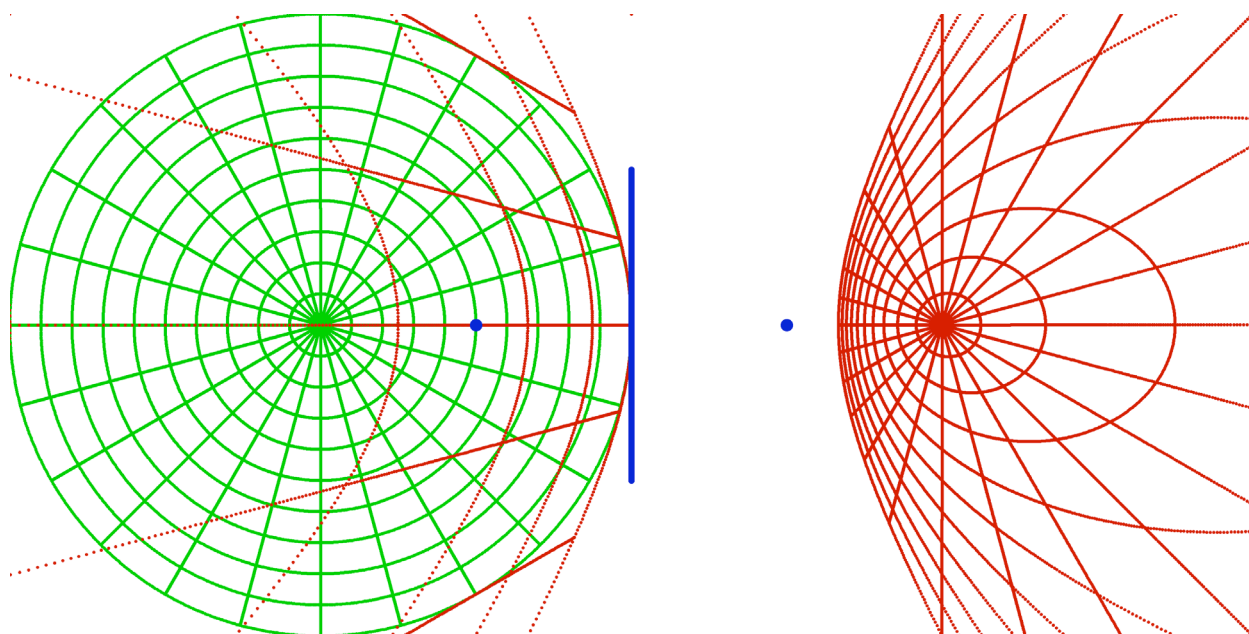


V S M P
S S P M P
S S I M F

Bulletin

Januar 2018 — Janvier 2018 — Gennaio 2018

N° 136



V S M P
S S P M P
S S I M F

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica

DIE NEUEN VERNIER-PRODUKTE JETZT BEI EDUCATEC BESTELLEN

educatec.ch/vernier

Go Direct™ Charge Station

Die Go Direct™ Ladestation ist die perfekte Lösung zum Aufladen Ihrer Go Direct Sensoren. Jede Ladestation hat 16 Ladeanschlüsse, 8 USB- und 8 Sensor-Ports. LED-Leuchten an den Go Direct-Sensoren zeigen den Ladezustand an. Die Station eignet sich auch zum Laden von Go Wireless®-Geräten.

USB-Kabel nicht enthalten.



Artikel-Nr. GDX-CRG



Go Direct™ Oberflächentemperaturfühler



Artikel-Nr. GDX-ST

Entwickelt für den Einsatz in Situationen, in denen eine geringe thermische Masse oder Flexibilität erforderlich ist. Der Go Direct™ Oberflächentempersensoren enthält einen exponierten Thermistor mit einer extrem schnellen Reaktionszeit. Die elektronischen Verbindungen sind isoliert, sodass Messungen in Luft und Wasser möglich sind.

Verwenden Sie diesen Sensor in einer Vielzahl von Experimenten:

- Untersuchen Sie den Temperatureinfluss auf die Leistung von Solarpanel.
- Entdecken Sie passive Solarheizung oder Sonnenkollektoren.
- Untersuchen Sie die Wärme bei der Nasenbeatmung.
- Entdecken Sie die Wirkung der Vaskularität auf die Wiederherstellung der Hauttemperatur.

