929) die Lösung 1872 publizierte. Er realisierte, dass dieses Phänomen durch die nicht-hydrostatische Druckverteilung des Abflusses massgebend beeinflusst wird, weshalb er die üblichen hydraulischen Gleichungen zu den sogenannten Boussinesq-Gleichungen verallgemeinerte. Die spezielle Lösung seiner Gleichung entspricht der 2D-Solitärwelle. Später wurde die Lösung durch die beiden Holländer Prof. Diederich J. Korteweg (1848-1941) und seinen Doktorand Gustav de Vries (1866-1934) verallgemeinert. In den 1960er Jahren wurde gezeigt, dass sich beliebige Wellen aus sogenannten Solitonen zusammensetzen, womit das Thema erneut Beachtung erhielt. Mit dem Wissen um die Gefahren von Tsunamis werden zukünftig grosse Forschungsaktivitäten erwartet.

### 3 Mathematische Beschreibung

Bekanntlich lassen sich Tsunamis auf offenem Meer praktisch nicht beobachten, da sie maximal höchstens etwa 10 m hoch sind, aber typische Wellenlängen von Hunderten von Kilometern besitzen. Ihr Gefahrenpotenzial entsteht erst beim Auflaufen in Küstennähe, wenn die abnehmende Tiefe des Meeresbodens die Welle zum Brechen (wave breaking) bringt. Es nähert sich der Küste dann eine fast vertikale Wasserwand, deren Höhe ein Vielfaches der ungestörten Wellenhöhe auf offenem Meer entspricht. Beim Auflaufen der Welle wird wie mit einem Hammer alles zerstört, insbesondere also die an der Küste gelegene Infrastruktur. Der Welle entkommt man nur, indem man sich auf eine nahe Anhöhe begibt.

Lässt man den Auflaufprozess ausser Acht, so ist die Solitärwelle sehr stabil, begleitet von praktisch keinen Energieverlusten, was sich an der fast globalen Ausbreitung solcher Wellen manifestiert. Dem zu Folge wird angenommen, dass die hydraulische Wellen-Energie nahezu konserviert wird. Nach dem Energiesatz entspricht die hydraulische Energiehöhe  $H$  mit  $g$  als Erdbeschleunigung der Summe aus Lagehöhe, Druckhöhe  $h$  und Geschwindigkeitshöhe  $\frac{v^2}{2g}$ . Die Energie wird in der Hydraulik deshalb üblicherweise durch eine Höhe ausgedrückt. Mit dem Durchfluss pro Einheitsbreite  $q = h \cdot v$  findet man für einen Abfluss im horizontalen Rechteckkanal für das Oberflächenprofil der Solitärwelle (dabei wurde die Lagehöhe gleich 0 gesetzt)

$$H = h(x) + \frac{q^2}{2gh(x)^2} \left( 1 + \frac{1}{3} \left( 2h(x)h''(x) - h'(x)^2 \right) \dots \right)$$

Man beachte, dass der Term in der grossen Klammer einer Art Taylorreihe entspricht. Wenn man nur den Wert 1 betrachtet, so entspricht dies der Annahme hydrostatischer Druckverteilung, d.h. der Druck fließenden Wassers ist gleich demjenigen ruhenden Wassers. Falls zudem der 2. Term verwendet wird, so hat man es mit der **stationären Boussinesq-Gleichung** zu tun

$$H = h(x) + \frac{q^2}{2gh(x)^2} \left( 1 + \frac{1}{3} \left( 2h(x)h''(x) - h'(x)^2 \right) \right) \tag{1}$$

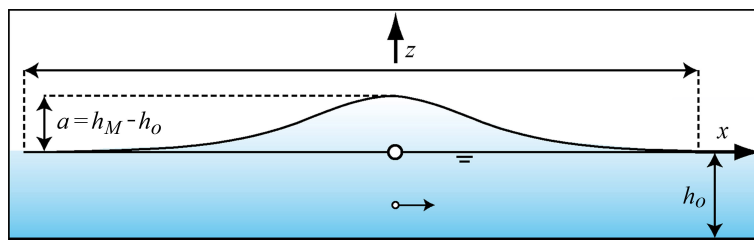


Abbildung 2: Solitärwelle – Definitionsskizze

Abbildung 2 illustriert den physikalischen Sachverhalt. Bekanntlich besteht die Solitärwelle lediglich aus einem Wellenberg der Höhe  $h_M$ . Asymptotisch gilt in grosser Entfernung vom Wellenmaximum  $h(\pm\infty) = h_o$ , dort also verschwinden alle Ableitungen des Profils, d.h.

$$h^{(n)}(\pm\infty) = 0. \quad (2)$$

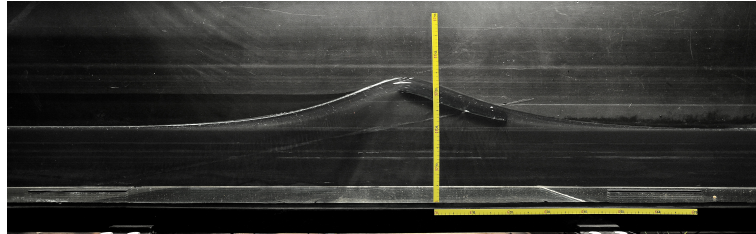


Abbildung 3: Solitärwelle – Foto

## 4 Lösen der Differentialgleichung

Um die Bearbeitung solcher Probleme zu illustrieren wird die DGL nun Schritt für Schritt gelöst - die technischen Details überlassen wir dem Leser.

1. Zeigen Sie mit Hilfe der Annahmen über das asymptotische Verhalten der Welle, dass

$$H = h_o + \frac{q^2}{2gh_o^2}$$

2. Betrachten Sie nun die folgenden Relativwerte  $X := \frac{x}{h_o}$ ,  $y = \frac{h}{h_o}$  und die sogenannte Zufluss-Froudezahl  $f^2 := \left(\frac{q^2}{gh_o^3}\right)$ . Die Froude-Zahl (Formelzeichen:  $Fr$  oder hier  $f$ ) ist eine dimensionslose Kennzahl der Physik. Sie ist nach William Froude (1810 – 1879) benannt und stellt ein Mass für das Verhältnis von Trägheitskräften zu Schwerkraften innerhalb eines hydrodynamischen Systems dar.

Zeigen Sie, dass sich die Gl. (1) reduziert zu der dimensionslosen Gleichung für  $y(x)$

$$1 + \frac{f^2}{2} = y(X) + \frac{f^2}{2y(X)^2} \left( 1 + \frac{1}{3} \left( 2y(X)y''(X) - y'(X)^2 \right) \right) \quad (3)$$

wobei hier  $y'(X) = \frac{dy}{dX}(X)$  usw. Beachten Sie, dass Gl. (3) eine autonome gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung ist – versuchen Sie, diese DGL mit Ihrem Computer zu lösen.

3. (a) Was ist das asymptotische Verhalten von  $y(X)$  und  $y^{(n)}(X)$  falls  $X \rightarrow \pm\infty$ ?  
(b) Überprüfen Sie, dass  $y(X) \equiv 1$  eine Lösung von Gl. (3) ist.
4. Als nächstes wird die Ordnung der Differentialgleichung reduziert. Dazu führen wir die folgende Hilfsfunktion  $p$  ein

$$p(X) := \left( \frac{dy}{dX}(X) \right)^2$$

Zeigen Sie, dass  $\frac{dp}{dX} = 2 \frac{dy}{dX} \cdot \frac{d^2y}{dX^2}$  woraus

$$p'(y) = 2 \frac{d^2y}{dX^2} \quad (4)$$

wobei  $p'$  hier die Ableitung nach  $y$  bedeutet. Also  $\frac{dp}{dX} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dX}$ .

5. Zeigen Sie, dass wir mit Hilfe der Gl. (4) die Gl. (3) reduzieren können zur Gleichung 1. Ordnung

$$y \cdot p'(y) - p(y) = 3(y-1) \left( y + 1 - \frac{2y^2}{f^2} \right) \quad (5)$$

Dies ist eine inhomogene lineare DGL 1. Ordnung

6. (a) Zeigen Sie, dass  $p(y) = Cy$  die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung ist.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Variation der Konstanten, dass die allgemeine Lösung von Gl. (5) gegeben ist durch

$$p(y) = -\frac{3y^3}{f^2} + \frac{6y^2}{f^2} + 3y^2 + 3 + Cy \quad (6)$$

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Randbedingungen  $y(\pm\infty) = 1$  und  $y^{(n)}(\pm\infty) = 0$ , dass  $C = -6 - \frac{3}{f^2}$  und somit

$$p(y) = 3(y-1)^2 \left( 1 - \frac{y}{f^2} \right) \quad (7)$$

7. Mit  $p(X) := \left( \frac{dy}{dX}(X) \right)^2$  und für  $X > 0$  soll die Ableitung von  $y(X)$  negativ sein, also folgt

$$\frac{dy}{dX}(X) = -\sqrt{3}(y-1) \sqrt{1 - \frac{y}{f^2}}$$

(a) Zeigen Sie, dass diese DLG separierbar ist.

(b) Verifizieren Sie mit Hilfe der Substitution

$$z = \sqrt{\frac{f^2 - y}{f^2 - 1}}$$

dass die Lösung gegeben ist durch

$$\frac{-2f}{\sqrt{f^2 - 1}} \operatorname{artanh} \left( \sqrt{\frac{f^2 - y}{f^2 - 1}} \right) = -\sqrt{3}X + C_2 \quad (8)$$

8. Zeigen Sie mit Hilfe von Symmetrieüberlegungen dass  $C_2 = 0$

9. (a) Zeigen Sie nun, dass die Lösung gegeben ist durch

$$y(X) = f^2 - (f^2 - 1) \tanh^2 \left( \frac{\sqrt{3(f^2 - 1)}}{2f} X \right) \quad (9)$$

oder auch

$$y(X) = 1 + \frac{f^2 - 1}{\cosh^2 \left( \frac{\sqrt{3(f^2 - 1)}}{2f} X \right)} \quad (10)$$

(b) Skizzieren Sie den Graph von  $y(X)$

10. Zeigen Sie, ohne abzuleiten, aber durch Überlegung, dass das Maximum von  $y = f^2$  ist und erreicht wird bei  $X = 0$ .

Das Wellenprofil ähnelt einer Gauss'schen Verteilungskurve, entspricht aber einer höheren Eulerfunktion (in unserem Fall  $\cosh^{-2}$ ).

## 5 Weitere Resultate

Die Wellenpropagations-Geschwindigkeit der Solitärwelle beträgt

$$c = (gh_M)^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

Sie hängt deshalb ausschliesslich von der maximalen Wellenhöhe  $h_M$  ab. In einem seichten Teich der Wassertiefe  $h_o = 0.1$  m folgt bei kleiner Wellenhöhe  $c \approx 1$  m/s, im Stausee der Tiefe  $h_o = 100$  m dagegen  $c \approx 35$  m/s, wogegen sich im Marianengraben des Pazifiks durchaus Tiefen von  $h_o = 10'000$  m einstellen, also  $c \approx 330$  m/s, d.h. sich Schallgeschwindigkeit ergibt. Speziell an der Solitärwelle (und den allgemeineren Cnoidalwellen oder gar Flachwasserwellen) ist die horizontale Geschwindigkeits-Verteilung, die sich praktisch über die gesamte Wassertiefe ausbreitet, im Gegensatz zu den typisch von Wind erzeugten Tiefwasserwellen. Man kann also Solitärwellen über den Druckanstieg am Boden ausmessen, was in der Frühwarn-Methode durchgeführt wird. Damit umgeht man das Problem der Wellenerkenntnis beispielsweise mit Satelliten, da sich diese Wellen infolge der grossen Länge so nicht ausmessen lassen.

Wie etwa vom Australier John H. Michell (1863-1940) 1893 beschrieben, brechen Solitärwellen bei einer relativen Maximalhöhe von  $\frac{h_M}{h_o} = 1.78$ . Dies entspricht dem theoretischen Maximalwert, der unterschritten wird, falls der Kanalboden nicht horizontal ist oder eine Rauigkeit aufweist. Abbildung 4 zeigt die brechende Solitärwelle.

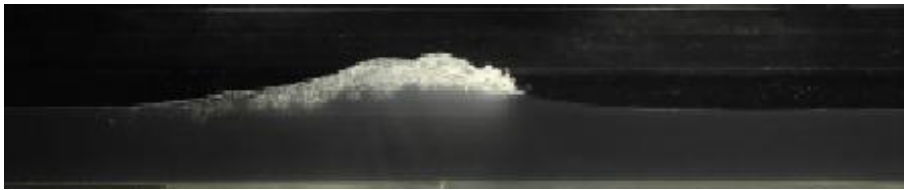


Abbildung 4: Brechende Solitärwelle mit Propagationsrichtung von links nach rechts

## 6 Notation

$c$  = Wellenpropagations-Geschwindigkeit (m/s)

$f^2$  = Quadrat der ungestörten Froudezahl =  $\frac{q^2}{gh_o^3}$

$g$  = Erdbeschleunigung (m/s<sup>2</sup>)

$h$  = Druckhöhe (m)

$h_M$  = Maximal-Wellenhöhe (m)

$h_o$  = Ruhewassertiefe (m)

$H$  = Energiehöhe (m)

$q$  = Durchfluss pro Einheitsbreite (m<sup>2</sup>/s)

$v$  = Geschwindigkeit (m/s)

$x$  = Längskoordinate (m)

## 7 Referenzen

- Boussinesq, J. (1872). Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 17: 55-108.
- Hager, W.H., Hutter, K. (1984). Approximate treatment of open channel flow. *Acta Mechanica* 51(1): 31-48.
- Sander, J., Hutter, K. (1991). On the development of the theory of the solitary wave: A historical essay. *Acta Mechanica* 86(1): 111-152.
- Korteweg, D.J., de Vries, G. (1891). On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary waves. *Philosophical Magazine Series* 5, 39: 422-443.
- Michell, J.H. (1893). The highest waves in water. *Philosophical Magazine Series* 5 36: 430-437.
- Russell, J.S. (1837). Report of the committee of waves. *British Association for the Advancement of Science* 7: 417-496.
- Wehausen, J.V., Laitone, E.V. (1960). Surface waves. *Handbuch der Physik* 9, S. Flügge, ed. Springer: Berlin.

# Mathematik für Ausserirdische

Monika Krichel, Departement Mathematik, ETH Zürich, [communication@math.ethz.ch](mailto:communication@math.ethz.ch)

## Wettbewerb für Schulklassen

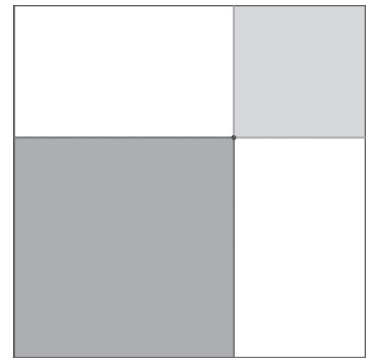
Wie kann man mathematische Gesetzmässigkeiten ohne Formeln und Sprache erklären? Ist es möglich Mathematik mittels Objekten zu vermitteln? Machen Sie den Versuch und basteln Sie zusammen mit Ihrer Klasse ein Objekt, das einen mathematischen Sachverhalt darstellt.

Das Departement Mathematik der ETH Zürich lädt interessierte Schulklassen im Winter 2018/19 zur Wettbewerbsteilnahme ein. Die gebastelten Objekte werden im Rahmen einer zweiwöchigen Ausstellung vom 11. bis 22. März 2019 in der Haupthalle der ETH Zürich ausgestellt und prämiert.

## Ein Mathematik-Objekt als Kommunikationsmittel im All

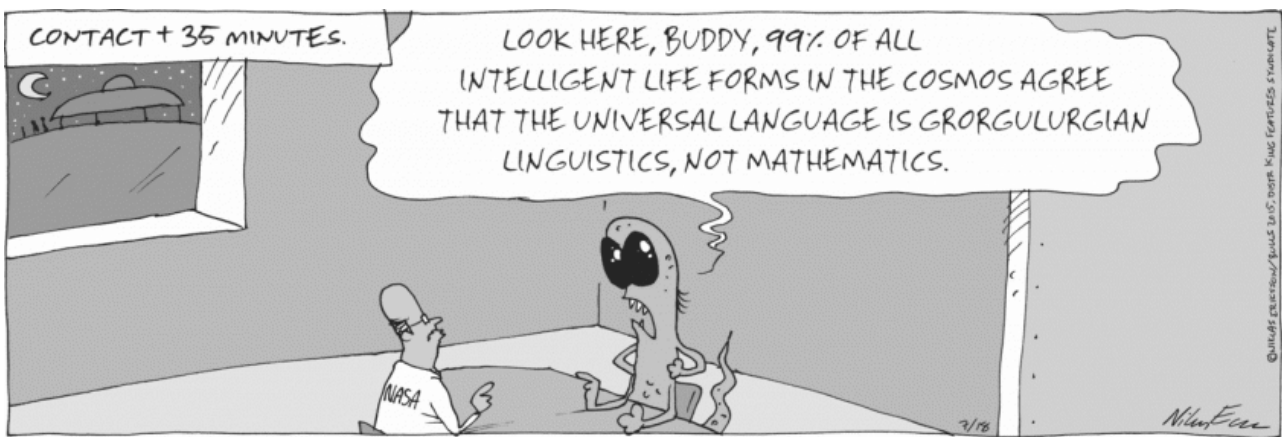
### Aufgabenstellung

Ein Raumschiff soll auf eine Reise in den Weltraum geschickt werden in der Hoffnung, Ausserirdischen zu begegnen um ihnen Botschaften von uns, den Bewohnern der Erde, zu übermitteln. Wir sind stolz auf unsere mathematischen Errungenschaften und wollen diese ins All hinaustragen. Da die Ausserirdischen unsere Sprachen, Texte, Formeln oder Symbole nicht kennen, muss die Aussage in Form eines (zwei- oder dreidimensionalen) Objekts erklärt werden. Allein durch den Blick auf das Objekt sollten die Ausserirdischen in der Lage sein, den mathematischen Inhalt der Nachricht zu erkennen (siehe Beispiel rechts). Konstruieren Sie ein solches Objekt.



### Teilnahmebedingungen

Details zur Aufgabenstellung mit detaillierten Instruktionen und Beispielen zur Lektionengestaltung sowie weitere Informationen über den Ablauf des Wettbewerbs und den Anmeldeformalitäten folgen in einem Brief an die Schulen im Juni 2018. Wir freuen uns über Ihre Teilnahme!



Carpe diem © Niklas Eriksson



## Schweizerische Mathematische Gesellschaft Société Mathématique Suisse

### Ausschreibung der Matura Awards 2018 der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Seit 2010 verleiht die Schweizerische Mathematische Gesellschaft (SMG) alle zwei Jahre einen oder mehrere Preise an Gymnasiastinnen oder Gymnasiasten, die eine hervorragende Maturaarbeit oder ein Projekt im Rahmen des Wettbewerbs "Schweizer Jugend forscht" verwirklicht haben.

Die SMG lädt hiermit interessierte Jugendliche ein, ihre Bewerbungen für die Matura Awards 2018 einzureichen. Zugelassen sind Arbeiten, die im vergangenen oder laufenden Schuljahr abgeschlossen wurden und die in der Mathematik angesiedelt oder interdisziplinär mit einem substantiellen Anteil an Mathematik angelegt sind.

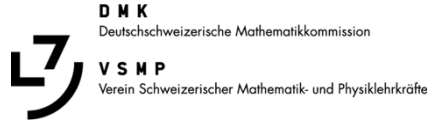
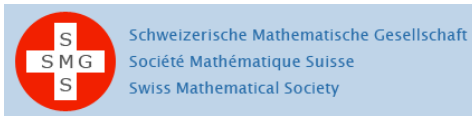
Die Preisverleihung wird im Rahmen des 29. Schweizerischen Tags über Mathematik und Unterricht am 12.9.2018 am Kollegiums St. Fidelis in Stans stattfinden. Schülerinnen und Schüler, die sich bewerben möchten, senden ihre Arbeit als PDF-Datei (oder in zwei gedruckten Exemplaren) zusammen mit ihrer Adresse und einem kurzen CV bis am 30. Juni 2018 an

Jérémy Blanc  
jeremy.blanc@unibas.ch  
Departement Mathematik und Informatik  
Universität Basel  
Spiegelgasse 1  
4051 Basel

Die Jury wird vom Vorstand der SMG zusammengestellt und besteht aus Hochschulangehörigen. Sie wird vom Vizepräsidenten der SMG geleitet. Die Gymnasiallehrkr fte im Fach Mathematik sind höflich gebeten, diese Information an geeignete Kandidatinnen und Kandidaten weiterzuleiten.

Basel, 18. Januar 2018

Jérémy Blanc  
Vizepräsident der SMG



## 29. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht

Die Schweizerische Mathematische Gesellschaft SMG, die Deutschschweizerische Mathematikkommission DMK und die ETH Zürich laden Sie herzlich zu dieser Weiterbildungsveranstaltung ein.

**Ort:** Kollegium St. Fidelis, Stans  
**Datum:** Mittwoch, 12. September 2018  
**Organisation:** Meike Akveld (ETH), Werner Durandi (Kollegium St. Fidelis), Norbert Hungerbühler (ETH)  
**Anmeldung:** bis 2. September 2018

### Programm

Check-in: Kaffee, Orangensaft und Gipfeli; Verkauf von Bons fürs Mittagessen (25 CHF).	09.30 – 10.00 Uhr
Begrüssung	10.00 – 10.15 Uhr
Vortrag: Thomas Weibull (Universität Göteborg) <i>Fourth-degree polynomials and the golden section</i>	10.15 – 11.15 Uhr
Kurze Pause	11.15 – 11.30 Uhr
Workshops (siehe unten)	11.30 – 12.30 Uhr
Mittagessen in Mensa	12.30 – 13.45 Uhr
Workshops (siehe unten)	13.45 – 14.45 Uhr
Kaffeepause	14.45 – 15.15 Uhr
Vortrag: Bernhard Ruh (KS Solothurn) <i>Gruppen, Graphen, Algorithmen im Einsatz bei Schiebepuzzles</i>	15.15 – 16.15 Uhr
Ende der Veranstaltung	16.15 Uhr

### Workshops

Die folgenden Workshops finden je zweimal parallel an der im Programm aufgeführten Zeit statt.

- *Classical quadrature of polygonal regions*, Thomas Weibull (Universität Göteborg)
- *Maschinelles Lernen am Gymnasium?*, Wolfgang Gehrig (Kollegium St. Fidelis)
- *Kryptowährung am Beispiel Bitcoin*, Urs Zellweger (Kollegium St. Fidelis)
- *Jugendliche mit grossen mathematischen Defiziten*, Christian Rüede (ETH)
- *Endliche homogene Markov-Ketten am Gymnasium?*, Arno Gropengiesser (Liceo di Lugano 1)
- *Das neue DMK-Stochastiklehrmittel: Mit der Einstiegsaufgabe mitten ins Thema*, René Kaeslin (KS Zug) und Nora Mylonas (Alte Kantonsschule Aarau)
- *Differentialgleichungen im Grundlagenfach*, Meike Akveld (ETH) und Michael Bucher (KS Stadelhofen)

Weitere Informationen zu den Vorträgen, Workshops, Anreise sowie das Anmeldeformular finden Sie unter [www.math.ch/TMU2018](http://www.math.ch/TMU2018)

# Gender und Mathematikunterricht

Ella Stein, LG Rämibühl, ella.stein@lgr.ch

## Einleitung

„Ach, wieder eine Russin!“, rief der Mathematik-Fachdidaktiker aus, als er mich am Tag meiner Lehrdiplom-Prüfung sah. „Schon die zweite in diesem Monat und keine Schweizerinnen!“ Tatsächlich, auch in meinem Fachdidaktik-Kurs war ich die einzige Frau. Warum eigentlich? Die Geschichte zeigt, dass das Interesse der Frauen an Mathematik schon immer bestand und dass es berühmte Mathematikerinnen (obwohl als Ausnahme) schon in der Antike gab. Warum sehe ich in meinen Kursen „Anwendungen der Mathematik“, die eine „höhere“ und kompliziertere gymnasiale Mathematik vermitteln, mehr Männer als Frauen, obwohl der Frauenanteil an den Gymnasien deutlich höher liegt (bei 57% im 2011) als der Anteil der Männer (SKBF, 2014) und aus meiner Erfahrung mehr Schülerinnen als Schüler gute Noten in Mathematik haben? Ist es typisch? Ist es symptomatisch? Warum sind die Frauen in mathematiknahen Studienrichtungen und in mathematikaffinen Berufen untervertreten? Sind sie von Natur aus weniger dafür geeignet? Oder werden sie durch ihre Erziehung und ihre Umwelt davon abgehalten? Warum ist es in der Schweiz (in der entwickelten Welt allgemein) so und im Iran anders? Warum war es in der Sowjetunion anders? Zu diesen Fragen wollte ich schon immer mehr Sachkenntnisse sammeln. Die Gelegenheit bot sich in einem freien Semester, das ich an der ETH Zürich forschend verbrachte. Dabei ist dieser - sehr persönliche - Bericht als Quellenzusammenfassung entstanden. Er zeigt nur eine kleine Auswahl aus der schier unendlichen Menge von Publikationen zum Thema.

## Statistische Daten

Die statistischen Daten bezüglich Mädchen / jungen Frauen in der Mathematik und anderen mathematiknahen Fächern machen die Gründe meines Interesses am Thema „Gender und Mathematikunterricht“ deutlich. In allen entwickelten Ländern ist die Situation ungefähr gleich.

Die Schweizer Statistiken zeigen (SKBF, 2014), dass die Leistungsunterschiede zwischen Mädchen und Knaben in Bezug auf Mathematik und Sprache am Ende der Primarstufe klein sind. Schon an der Sekundarstufe I zeigt sich aber ein unausgewogenes Bild: deutlich mehr Knaben weisen gute Mathematikleistungen (12% der Knaben, 4% der Mädchen) und deutlich mehr Mädchen gute Sprachleistungen (24% der Mädchen, 8% der Knaben) auf, wobei ausgewogen gute Leistungen bei gleich vielen Knaben und Mädchen (25%) vorliegen. Zu Beginn der Sekundarstufe II können sich noch fast gleich viele Mädchen und Jungen einen MINT-Beruf in der Zukunft vorstellen (19.2% vs. 19.8%) – im Vergleich dazu der Pisa-Schnitt 23.9% vs. 25.0% (PISA, 2015). Der Anteil der dann tatsächlich MINT-wählenden Männer ist aber um mind. 50% höher, als der der Frauen. Eine Abmilderung schafft die Wahl der Medizin/Pharmazie und insbesondere der Biologie. Innerhalb der Fachbereichsgruppen sind grosse Variationen im Frauenanteil festzustellen. So beträgt das Geschlechterverhältnis Frauen-Männer in den exakten Wissenschaften 1:5. In den letzten 20 Jahren konnte die Gendersegregation nur geringfügig verbessert werden. Hingegen gestaltet sich der Übertritt von Bachelor- zum Master- und von Master- zum Doktoratstudium in der Schweiz bei mathematiknahen Studienrichtungen fast unabhängig vom Geschlecht. Der Anteil der Professorinnen erreicht aber nur in Ausnahmefällen die vom Bund angestrebten 25%. Ähnlich sieht es bei mathematiknahen Studienrichtungen an den Fachhochschulen aus.

Die sehr inhomogenen Europa-Daten (OECD, 2014) zeigen, dass der Anteil der Frauen bei den mathematiknahen Studiengängen normalerweise (viel) geringer ist als der Anteil der Männer.

## Gender und Mathematikunterricht

Die mathematikbezogenen Genderdaten interessieren und polarisieren. Warum kommt es zu diesen statistischen Resultaten? Einige Autoren stellen interessante Thesen auf (Grevholm, 1997):

- Die Beurteilungen und die Prüfungen sind auf Männer/Knaben ausgerichtet.
- Die Prägung durch (Lehr-)Bücher und Vorbilder ist männlich.
- Die „neutralen/sterilen/lebensentückten“ Lehrbücher und Lernumgebungen sprechen die Frauen/Mädchen zu wenig an.
- Die Lehrpersonen beachten die Schülerinnen weniger und behandeln sie anders als die Schüler.
- Die Frauen/Mädchen sind nicht bereit, das Risiko einer mathematikbasierten Karriere auf sich zu nehmen.

Die gängige Meinung begründet die Unterschiede damit, dass die Frauen:

- nicht logisch denken können,
- den Männern in Mathematik immer unterlegen sind, da sie weniger begabt sind,
- von Natur aus so gebaut sind, dass sie keinen Erfolg in Mathematik haben können.

## Biologische Grundlagen / Begabung

Worauf beruhen diese Meinungen? Gibt es dafür organische Gründe? Die Sexualdimorphismen (sekundäre Geschlechtsmerkmale) sind bei Männern und Frauen auf verschiedenen Ebenen des Zentralnervensystems zu finden (Güntürkün, 2011). Allerdings täuscht der Eindruck, dass die Unterschiede zwischen den Geschlechtern gross sind oder sich deutlich nachweisen lassen. Die Unterschiede sind nur in einigen klar umrissenen Bereichen des Gehirns und folglich des Verhaltens zu finden. Und selbst dort sind die Unterschiede innerhalb eines Geschlechts grösser, als die Unterschiede zwischen den Geschlechtern.

Es gibt keine Geschlechtsunterschiede in Grösse (relativ zur Körpergrösse) oder Komplexität des Gehirns. Weibliche Gehirne sind symmetrischer, männliche spezialisierter (Grammer, et al., 2011). Weil die verschiedenen Fähigkeiten um den physischen Platz im Gehirn konkurrieren, wird z.B. angenommen, dass die räumliche Orientierung die sprachlichen Fähigkeiten verdrängt. Da die Frauen evolutionär mehr kommunizieren müssten, haben sie bessere sprachliche Fähigkeiten auf Kosten von räumlicher Orientierung entwickelt. Allerdings, wird dabei in der Regel das „männliche“ Orientierungsvermögen getestet. Das „männliche“ und das „weibliche“ Orientierungsvermögen unterscheiden sich aber grundlegend: Männer orientieren sich an den Himmelsrichtungen, Frauen hingegen an Landzeichen.