Go Direct™ Beschleunigungsmesser



Artikel-Nr. GDX-ACC

Sammeln Sie Beschleunigungs-, Rotations- und Höhendaten im Klassenzimmer oder im Gelände mit dem Go Direct™ Beschleunigungssensor. Montieren Sie den Beschleunigungssensor an Ihrem Fahrrad oder befestigen Sie ihn ohne störende Kabel an Ihrem Laborwagen.

Messbereich:

- Geringe Beschleunigung: ± 157 m/s² (± 16 g)
- Hohe Beschleunigung: $\pm 1,960$ m/s² (± 200 g)
- Gyros: $\pm 2,000$ °/s, Winkel: $\pm 180^\circ$
- Höhenmesser: $-1,800$ m bis $10,000$ m

Go Direct™ Weitbereichs-Temperaturfühler



Artikel-Nr. GDX-WRT

Mit dem Go Direct™ Weitbereichs-Temperaturfühler können Ihre Schüler ein Experiment unter dem Laborabzug durchführen und die Daten drahtlos an die Laborstation senden. Das Thermometer ermöglicht Untersuchungen wie die Bestimmung des Schmelzpunktes von Koffein oder des Siedepunktes verschiedener Pflanzenöle.

- Messbereich: -20 bis 330°C
- Temperaturfühler: Platin RTD (100 Ohm)
- Genauigkeit: $\pm 0,2^\circ\text{C}$ bei 100°C
- Reaktionszeit (von 25°C bis 100°C in Wasser): 30 Sekunden
- Edelstahlkörper Länge: 17 cm, Durchmesser: 6.4 mm

Weitere Informationen finden Sie in unserem Online Shop unter www.educatec.ch

Für weitere Kataloge von uns wenden Sie sich an contact@educatec.ch

In der nächsten Ausgabe folgt eine Fortsetzung der GDX Sensoren.

Go Direct™

EducaTec AG

Altes Schulhaus, Kanzleigasse 2
Postfach, 5312 Döttingen

T +41 56 245 81 61, F +41 56 245 81 63
contact@educatec.ch, www.educatec.ch

educatec

In dieser Ausgabe — Dans ce numéro

VSMP – SSPMP – SSIMF	2
Arno Gropengiesser Jahresbericht 2016/17 des VSMP	2
Commission Romande de Mathématiques	5
Christophe Bolle Combinatoire: quelques ramifications modernes d'un sujet classique	5
Maxime Zuber Entrer au gouvernement grâce à la moyenne géométrique	6
Alexandre Junod Projections dans un triangle	11
Deutschschweizerische Mathematikkommission	14
Albert A. Gächter Mathematik in Bildern	14
H.U. Keller Letzte zwei Ziffern von aufeinander folgenden Primzahlen	18
Das neue Lehrmittel der DMK: Stochastik	21
H.R. Schneebeli <i>Buchrezension</i> : EAGLE-Starthilfe, Kartografie	22
Känguru Schweiz Neuerung beim Mathematikwettbewerb Känguru 2018	23
<i>Kurs</i> : Teachers Teaching with Technology	24
Commission Romande de Physique	25
Didier Roulet Congrès de l'UdPPC à Limoges	25
Didier Roulet Ré-édition de l'expérience de Fizeau	26
Deutschschweizerische Physikkommission	28
Martin Lieberherr Axialer Abbildungsabstap	28
Rafael Winkler 5 Tage und 4 Nächte Physik	31

Internet-Adressen — *Adresses Internet*
www.vsmp.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch

Titelseite — *Page de Titre*
 Abbildung konzentrischer Kreise durch eine Sammellinse (Artikel ab S. 28 in dieser Ausgabe)

Jahresbericht 2016/17 des VSMP

Arno Gropengiesser, Präsident des VSMP/SSIMF/SSPMP, arno.gropengiesser@edu.ti.ch

Im abgelaufenen Vereinsjahr (November 2016 bis Oktober 2017) fanden – einmal abgesehen von der GV vom 25. Nov 2016 in Wettingen – wiederum zwei Nachmittagssitzungen (25. Januar 2017 in Zürich; 17. Mai 2017 in Bern) und die gleichermassen traditionelle wie ersehnte Weekend-Sitzung in Obergesteln (Sa/So, 9./10. Sept. 2017) statt. Ergänzt wurden unsere Sitzungsarbeiten durch die Mitwirkung in der Arbeitsgruppe mit der SVIA (Schweizerischer Verein für Informatik in der Ausbildung) zum Thema "Informatik und Mathematik am Gymnasium, eine Auslegeordnung". Für den VSMP haben Arno Gropengiesser, Jean-Marc Ledermann und Hansjürg Stocker daran teilgenommen und die Gruppe hat ein gemeinsames Positionspapier erarbeitet und veröffentlicht, das auf ein erfreulich grosses Echo gestossen ist (vergleiche auch weiter unten).