Es wurde gezeigt (Jansen, 2011), dass Objektrotationsvorgänge bei Männern und bei Frauen verschiedene Hirnregionen stimulieren. Dies sind auch die am stärksten ausgeprägten kognitiven Unterschiede zwischen Männern und Frauen (Jordan, et al., 2002). Allerdings sind die Resultate der Objektrotationen bei beiden Geschlechtern ähnlich, obwohl verschiedene Strategien eingesetzt werden. In anderen räumlichen Bereichen wurden keine konsistenten Unterschiede gefunden. Ob diese Befunde mathematikrelevant sind, wurde noch nie untersucht.

## Gesellschaftliche Grundlagen

Die Faktoren, die Geschlechtsunterschiede begünstigen, sind vielfältig (Quaiser-Pohl, 2011). Sie machen aus einem Mädchen eine Frau und aus einem Jungen einen Mann. Nicht nur Gene und Hormone, sondern auch das Leben in einer bestimmten Gesellschaft trägt als nicht-biologischer Faktor zur Entwicklung von Geschlechtsunterschieden bei.

Die historische Perspektive auf Genderfragen in Mathematik im Einbezug der Einflüsse der Bildungspolitik und der außerschulischen Faktoren (Rossi Becker, et al., 2010) zeigt, dass die Mathematikwahrnehmung sich zwischen dem 7. und 18. Lebensjahr stark verändert und sich immer mehr in Richtung männlich und einflussreich verschiebt. Mathe-Unterstützungs-Programme, inkl. schülerinnenzentrierten Unterricht und Studium-/Karriere-Informationen, die durch als Vorbild dienende Frauen nur für Mädchen erteilt werden, können die Entwicklung eines positiven Selbstkonzepts in Bezug auf Mathematik bei Mädchen begünstigen. Dadurch kann die Leistung, die Selbsteinschätzung und -sicherheit der Mädchen bezüglich Mathematik verbessert und ihre Karrierewahl in Richtung MINT verschoben werden.

## Mathematik und Weiblichkeit

Der fehlende Zusammenhang zwischen Mathematik und Weiblichkeit taucht in mehreren Quellen auf. Obwohl die Konnotation von „Streber“ nicht unbedingt negativ ist, ist sie immer negativ, wenn es um eine „Streberin“ geht (Pomeroy, 2016). Demzufolge ist das Wort Mathematikerin nicht sexy. Die Mathematik wird von begabten Frauen abgewählt, nicht nur weil sie als zu schwierig / komplex oder ungeeignet betrachtet wird, sondern auch aus dem einfachen Grund: Mathematik ist nicht sexy!

Die gut- /schlecht-sein-in-Mathematik-Grenze überlappt sich mit Mann-/Frau-sein-Grenze (Solomon, et al., 2016). Als Folge muss die Frau, die Mathematik treiben will, sich „unsichtbar“ machen oder bereit sein, ihre Genderzugehörigkeit zu kompromittieren. Die Schwierigkeit, Frauen in Richtung Mathematik zu bewegen, hat ihren Ursprung in dem gelebten Widerspruch zwischen Mathematik und Weiblichkeit. Die meisten Frauen nehmen diesen Widerspruch als Hindernis und nicht als Herausforderung wahr. Das Überwinden dieser Schwierigkeiten stärkt den Charakter und strukturiert den Gender. Es entsteht die Fähigkeit, eine Mischbildung, eine Hybridisierung des Weiblichen und des Mathematischen zu schaffen. Diese Hybridisierung kann durch das bloße Wissen um die Rolle und die Wichtigkeit der Mathematik in der Gesellschaft beschleunigt werden. Macht sich da eine Bresche auf, in die die Schule springen könnte?

## Selbstkonzept und Risikobereitschaft der Frauen

Hat die These des niedrigen Selbstkonzepts bei Frauen Bestand? Die Untersuchung der Selbstkonzepte hochbegabter und nicht hochbegabter Schüler beider Geschlechter (Benölken, 2014) ergab, dass die Hochbegabten, unabhängig vom Geschlecht, und die männlichen „Unbegabten“ ihre Erfolge in Mathematik internal begründen und ihre Misserfolge external. Die „unbegabten“ Mädchen hingegen begründeten ihre Erfolge external und ihre Misserfolge internal. Eine noch nicht bewiesene Deutung bietet sich an: Nicht alle mathematikbegabten Mädchen wurden als solche identifiziert (wegen ihrer niedrigen Selbsteinschätzung?), was zum schlechteren Selbstkonzept bezüglich Mathematik führt.

Offenbar fällt es den jungen Frauen schwer, aus der für sie von der Gesellschaft vorgesehenen Rolle auszubrechen. Ist die fehlende Risikobereitschaft der Frauen daran schuld? Die Untersuchungen der Risikobereitschaft der Frauen in Bezug auf die Finanzmärkte (Schubert, et al., 1999) und (Schubert, et al., 2000) haben gezeigt: Frauen neigen zu mehr Risikoaversion als Männer. Allerdings ist der Kontext bei Risikoentscheidungen relevant. Bei bekannten Risiken demonstrieren Frauen und Männer ähnliche Risikoaversion, im Fall von abstrakten Risiken (Glücksspiele) zeigen die Frauen ein zu Männern umgekehrtes Verhaltensmuster: Je kompetenter (oder selbstüberschätzender) die Männer sind, desto risikoscheuer, je kompetenter die Frauen sind (oder sich einschätzen), desto risikobereiter. In lebensbezogenen Zusammenhängen, wo die Risiken nicht so eindeutig sind, spielt auch die „Verpackung“ der Risiken eine Rolle. Auch da ist die Kompetenz relevant: Frauen sind weniger für profitable Gelegenheiten und mehr für die Verlustmöglichkeiten empfindlich (Schubert, 2006).

Diese Schlussfolgerungen könnten die Aversion der (jungen) und kompetenten Frauen bezüglich Mathematik erklären: da sie kompetent sind und genau wissen, was sie gesellschaftlich zu verlieren haben, scheuen sie sich, sich mit Mathematik zu befassen.

Eine in die Bildungslandschaft passende Strategie (Fehr-Duda, et al., 2011), diese Tendenz bei den Frauen zu brechen, wäre es, bei einer bereits existierenden guten Stimmung die Gewichtung der Risiken vornehmen zu lassen: Frauen in guter Stimmung bewerten die Wahrscheinlichkeiten optimistischer als normal.

## Geographie der Mathematik

Die Welt kommt ins Klassenzimmer und hinterlässt dort ihre Spuren. Und obwohl die Mathematik, der Mathematikunterricht und die MINT-bezogenen Berufe universal sein dürften, hat die Geographie einen Einfluss auf die Mathematikaffinität der jungen Frauen.

Die männliche Dominanz in den MINT-Berufen ist erstaunlicherweise in wohlhabenden Gesellschaften viel stärker ausgeprägt als in armen Gesellschaften (M. Charles, 2014). Eine Analyse der mathematikbezogenen Berufe in 53 Ländern zeigt, dass die in den Einstellungen verankerte Genderkluft in den wohlhabenden „postmaterialistischen“ Ländern viel grösser ist. Mehr als das: Mädchen und Jungen in diesen Gesellschaften sehen die Mathematik in negativerem Licht. Was wahrscheinlich mit den grösseren Möglichkeiten zur existenziell gesicherten Selbstbehauptung in diesen Gesellschaften zu tun hat. Diese existenzielle Sicherheit entkräftet die Notwendigkeit, Berufe zu ergreifen, die eintragsreicher, aber auch scheinbar ärmer an Selbstverwirklichungsmöglichkeiten sind. Mädchen sind von diesem Phänomen am meisten betroffen, was mit ihrem Verstehen von innerem authentischem Selbst zu tun hat, das keine Mathematik zulässt.

In diesem Zusammenhang ist es besonders interessant, die Situation der Frauenbildung in der Sowjetunion unter die Lupe zu nehmen (Sylvester, 2017). Dort haben die Wichtigkeit und das Prestige, welche den MINT-bezogenen Fächern beigemessen wurde, die extensive Förderung talentierter Mädchen, die Unterstützung der Lehrer und der Eltern und die exzellenten Vorbilder (wie die Kosmonautin Valentina Tereschkova) in einer bekräftigenden kulturellen Umwelt das Wunder der Frauenbeteiligung in den MINT-Berufen vollbracht – ca. 41% aller MINT-Wissenschaftler im heutigen Russland sind Frauen (Archangelskaya, 2017).

Ein weiteres Beispiel kommt aus den Orient. Im Iran, wo das Finden einer bezahlten Stelle für Frauen schwierig ist, suchen Frauen nach Wegen, sich zu profilieren und dieser Weg führt durch hervorragende Leistungen in MINT-Fächern / Berufen. 70% der Studenten in mathematikaffinen Berufen sind weiblich (Guttman, 2015). Der glorreiche Werdegang der Iranischen Mathematikerin und ersten (bis jetzt einzigen) weiblichen Laureatin der Fields-Medaille Maryam Mirzakhani zeigt die möglichen Perspektiven auf.

## Vorschläge zum Frauen bejahenden Mathematikunterricht

- Mathematikbegabungsbeurteilung nicht an die Beurteilung der (männlichen) räumlichen Fähigkeiten knüpfen. Mädchen für ihre Mathematikerrungenschaften loben.
- Die Mathematik und ihre Implementationen und Auswirkungen bei Schülerinnen (und anderen Beteiligten) bekannter, attraktiver und cooler machen (auch durch das Präsentieren von Vorbildern).
- Die Mädchen / jungen Frauen darin bestärken, MINT-affine Fächer an der Schule zu wählen.
- Die Stimmung der Schülerinnen während der Mathematikstunden heben.
- eine positive Atmosphäre schaffen, einen «persönlichen», «beseelten» Unterricht betreiben, um dadurch die Bereitschaft, Risiken einzugehen zu fördern und die Wahl in Richtung Mathematik zu verschieben.
- Die Universalität und die Globalität der Mathematik betonen und ihre Vorteile in der modernen Gesellschaft hervorheben.

Manche Lehrer wählen diese Strategie ganz intuitiv, andere brauchen ein wenig Ermunterung. Dabei darf nicht vergessen werden, dass Frauen und Männer zwar biologisch nicht gleich aber gleichwertig sind und beide Geschlechter müssen so unterrichtet werden, dass ihr mathematischer Verstand eine Chance bekommt, sich zu entwickeln.

## Referenzen

- Archangelskaya, S., 2017. Girl power: Is it easy to be a female scientist in Russia?. *Russia Beyond*. [Online].
- Benölken, R., 2014. Begabung, Geschlecht und Motivation. *Journal für Mathematik-Didaktik*, Band 35.
- Fehr-Duda, H., Epper, T., Bruhin, A. & Schubert, R., 2011. Risk and rationality: The effects of mood and decision rules on probability weighting. *Journal of Economic Behavior & Organization*.
- Fiebig, J. N., 2011. *Gifted Girls: Education and Career. Where will Their Education and Career Path Take Them?*.
- Grammer, K., Oberzaucher, E., Holzleitner, I. J. & Haslinger, B., 2011. *Sexy Gehirne: Evolution, Hormone und Denken*.
- Grevholm, B., 1997. Gender and Mathematiks.. *Nonlinear Analysis, Theory Methods and Applications*, Vol. 30(No. 8).
- Güntürkün, O., 2011. *Gehirn und Geschlecht*.
- Guttman, A., 2015. *Set To Take Over Tech: 70% Of Iran's Science And Engineering Students Are Women*. [Online].
- Jansen, P., 2011. *Zwischen Mythos und Realität. Geschlechtsunterschiede in der räumlichen Fähigkeiten*.
- Jordan, K. et al., 2002. Women and men exhibit different cortical activation patterns during mental rotation tasks. *Neuropsychologia*, 40(13), pp. 2397-2408.
- M. Charles, B. H. E. C. A. H., 2014. Who likes math where? Gender differences in eighth-graders' attitudes around the world. *International Studies in Sociology of Education*, Band 24 (1), pp. 85-112.
- OECD, 2014. *OECD Statistics: Education and Skills*.
- PISA, 2015. *Ergebnisse im Fokus*.
- Pomeroy, D., 2016. Interpreting unproblematic high achievement in mathematics: toward theoretical reflexivity. *Gender and Education*, p. 1 – 16.
- Quaiser-Pohl, C., 2011. *Psychologische Unterschiede zwischen Frauen und Männern*.
- Rossi Becker, J., Forgasz, H., Steinhorsdottir, O. B. & Lee, K.-H., 2010. *International Perspectives on Gender and Mathematics Education: an Overview. A Volume in: Cognition, Equity & Society: International Perspectives*.
- Schubert, R., 2006. Analyzing and Managing Risks – on the Importance of Gender Differences in Risk Attitudes.. *Managerial Finance*, Band 32 (9), pp. 706-715.
- Schubert, R., Brown, M., Gysler, M. & Brachinger, H. W., 1999. *Financial Decision-Making: Are Women Really More Risk-Averse?*. s.l.: AEA Papers and Proceedings.
- Schubert, R., Gysler, M., Brown, M. & Brachinger, H.-W., 2000. *Gender Specific Attitudes Towards Risk and Ambiguity: An Experimental Investigation..* s.l.:Institut für Wirtschaftsforschung, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich.
- SKBF, 2014. *Bildungsbericht Schweiz 2014*, Aarau: Schweizerische Koordinationsstelle für Bildungsforschung.
- Solomon, Y., Radovic, D. & Black, L., 2016. "I can actually be very feminine here": contradiction and hybridity in becoming a female mathematician. *Educational Studies in Mathematics*, Band 91 (1), pp. 55-71.
- Sylvester, R., 2017. *Russian History Blog*. [Online].

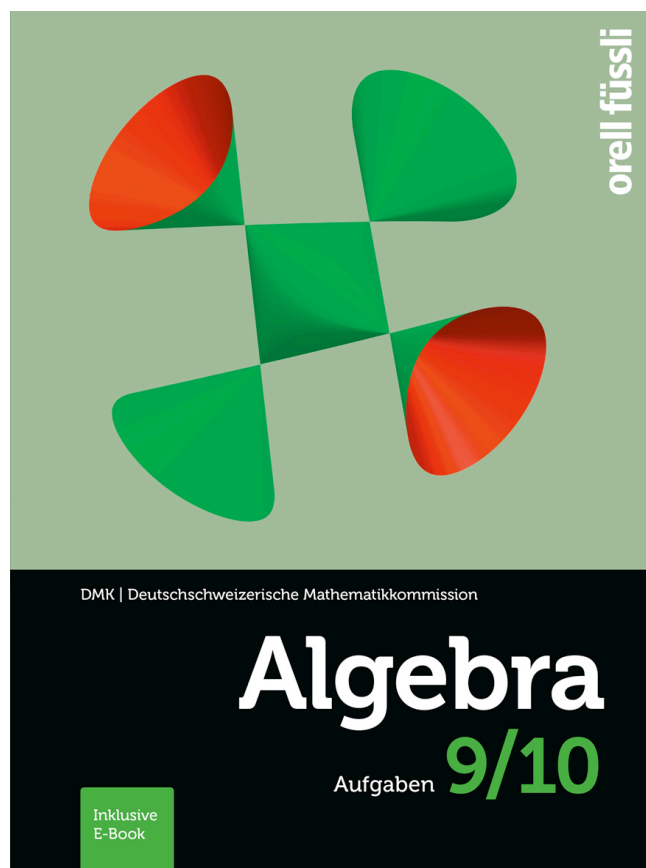
# Algebra 9/10

Der zweite Band der von der DMK herausgegebenen Neubearbeitung ist erschienen!

Die Aufgabensammlung «Algebra 9/10» ist als Fortsetzung der «Algebra 7/8» für den Algebra-Unterricht im Grundlagenfach konzipiert. Sie orientiert sich am 'KANON Mathematik' und startet mit einem Brückenskapitel, das der Repetition von Bekanntem dient und einen möglichst reibungs-freien Einstieg ermöglicht. Die weiteren Kapitel enthalten vielfältige Aufgaben, die durch bewusst kurz gefasste Theorieblöcke ergänzt werden, und schliessen mit den Unterkapiteln 'Vermischte Aufgaben' sowie 'Kontrollaufgaben' ab. Die Ergebnisse der Aufgaben mit ungeraden Nummern sind nach den Anhängen 'Reelle Zahlen' und 'Funktionen' am Ende des Aufgabenbandes abgedruckt; die Ergebnisse sämtlicher Aufgaben sind in einem separaten Ergebnisband zugänglich.

Das von Cornelia Gehrler (Luzern), Margit Kopp (Widnau SG), Andreas Stahel (Basel), Hansjürg Stocker (Wädenswil ZH) und Reto Weibel (Gossau SG) für diese Neuausgabe übernommene und frisch zusammengetragene umfangreiche Aufgabenmaterial ermöglicht den Schülern und Schüle-rinnen nicht nur das selbstständige Erkunden und Erkennen von Strukturen, Mustern oder Gesetz-mässigkeiten, sondern es dient ebenso dem syntaktischen Festigen und explorativen Vertiefen. Da-zwischen kommen stets auch offene(re) Fragestellungen vor und punktuell stehen zusätzliche The-men zur Verfügung, die sich für das Schwerpunktfach eignen.

Das komplette DMK-Lehrmittelprogramm ist hier zu finden: <http://dmk.vsmg.ch/page/de/lehrmittel>



NEU

## Algebra 9/10

### Aufgaben

inklusive **E-Book**

1. Auflage 2018

304 Seiten, 17×23 cm, gebunden

ISBN 978-3-280-04072-0

Fr. 39.–

### Ergebnisse

inklusive **E-Book**

1. Auflage 2018

152 Seiten, 17×23 cm, broschiert

ISBN 978-3-280-04074-4

Fr. 45.–

Orell Füssli Verlag

Bestellungen: [www.ofv.ch/learnmedien](http://www.ofv.ch/learnmedien)

## Meilensteine der Rechentechnik

De Gruyter Oldenbourg, Berlin/Boston 2018

2 Bände, 2., völlig überarbeitete und stark erweiterte Auflage, 1600 Seiten

Herbert Bruderer, ETH Zürich, [bruderer@retired.ethz.ch](mailto:bruderer@retired.ethz.ch); [herbert.bruderer@bluewin.ch](mailto:herbert.bruderer@bluewin.ch)

Das preisgekrönte Werk „Meilensteine der Rechentechnik“ liegt in der 2., völlig neu bearbeiteten und stark erweiterten Auflage vor. Die beiden Bände, die im Ganzen rund 1600 Seiten umfassen, sind ein Gesamtwerk, lassen sich aber auch einzeln nutzen. Diese Schrift behandelt sowohl analoge wie digitale Geräte und geht auf benachbarte Bereiche wie Automatenbau (z.B. Figuren- und Musikautomaten, Automatenuhren) sowie wissenschaftliche Instrumente (z.B. Himmelskunde, Vermessungswesen, Uhrmacherkunst) ein. Gestreift werden zudem frühe Schreibmaschinen und programmgesteuerte mechanische Webstühle.

Schwerpunkte des ersten Bandes sind: Grundlagen, mechanische Rechenmaschinen, Rechenschieber, historische Automaten, Entwicklung der Rechenkunst, Schritt-für-Schritt-Anleitungen für analoge und digitale Rechengeräte. Alle wichtigen Fachbegriffe werden erklärt. Die weltweit prachtvollsten Rundbaurechenmaschinen und Androiden werden in Wort und Bild vorgestellt. Das Buch enthält ferner grundsätzliche Betrachtungen zu Themen wie Digitalisierung und künstliche Intelligenz sowie zur Rolle der Technikgeschichte und der Erhaltung des technischen Kulturguts.



Abbildung 1 – Titelseite von Band 1

Der zweite Band widmet sich überwiegend den Elektronenrechnern: Erfindung des Computers, weltweite Entwicklung der Rechentechnik, insbesondere in Deutschland, England und der Schweiz. Er schließt überdies je ein Fachwörterbuch Deutsch-Englisch und Englisch-Deutsch ein. Die sollen das Lesen anspruchsvoller fremdsprachiger Texte und Übersetzungen fördern. Hinzu kommt eine umfassende weltweite Bibliografie.



Abbildung 2 – Titelseite von Band 2

Beide Bände berichten über aufsehenerregende neue Funde von Dokumenten und Gegenständen (u.a. weltgrößte serienmäßig gefertigte Rechenwalze, weltweit kleinster mechanischer Parallelrechner, erster mechanischer Prozessrechner), sie eignen sich auch als Nachschlagewerke. Sie sind allgemein verständlich und richten sich an alle, die Freude haben an Technik-, Mathematik-, Informatik- und Kunstgeschichte.

- Mehrsprachige Bibliografie zur Mathematik-, Informatik-, Technik- und Naturwissenschaftsgeschichte mit über 5000 Einträgen
- Fachwörterbuch Deutsch-Englisch und Englisch-Deutsch mit je 4000 Einträgen
- 18 Schritt-für-Schritt-Anleitungen für die Bedienung historischer analoger und digitaler Geräte
- >400 Abbildungen, >100 tabellarische Übersichten, zahlreiche Zeittafeln
- ausführliches Personen-, Orts- und Sachverzeichnis.

### Stimmen zur ersten Auflage

Steven Deckelman (Mathematical Association of America, August 2016):

„This impressive new book by Herbert Bruderer is an extensive in-depth scholarly history of mathematics and computer science with a focus on computing technology in German lands. This book is a must-have for anyone interested in the history of mathematics and computer science as well engineering (especially mechanical and electrical), technology and the history of science.“

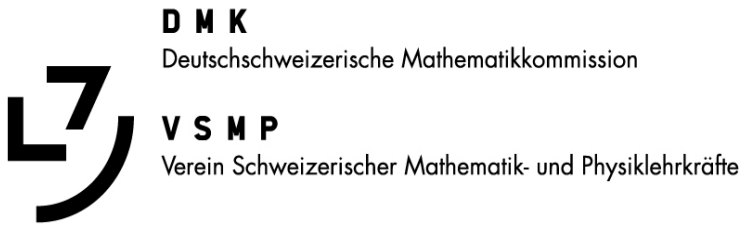
Thomas Sonar (Mathematische Semesterberichte, März 2017):

„Der Autor Herbert Bruderer hat mit diesem Buch tatsächlich einen Meilenstein der Technikgeschichte geschrieben, der in keiner Bibliothek fehlen sollte. Herbert Bruderer hat ein Werk vorgelegt, das sich sicher schnell als Standardwerk und Klassiker etablieren wird.“

Rainer Gebhardt (Jahrbuch des Adam-Ries-Bundes, 2016):

„Insgesamt stellt das Werk eine sehr fundierte Zusammenstellung zu Analog- und Digitalrechnern dar. Es ist das bisher umfangreichste Nachschlagewerk zur Geschichte der Computer.“

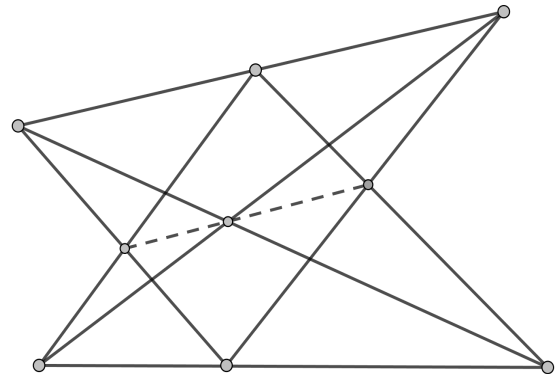
*Bezugsquellen:* [www.degruyter.com](http://www.degruyter.com) sowie Buchhandel



## Weiterbildungskurs

# "Projektive Geometrie"

Nach einer Einführung in das Rechnen in der reellen projektiven Ebene, werden die Vorzüge der projektiven Geometrie gegenüber der euklidischen Geometrie aufgezeigt. Mit Hilfe von Doppelverhältnissen und den Strahlensätzen werden dann die Sätze von Menelaos, Ceva, Desargues, Pappos, Carnot, Pascal und Brianchon bewiesen. Zum Schluss wird ein neuer Beweis des Satzes von Poncelet präsentiert, welcher nur auf dem Satz von Pascal beruht, und ein Einblick in weitere neue Resultate über Kegelschnitte wird auch nicht fehlen.



Zielpublikum:	Lehrkräfte der Sekundarstufe II Mathematik
Referent:	PD Dr. Lorenz Halbeisen, Dozent für Logik und Mengenlehre an der ETH Zürich
Organisation:	Prof. Dr. Norbert Hungerbühler (ETH), Daniela Grawehr (DMK)
Datum und Zeit:	Mittwoch, der 6. Juni 2018, 9:30 Uhr – 16:00 Uhr
Kursort:	ETH Zürich, Hauptgebäude Raum G 19.1
Kurskosten:	CHF 120 (inkl. Mittagessen und Kaffeepausen) CHF 100 für VSMP-Mitglieder ( <a href="http://www.vsmf.ch">www.vsmf.ch</a> )
Anmeldung:	<a href="http://math.ch/DMK2018c">http://math.ch/DMK2018c</a>
Anmeldeschluss:	30.05.2018

## Hinweis auf ein bemerkenswertes Skript im Bereich Anwendungen der Mathematik

Franz Meier, DMK & Scuola Svizzera di Milano, [franz.e.meier@bluewin.ch](mailto:franz.e.meier@bluewin.ch) und Hansruedi Schneebeli

MATH MODELING – GETTING STARTED AND GETTING SOLUTIONS

K.M. Bliss, K.R. Fowler, B.J. Galluzzo

<https://m3challenge.siam.org/resources/modeling-handbook>

Ein Recyclingproblem in einer kleineren Stadt oder die Frage wie sich eine Krankheit ausbreitet – zwei bekannte Themen. Neben anderen Problemstellungen werden diese beiden Themen ausführlich in den Phasen: DEFINING THE PROBLEM STATEMENT – MAKING ASSUMPTIONS – DEFINING VARIABLES – BUILDING SOLUTIONS – ANALYSIS AND MODEL ASSESSMENT – PUTTING ALL TOGETHER dargelegt. Dabei werden insbesondere die mathematische Modellierung thematisiert und die Voraussetzungen beleuchtet, welche für ein gutes Gelingen zu beachten sind.

Mit der vorgelegten Art der Erarbeitung von Einsichten und Ergebnissen wird eine gute Grundlage gelegt für eine erfolgreiche Mathematikanwendung – auch nach der Matur und in vielen Fachbereichen. Der Link eignet sich insbesondere als Leitlinie, Muster und Ratgeber im Zusammenhang mit Projektarbeiten von der Themenwahl zur Vorbereitung, systematischen Entwicklung und strukturierten Realisierung bis zur Bewertung. Eine starke Empfehlung für jede Art von Projektarbeiten, insbesondere Maturaarbeiten im NAWIMAT-Bereich.

Insgesamt: ein sorgfältig erarbeitetes und gut gemachtes Dokument. Bitte prüfen und weiterempfehlen!

## Zwei Lösungswege für eine Gleichung – Wozu eigentlich? Aus der laufenden Studie „MathFlex“

Christian Hämmerle, Christian Rüede und Fritz Staub

### Zur Studie

Die aktuell laufende Studie MathFlex<sup>1</sup> widmet sich einem ausgewählten Bereich des Algebraunterrichts der Sekundarstufe 2. Die Projektleitung basiert auf der Kooperation zwischen einem Fachdidaktiker (PD Dr. Christian Rüede, Fachhochschule Nordwestschweiz) und einem Lehr-Lernforscher (Prof. Dr. Fritz Staub, Universität Zürich). Die Algebra wurde gewählt, weil sie als besonders zentrales Fundament für die ihr folgende Mathematik und weiterer Wissenschaften gilt.

Herausforderungen für die Vermittlung von algebraischem Wissen und Können erörtern wir im Folgenden exemplarisch anhand eines Algebraleistungstests zu quadratischen Gleichungen aus der MathFlex-Studie. Ohne auf die Studie insgesamt einzugehen, wollen wir damit unsere Vorstellung eines wirksamen Algebraunterrichts darstellen, wie wir ihn im Rahmen der Studie zu entwickeln und evaluieren suchen.

Bisher sind 34 verschiedene Maturitätsklassen aus 11 deutschschweizerischen Kantonen an der Studie beteiligt. Im Folgenden beziehen wir uns auf Erhebungen, welche in 8 dieser Klassen von Lehrpersonen ohne vorausgegangene Weiterbildung direkt nach einer Unterrichtseinheit zu quadratischen Gleichungen erfolgten. Die Länge der Unterrichtseinheit und das minimale Lernziel waren standardisiert: Der Algebraunterricht schloss in jeder Klasse die Thematisierung von Quadratwurzeln, die Einführung einer Auflösungsformel für quadratische Gleichungen sowie die Diskussion der Anzahl Lösungen einer quadratischen Gleichung ein. Die Setzung der konkreten Inhalte und Unterrichtsmethoden blieb hingegen den Lehrpersonen vorbehalten. In einem nicht notenrelevanten Test waren unter anderem Gleichungen der folgenden Art möglichst schnell zu lösen:

$$\text{a) } x - x(3x + 4) = 5 - x(3x + 4)$$

$$\text{b) } (x - 3)^2 = 25$$

Eine erste Analyse der Lösungen von 134 Schülerinnen und Schülern aus 5 Gymnasial- und 3 Fachmittelschulklassen zeigt, dass die Gleichung a) von rund einem Drittel und die Gleichung b) von der Hälfte der Schülerinnen und Schüler nicht richtig gelöst werden konnte. Dies erstaunt, da die Lösungen „einfach zu sehen“ wären und die algebraische Struktur der zweiten Gleichung im Rahmen der quadratischen Ergänzung im Unterricht vorgekommen ist. Eine zusätzliche Analyse der angewandten Lösungsmethoden zeigt weiter, dass viele Schülerinnen und Schüler in einem ersten Schritt ausmultipliziert haben: 90% bei der Gleichung a) und gut 50% bei der Gleichung b).