Die Teilnahme des VSMP an der Organisation des Robotik Kongresses an der EPFL mit dem Titel «scientiae & robotica» hat auch Sitzungsarbeiten mit sich gebracht: am 2. Dezember 2016, 31. März, 29. Juni 2017 hat sich das OK in Lausanne getroffen und am 23. August 2017 in Bern. Vom VSMP waren immer mindestens drei der folgenden Mitglieder dabei: Arno Gropengiesser, Franz Meier, Didier Roulet, Hansjürg Stocker und Patrick Turtschy.

Zu den sowohl alltagsnahen wie schulwirksamen Aktivitäten der 5 Kommissionen gehören einige zusätzliche Weiterbildungskurse und -tagungen, Exkursionen, mathematische Wettbewerbe und Camps. Und nicht vergessen möchte ich die diversen Fachartikel, Rezensionen, Berichte und Veranstaltungshinweise in unserem «Bulletin», das dreimal jährlich erscheint (jeweils Ende Januar, Mai und September).

Zusammensetzung des Vorstandes

Folgende Kolleginnen und Kollegen gehörten (samt Kommissionszugehörigkeit; VSMP-Funktion) in der Berichtsperiode dem VSMP-Vorstand an: Samuel Byland (DPK; Webmaster und Redaktor des Bulletins), Stéphane Davet (président de la CRP); Daniela Grawehr (DMK-Präsidentin); Arno Gropengiesser (CMSI; presidente); Jean-Marc Ledermann (CRM; caissier); Franz Meier (DMK; Sekretär); Andrea Pellegrinelli (CMSI); Luca Rovelli (presidente della CMSI); Yves Roisin (CRM; caissier in pectore), Hansjürg Stocker (DMK; Vizepräsident); Christian Stulz (DPK-Präsident); Patrick Turtschy (CRM; vice-président); Stefan Walser (DPK; Inserate-Verwalter); Tatiana Mantuano (présidente de la CRM).

Mutationen

- Fürs laufende Vereinsjahr gibt es folgende personellen Veränderungen im 14-köpfigen Vorstand. Jean-Marc Ledermann tritt nach langjährigem Engagement aus dem Vorstand aus; er wird nun die Funktion des Kassiers an Yves Roisin (CRM) definitiv abtreten, welcher ab GV 2016 in den Vorstand eingetreten ist. Jean-Marc Ledermann hat im abgelaufenen Geschäftsjahr noch die Konten geführt und Yves Roisin progressiv in das Amt eingeführt.
- Unser Fachverein zählt derzeit 560 Mitglieder (Stand Dezember 2016, Vorjahr 558). Die leichte Zunahme, wurde durch diverse Neumitgliedschaften erzielt (meist durch Werbung an Weiterbildungs-Veranstaltungen). Der Vorstand hat weitere Anstrengungen unternommen und Strategien umgesetzt, um neue (junge) Mitglieder zu gewinnen. Diese sollen im nächsten Jahr erweitert und ausgedehnt werden und mit der Verteilung des neuen Flyers gekoppelt werden.