<sup>1</sup> MathFlex ist das Akronym für das vom Schweizerischen Nationalfond finanzierte Projekt 100019\_162686 / 1 mit dem Titel „Förderung von algebraischer Flexibilität. Wirkungen von Weiterbildungen zum Vergleichen von Lösungswegen im gymnasialen Mathematikunterricht“.

Mit diesem Schritt beschreiten die Schülerinnen und Schüler einen gewohnten, vermeintlich sicheren Weg. Von Sicherheit kann jedoch keine Rede sein: Von denjenigen, die zuerst ausmultiplizieren, findet für die Gleichung a) ein Drittel keine richtige Lösung, für die Gleichung b) sogar zwei Drittel.

## Mangelndes algebraisches Verständnis der Schülerinnen und Schüler

Zur Lösung von Gleichung a) mit der Äquivalenzumformung „ $+x(3x - 4)$ “ zu operieren oder für die Lösung von Gleichung b) das Wurzelziehen und die Fallunterscheidung zu nutzen, kommt in den Lösungswegen der Schülerinnen und Schüler kaum vor. Es dominiert die Strategie des Ausmultiplizierens. Die Mehrheit der Schülerinnen und Schüler kann die in den Gleichungen vorkommenden Terme wie  $x(3x + 4)$  oder  $(x - 3)^2$  nur als „Rechnungen“ interpretieren und rechnen diese gemäss den (bereits auf der Sekundarstufe 1) erlernten Automatismen aus. Die Reduktion der Interpretation eines algebraischen Ausdrucks auf eine unmittelbar auszuführende Handlung wie in diesem Fall „Multipliziere aus!“ ist aus mathematischer Perspektive eine starke Einschränkung des algebraischen Verständnisses.

90% der Schülerinnen und Schüler nehmen also die Bedeutung der gleichen Summanden  $-x(3x + 4)$  nicht wahr, sondern rechnen aus, was sie ausrechnen können. Dieses Interpretieren von Termen als Rechnungen ist Ausdruck eines mangelnden Verständnisses allgemeiner mathematischer Gesetze und Regeln. Beispielsweise ist aus mathematischer Sicht das Ausmultiplizieren von  $-x(3x + 4)$  eine Anwendung des Distributivgesetzes  $a(b + c) = ab + ac$ . Dieses Gesetz ist als Gleichheit formuliert, doch für 90% der Schülerinnen und Schüler ist das kaum eine Gleichheit. Für sie ist nämlich die linke Seite der Gleichung eine Rechnung, die rechte Seite das „sich ergebende“ Resultat. Die beiden Seiten sind für diese Schülerinnen und Schüler wohl erst dann „gleich“, wenn die linke Seite ausmultipliziert ist. Aus einer solchen Schülerperspektive ist das Distributivgesetz  $a(b + c) = ab + ac$  eine einzelne Rechnung, keine Darstellung des allgemeinen distributiven Zusammenhangs und somit nicht handlungsleitend und daher unwichtig. Für diese Schülerinnen und Schüler ist die Mathematik eine Welt des Rechnens und Ausrechnens, wo sie doch eine Welt der Zusammenhänge und des Darstellens ist.

Es ist fraglich, ob eine Intensivierung des individuellen Übens dieses eingeschränkte algebraische Verständnis zu erweitern vermag. Denn zu einem grossen Teil dient das Üben in den gängigen Algebralehrmitteln der Schweiz der Automatisierung eines (!) Verfahrens zu einem (!) Gleichungstyp. Damit verfestigt sich aber das Fehlkonzept, eine Gleichung als Befehl aufzufassen, etwa die Gleichungen a) und b) als „Multipliziere aus!“.

## Multiple Lösungswege vergleichen

Um die Schülerinnen und Schüler zu einem verstehensorientierten Gleichungslösen zu führen, das mathematisches Wissen und Können verbindet, schlagen wir vor, im Klassengespräch Gleichungen zu diskutieren, bei der sich zwei (richtige) Lösungswege anbieten.

Denn zwei Lösungswege greifen zwei Interpretationen derselben Gleichung auf, mit denen sich die Schülerinnen und Schüler auseinandersetzen müssen. Die Gleichung wird zum Denkgegenstand. Im Klassengespräch können die beiden Interpretationen (mitsamt ihren Konsequenzen) kontrastiert werden, was die Charakteristika der einzelnen Interpretationen deutlicher macht und die damit ver-

bundenen Konzepte ausführt. Dass das Aufzeigen multipler Interpretationen und somit multipler Lösungswege den Lernenden hilft, verstehensorientiert mit den Handwerkszeugen der Algebra umzugehen, konnte durch die amerikanische Forschergruppe um Rittle-Johnson und Star (2009) empirisch belegt werden. Folgend eine Aufgabe aus dem Bereich der linearen Gleichungen (ebd., S. 533):

Nathan's Solution:	Patrick's Solution:
$5(y + 1) = 3(y + 1) + 8$ $5y + 5 = 3y + 3 + 8$ <i>Distribute</i> _____ $5y + 5 = 3y + 11$ <i>Combine</i> _____ $2y + 5 = 11$ <i>Subtract</i> _____ <i>on Both</i> $2y = 6$ <i>Subtract</i> _____ <i>on Both</i> $y = 3$ <i>Divide</i> _____ <i>on Both</i>	$5(y + 1) = 3(y + 1) + 8$ $2(y + 1) = 8$ <i>Subtract</i> <u><math>3(y + 1)</math></u> <i>on Both</i> $y + 1 = 4$ <i>Divide</i> _____ <i>on Both</i> $y = 3$ <i>Subtract</i> _____ <i>on Both</i>

Dieses Beispiel zeigt die zwei Lösungswege der Gleichung  $5(y + 1) = 3(y + 1) + 8$ , von Nathan und Patrick. Während Nathan den Weg über das Ausmultiplizieren, Zusammenfassen und Isolieren der Variablen wählt, erkennt Patrick den identischen Klammerterm auf beiden Seiten der Gleichung. Der Vergleich der beiden Lösungswege legt das Hauptaugenmerk auf das mit dem Gleichungslösen verbundene konzeptuelle Wissen und nicht auf das individuelle Lösen der Gleichung.

Die Klasse muss die einzelnen Lösungswege zuerst verstehen, wozu in obigem Beispiel die zu füllenden Lücken für die Lösungsschritte dienen. Der Kern des Unterrichts bildet jedoch die Gegenüberstellung und der explizite Vergleich der beiden Lösungswege im Rahmen eines Klassengesprächs, das nach dem individuellen Studium der Lösungswege geführt werden kann. Gegenstand dieses Klassengesprächs müssten die beiden Interpretationen von  $5(y + 1) = 3(y + 1) + 8$  sein. Eine Leitfrage dazu könnte lauten: Was sieht Nathan bei der Gleichung, was Patrick? Mit Hilfe von Farben könnte im Unterricht die Interpretation in Patricks erster Zeile sowie die dazu passende Interpretation des Distributivgesetzes sichtbar gemacht werden. Bei Nathans Weg könnten analoge Färbungen hergestellt werden, um schliesslich durch Kontrastierung Gemeinsamkeiten und Unterschiede in Nathans und Patricks Interpretation zu verdeutlichen. Neben dem Sichtbarmachen und dem Kontrastieren der beiden Interpretationen lässt sich der Blick weiter auf die Lösungswege als Ganzes richten. Die Abfolge der Umformungsschritte beider Wege oder die unterschiedliche Länge der Lösungswege könnten thematisiert werden: Beurteile die Effizienz und den Schwierigkeitsgrad der beiden Lösungswege. Dabei lassen sich die Lösungsstrategien herausarbeiten, Übersichten erstellen, Vor- und Nachteile benennen, wo jeweils die eine oder andere Strategie einfacher ist. Interessant könnte es auch sein zu fragen, unter welchen Gegebenheiten die beiden Wege möglich und zielführend sind. Was passiert beispielsweise, wenn die Variable an einem anderen Ort steht (z. B. als Vorfaktor auftritt), ein anderer Klammerterm oder eine neue Variable eingeführt wird? Durch solche Fragen wird in der Besprechung mit der Klasse das Verstehen des Gleichungslösens aktiv gefördert, was erklären könnte, warum solche Vergleiche auf die algebraische Leistung einer Klasse lernförderlich wirkt.

## Unsere Weiterbildung: Algebra und Klassengespräche

Unsere Hypothese ist, dass auch im deutschschweizerischen Kontext der Einsatz solcher Vergleiche von Lösungen für die Schülerinnen und Schüler eine Hilfe für den verstehensorientierten Umgang mit Termen und Gleichungen ist. Entscheidend für die Lernwirksamkeit solcher Aufgaben ist jedoch

die Passung der zu vergleichenden Gleichungen und den zugehörigen Fragestellungen mit den Lernzielen und dem Vorwissen. Um diese klassenspezifische Passung zu fördern und zu unterstützen, ist im Rahmen von MathFlex eine Weiterbildung für Mathematiklehrpersonen entstanden, welche einerseits den Zweck und das Konzept solcher Vergleiche von Lösungswegen mit konkretem Unterrichtsmaterial aufzeigt, andererseits der Umsetzung im eigenen Unterricht im gegenseitigen Austausch und mit der Expertise der Leitenden gewidmet ist und auch den Transfer auf Bereiche wie Geometrie, Funktionen etc. unterstützt.

Vergleiche von Lösungswegen können sicher nicht alle Herausforderungen des Algebraunterrichts lösen. Aber sie stellen eine erwiesenen lernwirksame Möglichkeit dar, wie verstehensorientiertes Gleichungslösen gestärkt werden kann. Indem Schülerinnen und Schüler algebraische Terme und Gleichungen nicht nur umformen, sondern auch besser lesen und verstehen lernen, wird das gefördert, was im Folgeunterricht die Grundlage der Algebra ausmacht: Das Interpretieren von Ausdrücken, Gleichungen und Formeln.

---

## Literatur

Rittle-Johnson, B. & Star, J. R. (2009). Compared with What? The Effects of Different Comparisons on Conceptual Knowledge and Procedural Flexibility for Equation Solving. *Journal of Educational Psychology*, 101 (3), 529–544.

---

Interessierte an der Weiterbildung Algebra und Klassengespräche von MathFlex wenden sich per Mail bis zum 2.7. 2018 an [christian.rueede@fhnw.ch](mailto:christian.rueede@fhnw.ch).

Informationen zur Weiterbildung erhalten Sie unter

[http://www.weiterbildung.uzh.ch/programme/wbmat\\_detail.php?angebnr=1274](http://www.weiterbildung.uzh.ch/programme/wbmat_detail.php?angebnr=1274).

Wir freuen uns auf Ihre Teilnahme!



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich  
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

## **Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht Vorankündigung Herbstsemester 2018**

Die Vorträge finden jeweils am Donnerstag um 17.15 Uhr im Hörsaal HG G 3 des Hauptgebäudes der ETH Zürich statt. Abgeschlossen werden die Veranstaltungen mit einem Apéro im HG G 69 (D-MATH Common Room).

### **Daten und Referenten**

- **Donnerstag, 25. Oktober 2018: Raj Spielmann**
- **Donnerstag, 8. November 2018: Manu Kapur**
- **Donnerstag, 22. November 2018: Özlem Imamoglu**
- **Donnerstag, 6. Dezember 2018: Franz Lemmermeyer**

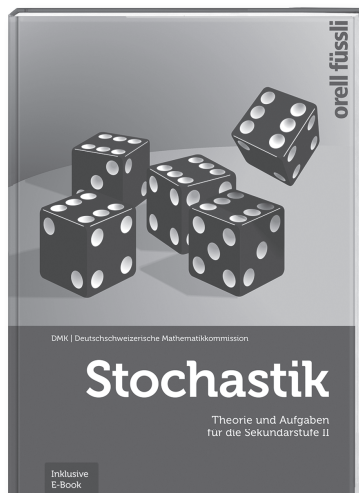
Die Titel der Vorträge sowie die Abstracts werden auf <https://www.math.ethz.ch/mathematik-und-ausbildung/weiterbildung/kolloquium.html> sowie in der Bulletin-Ausgabe von Ende September 2018 veröffentlicht.

Herzlich laden ein: N. Hungerbühler, J. Hromkovič, M. Akveld, H. Klemenz

# Stochastik

**NEU** AB SOFORT  
ERHÄLTlich

## Das neue Lehrmittel der DMK für die Sekundarstufe II



DMK (Hrsg.)  
E. Frenzel, F. Glötzner, H. Künsch,  
N. Mylonas, Hj. Stocker

### **Stochastik**

**Theorie und Aufgaben  
für die Sekundarstufe II**

**inklusive E-Book**

1. Auflage 2018

184 Seiten, 18,4 × 26,5 cm

broschiert mit Klappe

978-3-280-04139-0

Fr. 35.–

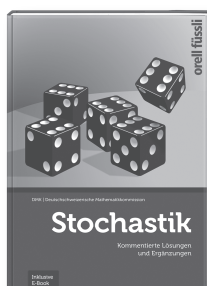
 **BLICK INS BUCH:**  
[www.ofv.ch/learnmedien](http://www.ofv.ch/learnmedien)

Das neue Lehrmittel deckt den Unterrichtsstoff für Stochastik mit den Teilgebieten Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik vollständig ab. Der Inhalt wurde von Lehrpersonen im Unterricht umfassend erprobt und ist konform mit dem «Kanon Mathematik», in welchem der Stochastik mehr Gewicht verliehen wurde.

Anhand von interessanten Fragestellungen und Problemen aus dem Alltag werden die Lerninhalte und Begrifflichkeiten vermittelt. Jedes Kapitel enthält Theorieteile, vielfältige und anwendungsbezogene Aufgaben sowie numerische Lösungen. Separat ist ein Lösungsband mit Kommentaren und Ergänzungen für Lehrpersonen erhältlich.

### **Inhaltsübersicht:**

- Beschreibende Statistik
- Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung
- Kombinatorik
- Mehrstufige Zufallsexperimente
- Bedingte Wahrscheinlichkeit
- Zufallsgrösse und Erwartungswert
- Binomialverteilung
- Testen von Hypothesen
- Die Normalverteilung als Approximation der Binomialverteilung



DMK (Hrsg.)

### **Stochastik**

**Kommentierte Lösungen  
und Ergänzungen**

**inklusive E-Book**

1. Auflage 2018

96 Seiten, 18,4 × 26,5 cm

broschiert

978-3-280-04144-4

Fr. 79.–

 **BLICK INS BUCH:**  
[www.ofv.ch/learnmedien](http://www.ofv.ch/learnmedien)



### **E-Books «Fachmedien Orell Füssli Verlag»**

- in der App «Fachmedien Orell Füssli Verlag» offline oder unter <http://reader.ofv.ch> online sofort verfügbar
- beliebig erweiterbar mit eigenen Notizen
- nützlich angereichert mit diversen Verlinkungen und interaktiven Funktionen

**Bestellen Sie online über  
[www.ofv.ch/learnmedien](http://www.ofv.ch/learnmedien)**

**orell füssli** Verlag

# Permutations à points fixes dans les probabilités

Eugène Pasquier, eu.pasquier@hispeed.ch

## Résumé

La résolution de certains problèmes permet d'introduire et de relier entre eux différents concepts mathématiques. La situation proposée ci-après me semble particulièrement favorable à ce genre d'activité.

## 1 Le problème des permutations sans point fixe

On dispose de  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  et  $n$  boîtes également numérotées de 1 à  $n$ . On place au hasard une boule dans chaque boîte. Déterminer la probabilité qu'aucune boule ne soit placée dans la boîte portant son numéro. En faisant l'hypothèse que les événements élémentaires sont équiprobables, il s'agit de calculer le nombre de cas favorables à l'événement considéré, c'est-à-dire le nombre de permutations n'ayant aucun point fixe. On appellera dorénavant dérangement un tel événement. Si le nombre des permutations de l'ensemble  $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$  est  $n!$ , nous noterons  $d_n$  le nombre des éléments de l'ensemble  $D_n$  des dérangements de  $E_n$ . Dès lors la probabilité qu'aucune boule parmi les  $n$  boules données ne soit placée dans la boîte portant son numéro est égale à  $p_n = \frac{d_n}{n!}$ .

### 1.1 Première relation de récurrence

Calcul de  $d_n$  pour quelques petites valeurs de  $n$

<p><b>n=1</b></p> $E_1 = \{1\}$ $D_1 = \{\}$ $d_1 = 0$	<p><b>n=2</b></p> $E_2 = \{1, 2\}$ $D_2 = \{(1\ 2)\}$ $d_2 = 1$	<p><b>n=3</b></p> $E_3 = \{1, 2, 3\}$ $D_3 = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ $d_3 = 2$
<p><b>n=4</b></p> $E_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ $D_4 = \{(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2)\}$ $d_4 = 9$		

### Autre point de vue pour le calcul de $d_4$

On peut aussi considérer toutes les permutations  $f$  de  $E_4$  et ôter celles qui possèdent au moins un point fixe ( $f(p) = p$  pour un  $p \in E_4$ ).

Le nombre de permutations de  $E_4$  qui contiennent  $k$  points fixes est  $C_k^4 d_{4-k}$ . On a donc :

$$\begin{aligned}
 d_4 &= 4! - (1 + C_3^4 d_1 + C_2^4 d_2 + C_1^4 d_3) \\
 &= 24 - (1 + 0 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 2) \\
 &= 24 - 15 = 9
 \end{aligned}$$

Pour  $d_5$  on trouve :

$$d_5 = 5! - (1 + C_4^5 d_1 + C_3^5 d_2 + C_2^5 d_3 + C_1^5 d_4)$$

En prolongeant le raisonnement pour  $d_n$ , on obtient :

$$d_n = n! - (1 + C_{n-1}^n d_1 + C_{n-2}^n d_2 + \dots + C_1^n d_{n-1}) \tag{1}$$

On vérifie aisément que l'on obtient les mêmes valeurs que dans le calcul précédent.

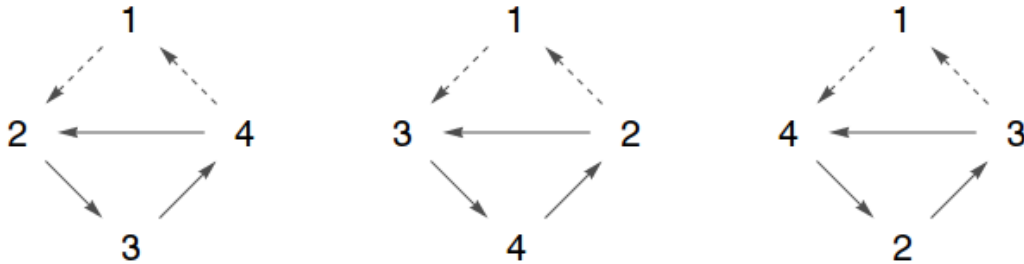
### 1.2 Deuxième relation de récurrence

La formule ci-dessus est peu commode, car elle exige le calcul préalable et le stockage de toutes les valeurs de  $d_k$ ,  $k < n$ . Nous allons trouver une formule de récurrence qui ne fait intervenir que  $d_{n-1}$  et  $d_{n-2}$  dans le calcul de  $d_n$ .

#### Partition de l'ensemble $D_n$

Considérons d'abord l'ensemble  $A_n$  des permutations de  $D_n$  telles que  $f(1) = k$  et  $f(k) = 1$ . Il y a  $n - 1$  possibilités de choisir  $k = f(1)$ . Le nombre d'éléments de  $A_n$  est donc égal à

$$a_n = (n - 1) d_{n-2}$$



Considérons ensuite l'ensemble  $B_n$  des permutations de  $D_n$ , complémentaire de  $A_n$  par rapport à  $D_n$ , et notons  $b_n$  le nombre de ces permutations.

$$f \in B_n \Leftrightarrow f(1) = k \text{ et } f(h) = 1 \text{ pour } h \neq k$$

A chaque permutation  $f$  de  $B_n$  on peut associer une permutation  $g$  de l'ensemble  $\{2, 3, \dots, n\}$  comme suit.

Si  $f(1) = k$  et  $f(h) = 1$ , on pose  $g(h) = k$ . Dans les autres cas,  $g(p) = f(p)$

Etant donné que toute permutation se décompose en permutations circulaires disjointes et en tenant compte que pour chacune de ces dernières on peut appliquer le schéma ci-dessus, on en déduit alors qu'une permutation  $g$  donnée peut provenir de  $n - 1$  dérangements différents de  $B_n$ . On a dès lors

$$b_n = (n - 1) d_{n-1}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} d_n &= a_n + b_n \\ &= (n - 1) d_{n-2} + (n - 1) d_{n-1} \\ &= (n - 1) (d_{n-1} + d_{n-2}) \end{aligned} \tag{2}$$

Connaissant  $d_1 = 0$  et  $d_2 = 1$  on peut calculer  $d_n$  de proche en proche en ne conservant en mémoire que les deux dernières valeurs obtenues.

### 1.3 Troisième relation de récurrence

On peut améliorer la formule (2) comme suit :

$$\begin{aligned} d_n &= (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}) \\ \Leftrightarrow d_n - n d_{n-1} &= -(d_{n-1} - (n-1)d_{n-2}) \end{aligned}$$

Posons  $u_n = d_n - n d_{n-1}$  et montrons que  $u_n = (-1)^n$  en utilisant un raisonnement par récurrence.

**n=2**

$$u_2 = d_2 - 2 d_1 = 1 - 0 = 1 = (-1)^2$$

**n=3**

$$u_3 = d_3 - 3 d_2 = 2 - 3 \cdot 1 = -1 = (-1)^3$$

**n ↦ n+1**

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= d_{n+1} - (n+1) d_n = n(d_n + d_{n-1}) - (n+1) d_n \\ &= n d_{n-1} - d_n = -(d_n - n d_{n-1}) \\ &= -u_n = (-1)(-1)^n = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

On en déduit que  $d_n - n d_{n-1} = (-1)^n$  et

$$d_n = (-1)^n + n d_{n-1} \tag{3}$$

### 1.4 Formule explicite pour le calcul de $p_n$

$$p_n = \frac{d_n}{n!} = \frac{(-1)^n + n d_{n-1}}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{d_{n-1}}{(n-1)!}$$

D'où

$$p_n = p_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{2} = \frac{1}{2!} \\ p_3 &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \\ p_4 &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \\ p_n &= \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned} \tag{4}$$

On reconnaît le développement de  $e^{-1}$ . Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{e}$$

De la formule (4), on déduit alors que le nombre de permutations sans point fixe est

$$d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

## 2 Le problème de permutations avec un nombre donné de points fixes

Intéressons-nous maintenant à la probabilité que  $k$  boules exactement aient été bien placées. Considérons d'abord un ensemble particulier où exactement  $k$  boules ont été bien placées. La probabilité qu'aucune des  $n - k$  boules restantes ne soit bien placée est

$$1 - 1 + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}$$

On en déduit que le nombre de cas où, pour l'ensemble particulier choisi, aucune des  $n - k$  boules ne soit bien placée est

$$(n-k)! \left( 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \right)$$

Comme il y a  $\binom{n}{k}$  manières de choisir ces  $k$  boules bien placées, il y a donc

$$\binom{n}{k} (n-k)! \left( 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \right)$$

éventualités où exactement  $k$  boules sont bien placées. La probabilité de retrouver exactement  $k$  boules bien placées est ainsi égale à

$$\begin{aligned} & \frac{\binom{n}{k} (n-k)! \left( 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \right)}{n!} \\ = & \frac{n! (n-k)! \left( 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \right)}{(n-k)! k! n!} \\ = & \frac{1 - 1 + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}}{k!} \\ = & \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \end{aligned}$$

On constate que la variable aléatoire indiquant le nombre de boules bien placées suit une loi de Poisson avec  $\lambda = 1$  et  $\mu = 1$ .

Le problème présenté dans cet article est également appelé problème des rencontres. On en trouvera un exemple d'application dans le problème des chapeaux de l'exercice 29 p.38 de l'ouvrage "Probabilités" publié par la CRM.



## Schweizerische Mathematische Gesellschaft Société Mathématique Suisse

### Annonce du Prix “Matura Awards 2018” de la Société mathématique Suisse

Tous les deux ans depuis 2010, la Société mathématique suisse (SMS) attribue un ou plusieurs prix à des collégiens/gymnasiens/lycéens qui ont réalisé un travail de maturité exceptionnel ou un projet dans le cadre du concours «La science appelle les jeunes».

La SMS invite les jeunes intéressés à soumettre leur candidature pour les Matura Awards 2018. Les travaux qui ont été complétés dans la dernière ou l'année scolaire actuelle et qui sont basés en mathématiques ou interdisciplinaires avec une proportion substantielle de mathématiques sont autorisés.

La cérémonie de remise des prix aura lieu le 12 septembre 2018 au Collège de St. Fidelis à Stans lors de la 29e Journée suisse des mathématiques et de l'enseignement (“29. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht”).

Les élèves qui veulent postuler envoient leur travail sous forme de fichier PDF (ou en deux exemplaires imprimés) avec leur adresse et un court CV jusqu'au 30 juin 2018 à

Jérémy Blanc  
jeremy.blanc@unibas.ch  
Departement Mathematik und Informatik  
Universität Basel  
Spiegelgasse 1  
4051 Basel

Le jury est composé par le conseil d'administration de SMG et se compose de membres de l'université. Il est présidé par le vice-président de SMG.

Les enseignants de mathématiques du secondaire sont priés de transmettre cette information aux candidats.

Bâle, le 18 janvier 2018

Jérémy Blanc  
Vice-président de la SMS

## Puissances de 2 et de 3

Christian Aebi, Collège Calvin, Geneva, Switzerland 1211, christian.aebi@edu.ge.ch

**Préambule.** *L'origine du texte ci-dessous est une lettre remise à Jacques Fleury, directeur du Collège Calvin de 1986 à 2009, lors de son départ à la retraite [1].*

### Petit jeu de calcul

**Problème 1.** *Peut-on écrire tout nombre premier sous la forme d'une somme ou d'une différence de deux termes, chacun étant une puissance de 2 ou de 3 ?*

Pour entrer en matière, il n'est pas inutile d'énumérer quelques puissances de 2 et de 3 :

$$2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, 2^6 = 64, 2^7 = 128 \text{ et} \\ 3^0 = 1, 3^1 = 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81, 3^5 = 243 \text{ et } 3^6 = 729.$$

Combinons ces puissances en effectuant des sommes ou des différences de deux termes, afin de générer le plus de premiers consécutifs possibles :

$$\begin{array}{lll} 2 = 2^0 + 3^0, & 3 = 2 + 3^0, & 5 = 2 + 3, \\ 7 = 3^2 - 2, & 11 = 2^3 + 3, & 13 = 2^2 + 3^2, \\ 17 = 2^3 + 3^2, & 19 = 3^3 - 2^3, & 23 = 2^5 - 3^2, \\ 29 = 2 + 3^3, & 31 = 2^2 + 3^3, & 37 = 2^6 - 3^3, \\ 41 = 2^5 + 3^2, & 43 = 2^4 + 3^3, & 47 = 2^7 - 3^4. \end{array}$$

*Remarque.* L'unicité de l'écriture n'est pas garantie, puisque l'on a aussi que  $19 = 2^4 + 3$ .

### Et 53 alors ?

**Problème 2.** *Comment passer d'une équation 'exponentielle' à une courbe elliptique ?*

Le fait que 53 ne puisse s'écrire sous la forme d'une *somme* de deux termes dont l'un est une puissance de 2 et l'autre de 3 se vérifie facilement en effectuant les  $6 \cdot 4$  combinaisons possibles des sommes de ces derniers, chacun d'entre eux étant strictement plus petit que 53. D'une manière similaire,  $4^2$  calculs permettent de s'assurer que  $|3^n - 2^m| \neq 53$ , quels que soient les nombres naturels  $n$  et  $m$  inférieurs à 4. Pour la suite, on suppose donc que  $m$  et  $n$  sont plus grands ou égaux à 4.

La clef de la solution, concernant  $|3^n - 2^m|$  réside dans une utilisation judicieuse du calcul modulo un nombre bien choisi. Tout d'abord, prouvons que l'équation  $3^n - 2^m = 53$  n'admet aucune solution entière. En effet, il suffit de la regarder dans  $\mathbb{Z}_8$  pour qu'elle devienne  $3^n \equiv 5 \pmod{8}$ . Or, cette congruence est absurde, puisque si  $n$  est pair on a  $1 \equiv 5 \pmod{8}$  et si  $n$  est impair, on a  $3 \equiv 5 \pmod{8}$ .

Ensuite, montrons que l'équation  $2^m - 3^n = 53$  n'admet aucune solution entière. Comme  $m > 3$  alors en la regardant dans  $\mathbb{Z}_{16}$ , on obtient  $-3^n \equiv 5 \pmod{16}$ . Or, les puissances de 3 dans  $\mathbb{Z}_{16}$  sont  $3 \rightarrow -7 \rightarrow -5 \rightarrow 1$ , d'où  $n = 4 \cdot k + 3$ . D'autre part, si l'on observe notre équation dans  $\mathbb{Z}_{27}$ , on obtient  $2^m \equiv -1 \pmod{27}$ . D'où, en considérant les puissances de 2 dans  $\mathbb{Z}_{27}$ ,  $2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow -11 \rightarrow 5 \rightarrow 10 \rightarrow -7 \rightarrow 13 \rightarrow -1$ , l'on déduit que  $m = 18 \cdot l + 9$ . Substituons, puis récrivons l'équation sous la forme :  $53 = 2^{3 \cdot (6l+3)} - 3^{4k+3} = (2^{6l+3})^3 - 27 \cdot (3^{2k})^2$ . Posons  $x := 2^{6l+3}$  et  $y := 3^{2k}$  pour obtenir finalement la *courbe elliptique*  $x^3 - 27y^2 = 53$ .