Aktuelle Projekte

- Die in den letzten Jahren schwindenden Mitgliederzahlen - die pensionsbedingten Austritte werden nicht immer ausreichend durch Neueintritte von (jungen) Kollegen ausgeglichen – haben nach einer Strategie und nach Überlegungen gerufen, wie der Verband wirksamer Auftreten kann. Erste Anzeichen einer Trendwende sind jetzt, nach den eingeleiteten Massnahmen, erfreulicherweise sichtbar. Der Vorstand ist dennoch überzeugt, dass weitere Anstrengungen nötig sind: Der neuer Flyer (in den drei Landessprachen und mit den Gründen für einen Eintritt in den VSMP) wird ab Anfang 2018 zur Verfügung stehen und eine flächendeckendere Verbreitung der Mitgliederwerbung ermöglichen. Strategien hierzu wurden schon erarbeitet und werden noch in diesem Verbandsjahr umgesetzt (weiterhin Werbung anlässlich von Weiterbildungskursen, verschiedenartige Beilagen für das GH und das Bulletin, Werbematerialien für die Schulen, Zusammenarbeit mit den Organisatoren der Schweizer Olympiaden (Physik und Mathematik), Vorrang für VSMP Mitgliedern an Weiterbildungskursen der Kommissionen, usw.). Auch den 5 Kommissionen sei an dieser Stelle für ihre intensivierten diesbezüglichen Anstrengungen ausführlich gedankt. Eine regelmässige Evaluation der eingeleiteten Anstrengungen soll auch weiterhin dafür sorgen, dass wir den Erfolg beurteilen und eventuelle Kurskorrekturen anbringen können. Dieses zentrale Thema hat uns in allen Sitzungen beschäftigt, insbesondere auch bei der Konzeption des Flyers.
- Die Einführung der Informatik als Grundlagenfach in der gymnasialen Ausbildung ist seit geraumer Zeit ein immer wiederkehrendes Politikum, um das auch der VSMP nicht herumkommt (Stichwort Einführung des Faches I auf „Kosten“ von M oder P). Seit März 2015, unter der Leitung von Andrea Leu ('senarclens' & SVIA), hat sich die Arbeitsgruppe regelmässig getroffen und ein gemeinsames Positionspapier erarbeitet (wurde von den Vorständen des VSMP (in Bellwald) und der SVIA im September 2016 genehmigt). Die Herausgabe an ein breites Publikum geschah im November 2016, und stiess auf positivem Echo, wie die Antworten von der EDK, der SMAK, des SBFI (Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation), des Erziehungsdepartementes des Kantons Basel Stadt und der Bildungsdirektion des Kanton Zürich zeigten. Der VSMP wurde explizit zur Anhörung zum neuen Rahmenlehrplan und der Einführung des Faches Informatik eingeladen und hat seine Stellungnahme im Mai 2017 abgegeben. Am 27. Oktober 2017 hat die Plenarversammlung der EDK beschlossen, Informatik als obligatorisches Fach (aber nicht als Grundlagenfach, wie vom VSMP bevorzugt) einzuführen. Es ist als Teil des Lernbereichs "Naturwissenschaften und Mathematik" vorzusehen. Der Rahmenlehrplan Informatik wurde auch verabschiedet und ersetzt den Rahmenlehrplan Informatik für die Maturitätsschulen vom 12. Juni 2008. Die AG mit der SVIA wird demnach weiterbestehen, um die Umsetzung der Einführung zu verfolgen und insbesondere darauf achten, dass dies nicht auf Kosten der Fächer Mathematik und Physik erfolgt. Auch den zu erwartenden Vorschlägen im Bereich der Lehrerinnen- und Lehrerbildung soll unser Augenmerk geschenkt werden.
- Wie schon erwähnt, ist der VSMP im Organisationskomitee des Kongresses „scientiae & robotica“ in Lausanne durch Arno Gropengiesser, Franz Meier, Didier Roulet, Hansjürg Stocker und Patrick Turtschy vertreten. Dem OK gehören nebst der EPFL auch Vertreter des Vereins Schweizerischer Naturwissenschaftslehrerinnen und -lehrer (VSN) und des Schweizerischen Vereins für Informatik in der Ausbildung (SVIA) an. Seitens der Vertreter des VSMP sind schon viele Anstrengungen erbracht worden, um das Gelingen des für vom 5. bis 8. September 2018 geplanten Projektes zu ermöglichen.
- Bekanntlich hat die EDK am 17. März 2016 verschiedene Beschlüsse gefasst, mit denen sie zur langfristigen Sicherung des Hochschulzugangs mit gymnasialer Maturität beitragen will. Insbesondere hat sie dem Rahmenlehrplan für Maturitätsschulen (vom 9. Juni 1994) mit einem Anhang zu den basalen fachlichen Kompetenzen für die allgemeine Studierfähigkeit in Erstsprache und Mathematik ergänzt. Die EDK empfiehlt den Kantonen auch, das gemeinsame Prüfen an den Gymnasien zu unterstützen, sich an Netzwerken von Gymnasien und Universitäten zu beteiligen und die Studien- und Laufbahnberatung an den Gymnasien weiter zu etablieren. Der VSMP hat sich vorgenommen