## Un aller-retour !

**Problème 3.** *Quel regard porter sur  $x^3 - 27y^2 = 53$  pour conclure ?*

De prime abord, on pourrait imaginer devoir utiliser l'artillerie de la théorie des courbes elliptiques. Or, une petite astuce, qui m'a tout de même demandé sept jours de cogitation active et passive, permet de porter l'estocade finale au problème. Il suffit de regarder  $x^3 - 27y^2 = 53$  dans  $\mathbb{Z}_7$  et oh ! surprise, l'équation devient  $x^3 + y^2 \equiv 4 \pmod{7}$ . Or,

1. les seuls cubes dans  $\mathbb{Z}_7$  sont 0, 1 et 6 et
2. les seuls carrés sont 0, 1, 2 et 4.

Par conséquent, on aurait  $x \equiv 0 \pmod{7}$ , alors que  $x = 2^{6l+3}$ . □

## Postscriptum

Le problème traité ci-dessus de manière élémentaire est conjecturé dans l'ouvrage [2]. Sa preuve pourrait être contenue sur une demi-page A4. Sous cette dernière forme elle devrait paraître à l'avenir dans l'*American Mathematical Monthly*. L'intérêt de cette note est davantage de présenter une narration de recherche et de tenter de sensibiliser un littéraire, J. Fleury, au monde fascinant de l'arithmétique. Une question qui me turlupine encore et que je soumetts à mes chers lecteurs est de prouver qu'il existe une infinité de nombres premiers ne pouvant pas s'écrire sous la forme  $|2^n \pm 3^m|$ .

## Références

- [1] URL : [http://icp.ge.ch/po/calvin/espace-pedagogique/math/cours-de-c.-aebi/J\\_Fleury.pdf/](http://icp.ge.ch/po/calvin/espace-pedagogique/math/cours-de-c.-aebi/J_Fleury.pdf/)
- [2] Chris K. Caldwell, G. L. Honaker, Jr *Prime Curios! The Dictionary of Prime Number Trivia*, Reference / Trivia, Nov 04 2009, Cf. <https://primes.utm.edu/curios/>

# La cosmologie et la relativité générale au gymnase : Exemple d'une séquence sur l'effet de lentille gravitationnelle

Alice Gasparini, Université de Genève, [alice.gasparini@unige.ch](mailto:alice.gasparini@unige.ch), Collège Rousseau, [maria-alice.gasparini@edu.ge.ch](mailto:maria-alice.gasparini@edu.ge.ch)

## Le projet pédagogique

À l'occasion du centenaire de la relativité générale (novembre 2015), le pôle national de recherche SwissMAP (« The Mathematics of Physics ») a lancé un projet pédagogique visant à introduire auprès des élèves des écoles secondaires (collèges, gymnases, lycées) les notions de base de la relativité générale et de la cosmologie. Ce projet a abouti à un cours et un livre<sup>1</sup> sur ces sujets, dont l'originalité est celle d'avoir un niveau de transition se situant entre le « zéro équations » adressé au large public et la géométrie tensorielle réservée aux spécialistes universitaires : il se base uniquement sur les notions de mathématiques et physique enseignées au secondaire post obligatoire. Le but de ce projet n'est donc pas de remplacer les contenus traditionnellement enseignés dans les lycées, mais plutôt de les consolider tout en traitant des contenus motivants pour les élèves.

La création de ce cours a eu la chance de s'étendre sur trois années exceptionnelles pour la cosmologie moderne avec la première détection historique des ondes gravitationnelles, et a abouti à un livre édité aux Presses Polytechniques et Universitaires Romandes. Ce manuel comprend 9 chapitres, allant de l'introduction à l'astrophysique jusqu'aux ondes gravitationnelles, en passant par l'effet de lentille gravitationnelle, les trous noirs et les équations cosmologiques. Sept annexes complètent le cours afin d'intégrer et/ou d'approfondir les notions complémentaires dont l'élève pourrait avoir besoin pour une compréhension aisée du cours principal. Chaque chapitre possède une série d'exercices y relatifs avec leur correctif, ces documents sont librement disponibles sur le site SwissMAP.

Ce cours peut être dispensé dans sa version intégrale sur deux semestres à raison de 2 périodes par semaine, par exemple dans le cadre d'un cours à option complémentaire. Mais il constitue également une « boîte à outils », où les contenus et/ou les exercices peuvent être choisis de manière ponctuelle, et insérés selon le niveau dans un cours « traditionnel » de physique et application des mathématiques.

De plus, les sujets traités constituent une base idéale pour le développement de travaux de maturité ou simplement une lecture pour toute personne ayant les bases en physique et mathématiques et une curiosité pour les sujets traités.

---

<sup>1</sup> A. Gasparini, *Cosmologie & relativité générale, Une première approche*, PPUR (2018).

<http://www.ppur.org/produit/876/9782889152094/Cosmologie%20%20relativite%20generale%20>

A. Gasparini & A. Müller *Cosmologie & relativité générale, Activités pour les élèves du Secondaire II*, SwissMAP, Université de Genève (2017).

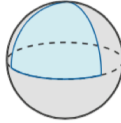
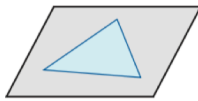
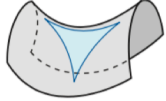
<http://nccr-swissmap.ch/education/highschool/GRcourse>

## Exemple de parcours thématique : effet de lentille gravitationnelle

Nous présentons ici une proposition de séquence sur l'effet de lentille gravitationnelle, sujet introduit dans le chapitre 5, en tant qu'exemple d'application remarquable des idées à la base de la relativité générale.

Le chapitre 4 introduit les notions de courbure de Gauss en un point et de courbure totale d'une surface<sup>2</sup> à deux dimensions et vise à se familiariser avec propriétés des surfaces courbes, en particulier avec le comportement des géodésiques parallèles.

*Tableau récapitulatif des propriétés des espaces courbes*

Courbure	positive	nulle	négative
Exemple d'espace 2D	sphère 	plan 	selle 
Propriété	fermé	euclidien	ouvert
Géodésiques parallèles	convergent	ne se croisent jamais	divergent
Périmètre du cercle de rayon $r$	$< 2\pi r$	$= 2\pi r$	$> 2\pi r$
Surface de la sphère de rayon $r$	$< 4\pi r^2$	$= 4\pi r^2$	$> 4\pi r^2$
Volume de la sphère de rayon $r$	$< \frac{4}{3}\pi r^3$	$= \frac{4}{3}\pi r^3$	$> \frac{4}{3}\pi r^3$
Somme des angles du triangle	$> 180^\circ$	$= 180^\circ$	$< 180^\circ$

Une attention particulière est prêtée à la surface représentant le potentiel gravitationnel d'une concentration de masse/énergie à symétrie sphérique, où la courbure est positive dans la partie centrale (en jaune dans la figure ci-dessous) et négative dans la zone périphérique (verte dans la figure ci-dessous). Nous pouvons constater cette propriété à l'aide d'un plastique représentant la forme du potentiel et d'un ruban coloré : deux géodésiques parallèles divergent si elles passent dans la zone à courbure négative, elles convergent si elles passent dans la zone à courbure positive.

<sup>2</sup> En relativité générale, la notion de *surface* s'étend à tout espace de dimension supérieure à deux.

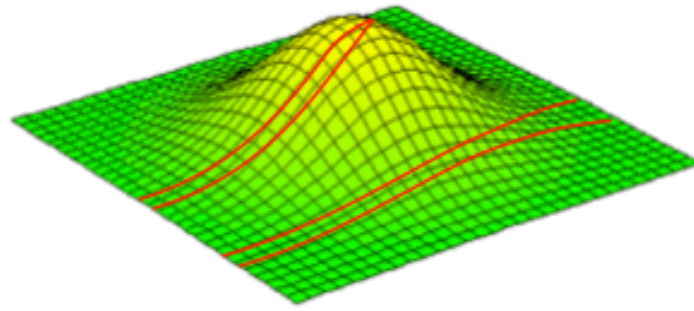


Figure 1 : Le potentiel gravitationnel d'une concentration de masse/énergie à symétrie sphérique dans un espace bidimensionnel. Les géodésiques parallèles divergent là où la courbure est négative, convergent là où elle est positive.

La relativité générale de Einstein a introduit l'idée que la présence de masse/énergie déforme l'espace-temps et dévie la lumière. Par analogie avec l'effet des lentilles optiques, on nomme « lentille gravitationnelle » une concentration de masse (par exemple une galaxie, un trou noir ou une étoile massive) qui a pour effet de dévier la lumière. Dans le chapitre sur l'effet de lentille gravitationnelle, la question est donc de trouver l'expression de l'angle de déviation  $\alpha$  de la trajectoire d'un rayon de lumière passant près d'une masse *grave*<sup>3</sup>.

## Approches simplifiées

Ce problème peut être abordé de plusieurs manières. Le premier exercice de la série 5 utilise l'analyse dimensionnelle et permet de trouver la formule de  $\alpha$  de manière simple, sans facteur numérique. Pour résoudre l'exercice, nous pouvons schématiser la situation : un rayon de lumière provenant d'une source lointaine s'approche d'une masse  $M$ , sa trajectoire est déviée par la présence de la masse. De quels paramètres peut dépendre cette déviation ?

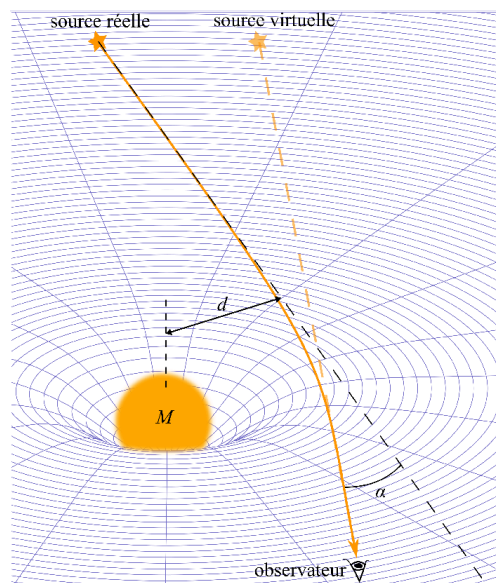


Figure 2 : La trajectoire d'un rayon de lumière provenant d'une source lointaine suit la déformation de l'espace-temps par une masse  $M$ .

<sup>3</sup> Avec le terme masse *grave* on entend la grandeur ayant le rôle de « charge » gravitationnelle, analogue à la « charge » coulombienne en électrostatique. Elle se différencie de la masse *inerte* qui représente une mesure de la résistance des corps aux changements de vitesse, et n'est pas spécifiquement liée à l'interaction gravitationnelle. À cette date, aucune expérience n'a pu constater de différence entre masse grave et masse inerte.

On peut aisément citer l'accélération de la gravité  $g = GM/d^2$  ( $G$  étant la constante de la gravitation), la vitesse de la lumière  $c$ , et la « distance » de passage  $d$ , soit la distance entre la masse  $M$  et la droite représentant la direction de provenance du rayon. Autrement dit le « paramètre d'impact », concept très important en physique car tout autant central que transversal.

Pour trouver l'angle de déviation, on cherche une combinaison de puissances entières de ces paramètres ( $p$ ,  $q$  et  $r$ ), telle que les unités se compensent car l'unité des angles est adimensionnelle

$$\alpha_g \propto g^p \cdot d^q \cdot c^r$$

$$[m \cdot s^{-2}]^p \cdot [m]^q \cdot [m \cdot s^{-1}]^r = 1 \Rightarrow m^p \cdot s^{-2p} \cdot m^q \cdot m^r \cdot s^{-r} = 1^0 \Rightarrow m^{p+q+r} \cdot s^{-2p-r} = 1^0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p+q+r=0 \\ -2p-r=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=-2p \\ p+q-2p=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=-2p \\ q=p \end{cases}$$

La solution la plus simple non nulle est donnée par  $p=1$ ,  $q=1$  et  $r=-2$  :

$$\alpha_g \propto g^1 \cdot d^1 \cdot c^{-2} = \frac{GM}{d^2} \cdot d \cdot c^{-2} = \frac{GM}{c^2 d}$$

Cette formule diffère d'un facteur 4 de celle obtenue en utilisant les équations tensorielles d'Einstein  $\alpha_{gE} = 4GM/c^2 d$ , mais elle est beaucoup plus accessible. Une dérivation de la formule de l'angle de déviation à partir de la physique newtonienne se trouve dans la section 5.1 du livre : cette démonstration est plus avancée car elle demande une connaissance aisée du formalisme vectoriel, de la dérivation et de l'intégration des fonctions, et elle donne une formule de l'angle de déviation :  $\alpha_{gN} = 2GM/c^2 d$ , qui diffère d'un facteur 2 par rapport à celle relativiste. Ce facteur 2 a une importance historique, notamment dans les mesures de l'angle de déviation de la lumière faites par Eddington lors de l'éclipse totale solaire de 1919. Bien que peu précise, ce fut cette expérience qui rendit Einstein célèbre.

## Analogie optique

Ainsi, la simple dérivation dimensionnelle permet d'inférer la dépendance inverse  $\alpha_g \propto 1/d$ , qui constitue la clé pour comprendre le phénomène de lentille gravitationnelle. Il est utile d'analyser la situation parallèle d'une lentille optique convergente, où la dépendance linéaire de la distance entre le rayon incident et l'axe optique  $\alpha_o \propto d$  mène à la présence d'un foyer optique, comme illustré dans la figure ci-dessous.

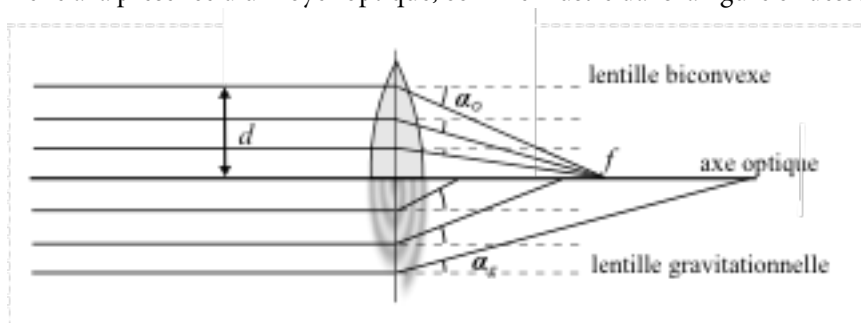


Figure 3 : Comparaison de l'effet d'une lentille gravitationnelle avec celui d'une lentille optique convergente, sur des rayons parallèles.

D'autre part, puisque dans le chapitre 4 nous avons pu constater que la courbure est négative autour d'une masse avec un potentiel gravitationnel à symétrie sphérique (Figure 1), nous avons les éléments pour comprendre que la déviation en  $1/d$  traduit le comportement divergent des géodésiques parallèles.

La question de savoir s'il existe une forme de lentille optique capable de reproduire cette déviation en  $1/d$  surgit spontanément, et la réponse se trouve dans l'exercice 7 de la série 5, où les lois de la réfraction et une

intégrations sont déployées pour obtenir cette dépendance : un profil d'allure logarithmique, semblable à celui d'un « pied de verre à vin » est celui recherché.

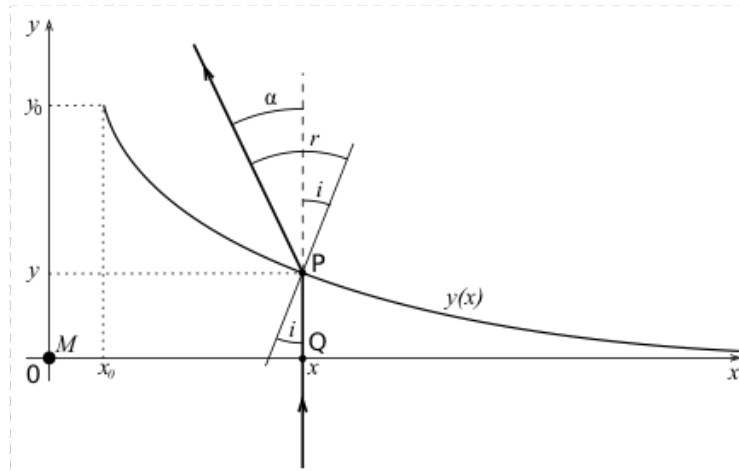


Figure 4 : Trajectoire d'un rayon de lumière passant au travers d'une lentille optique avec un profil de « pied de verre à vin ».

L'idée est que, en supposant l'approximation des « petits angles » ( $\sin \alpha \cong \alpha$ ), si l'angle de réfraction  $r$  est proportionnel à l'angle d'incidence  $i$ , et si l'on veut qu'en s'approchant de l'axe optique (l'axe  $y$  dans la figure ci-dessus) la déviation augmente ( $r$  augmente) comme on le voit dans la Figure 3, on doit avoir un profil qui forme un angle toujours plus grand avec le rayon incident (direction de l'axe  $y$ ).

L'expérience permettant de visualiser l'image d'une source ponctuelle à travers la reproduction optique d'une lentille gravitationnelle est une activité qui peut facilement être pratiquée.

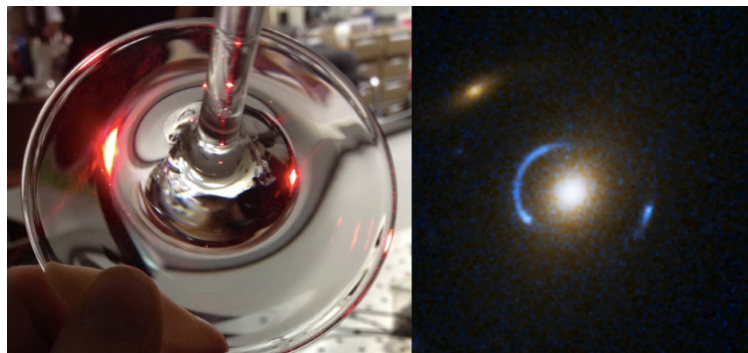


Figure 5 : À gauche, une image de source ponctuelle vue au travers d'un pied de verre à vin. À droite, la l'image de lentille gravitationnelle SDSS J120540.43+491029.3. *Crédit: Hubble, NASA.* La similitude entre les images lumineuses de la source est clairement visible.

Ainsi, il est possible de « tester » les conditions pour l'observation d'un anneau, d'une croix d'Einstein ou d'arcs gravitationnels (ces derniers comme dans la Figure 5).

Dans le cas d'alignement entre observateur O, lentille L et source S, la formule donnant le rayon d'Einstein  $\theta$  (il s'agit bien d'un angle même s'il est appelé « rayon ») en fonction de la masse de la lentille et des distances entre la source et la lentille s'obtient à partir de celle de l'angle de déviation, en utilisant la loi des sinus et l'approximation des petits angles.

$$\theta \cong \sqrt{\frac{4GM \cdot D_{SL}}{c^2 D_{SO} \cdot D_{LO}}}$$

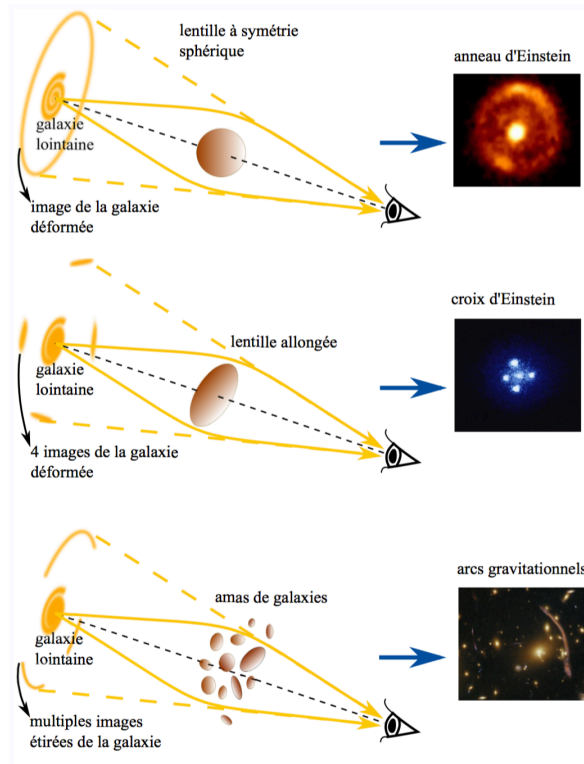


Figure 6 : Schématisation des trois types de strong lensing, permettant d'observer des images d'anneaux, croix d'Einstein, ou d'arcs gravitationnels. *Crédit: Hubble, NASA.*

La formule ci-dessus est démontrée dans la section 5.3 du livre et utilisée par les astronomes pour estimer la masse de la lentille, y compris celle de la matière noire, puisque c'est la masse *grave* de la lentille qui cause le phénomène. En effet, les distances peuvent être estimées à partir des redshifts de la source et de la lentille et le rayon d'Einstein est une quantité mesurable, normalement inférieure à la seconde d'arc. Des exercices d'applications de cette formule se trouvent dans la série relative au chapitre 6.

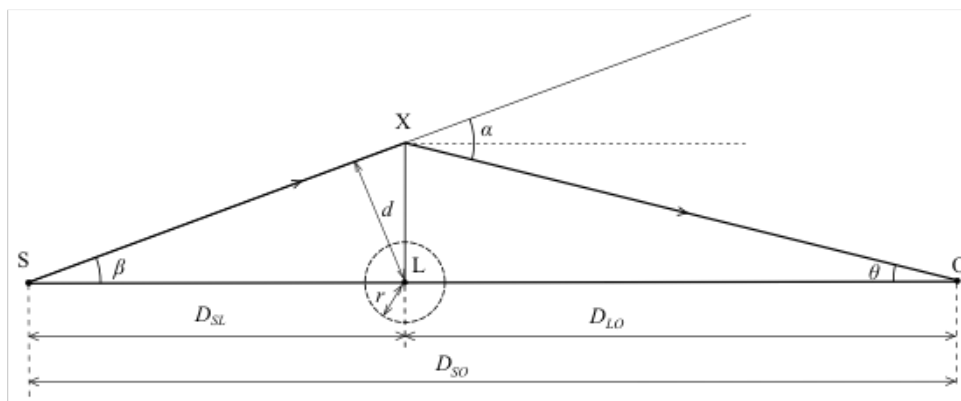


Figure 7 : Schématisation du parcours d'un rayon de lumière dans une situation de strong lensing donnant lieu à un anneau ou une croix d'Einstein : le point S représente la source de lumière (une galaxie lointaine), le point O l'observateur et L est la lentille (une galaxie ou un amas de galaxies). La révolution de  $360^\circ$  autour de l'axe OS du point X représente l'image virtuelle de la source S, sous forme d'anneau. L'angle d'observation  $\theta$  est nommé « rayon d'Einstein ».

## Plusieurs parcours thématiques

En conclusion, la séquence que nous avons parcourue montre comment, en s'appuyant d'une part sur l'intérêt du lecteur pour l'astrophysique et la cosmologie, d'autre part sur ses connaissances mathématiques de

base, il est possible d'expérimenter un chapitre de la physique moderne. Elle n'est qu'un exemple des nombreux parcours possibles à partir du matériel disponible dans le cours. En effet, l'ordre et le choix des activités concernant un thème spécifique (ici l'effet de lentille gravitationnelle) est flexible et peut s'adapter aux contraintes liées à l'enseignement et/ou au niveau du public : le cours contient un choix d'exercices à développer au travers des chapitres sur le principe d'équivalence, sur la courbure et sur l'effet de lentille gravitationnelle, y compris les aspects historiques. En outre, des thèmes parcourent de manière transversale l'ensemble du cours et constituent un « fil rouge » qui aide le lecteur à s'approprier des contenus tout au long de différents chapitres, en consolidant leurs notions de base en mathématiques et en physique. Par exemple le thème « comparaison entre l'interaction gravitationnelle et électrique » débute au premier chapitre en introduisant les ordres de grandeurs en jeu dans les deux interactions, il est ensuite repris dans les chapitres sur le principe d'équivalence (pour introduire les notions de base de la relativité générale) et sur la chronologie du Big Bang (en comparant gravitation à et électromagnétisme à l'interaction nucléaire forte) puis ultérieurement développé dans le chapitre sur les ondes gravitationnelles. Ou encore le thème « expansion de l'univers » introduit dans les premiers deux chapitres les découvertes observationnelles de l'expansion, du fond diffus cosmologique, et celle plus récente de l'accélération cosmique : en avançant dans les chapitres, la modélisation mathématique permet de décrire la dynamique de l'univers et les implications théoriques des observations, jusqu'à l'introduction récente de modèles encore hypothétiques qui essaient de résoudre les problèmes observationnels actuels (inflation, gravité modifiée).

Le cours complet peut être trouvé aux adresses suivantes.

La théorie :

A. Gasparini, *Cosmologie & relativité générale, Une première approche*, PPUR (2018).

<http://www.ppur.org/produit/876/9782889152094/Cosmologie%20%20relativite%20generale%20>

Les exercices et activités (le correctif peut être envoyé aux enseignants sur demande):

A. Gasparini & A. Müller *Cosmologie & relativité générale, Activités pour les élèves du Secondaire II*, Swiss-MAP, Université de Genève (2017).

<http://nccr-swissmap.ch/education/highschool/GRcourse>

# Ja – Oui – Sì

Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematikund Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und Gymnasiallehrer (VSG) werden.

J'aimerais devenir membre de la Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique (SSPMP) et de la Société Suisse des Professeurs de l'Enseignement Secondaire (SSPES).

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

Beitrag/Montant/Quota: Fr. 120 (VSG-SSPES-SSISS) + Fr. 40 (SSIMF-SSPMP-VSMP)

Frau/Mme/Sig.ra       Herr/M./Sig.       Prof.       Dr.

Name/Nom/Cognome: .....

Vorname/Prénom/Nome: .....

Adresse/Indirizzo: .....

PLZ Ort/NP Ville/CAP Luogo: .....

(Land/Pays/Paese): .....

E-Mail: .....

Tel.: .....

Geburtsdatum/Date de Naissance/  
Data di nascita: .....

Sprache/Langue/Lingua:  D       F       I

Schule/École/Scuola: .....

Kanton/Canton/Cantone: .....

Kategorie/Catégorie/Categoria:       aktiv/actif/attivo       passiv/passif/passivo

StudentIn/Étudiant(e)/Studente/ssa.

Mitglied der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft/Membre de la Société Suisse de Physique/Membro della Società Svizzera di Fisica

Einsenden an/envoyer à/inviare a:

VSG – SSPES – SSISS, Sekretariat, z. H. Doris Lazzeri, 3000 Bern

[www.vsg-sspes.ch](http://www.vsg-sspes.ch)

## Impressum

Herausgeber — *Éditeur*  
VSMP – SSPMP – SSIMF

Korrespondenz — *Correspondance*

Franz Meier                      franz.e.meier@bluewin.ch  
Alpenquai 44                      Tel. 079 79 89 770  
6005 Luzern

Layout — *Mise en page*

Samuel Byland                      samuel.byland@vsmp.ch  
Weinbergstrasse 48b              Tel. 079 728 63 97  
5000 Aarau

Inserateverwaltung — *Publicité*

Stefan Walser                      stefan.walser@alumni.ethz.ch  
Weinbergstrasse 3                      Tel. 032 512 0 128  
8807 Freienbach

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

— *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:

ganzseitig                      Fr. 500.–  
halbseitig                      Fr. 300.–

Beilagen:

bis 20 g                      Fr. 500.–  
über 20 g                      nach Vereinbarung

Adressänderungen — *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder — Membres de la SSPMP:  
VSG – SSPES – SSISS  
Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)  
3000 Bern  
Tel. 056 443 14 54 / Fax. 056 443 06 04  
information@vsg-sspes.ch

übrige Abonnenten — autres abonnés:

Franz Meier                      franz.e.meier@bluewin.ch  
Alpenquai 44                      Tel. 079 79 89 770  
6005 Luzern

Auflage — *Tirage*

900 Exemplare  
erscheint dreimal jährlich

Präsident VSMP — SSPMP — SSIMF

Arno Gropengiesser                  groppi@bluewin.ch  
Via Domenico Galli 44  
6600 Locarno-Solduno Tel. 091 751 14 47

Deutschscheizerische Mathematikkommission

Josef Züger                      j.zueger@sunrise.ch  
Via Salens                      Tel. 081 641 10 94  
7402 Bonaduz

Deutschscheizerische Physikkommission

Christian Stulz                      christian.stulz@gymburgdorf.ch  
Strandweg 17                      Tel. 034 423 46 43  
3400 Burgdorf

Commission Romande de Mathématique

Tatiana Mantuano                  tatiana.mantuano@gfbienne.ch  
rue Louis-de-Meuron 4                  Tél. 032 544 47 53  
2074 Marin-Epagnier

Commission Romande de Physique

Stéphane Davet                      davet.stephane@lyca.eduvs.ch  
Av. Plantaud 28B                      Tél. 024 471 21 83  
1870 Monthey

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Luca Rovelli                      lucarovelli@ticino.com  
Via Pedmunt 10                      Tel. 091 825 76 69  
6513 Monte Carasso

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

— *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 138                      31.07.2018 (Ende September)  
Nr. 139                      30.11.2018 (Ende Januar)  
Nr. 140                      31.03.2019 (Ende Mai)

Druck und Versand — *Imprimerie*

Niedermann Druck AG  
Letzistrasse 37  
9015 St. Gallen  
www.niedermanndruck.ch

Internet-Adressen — *Adresses Internet*

www.vsmf.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch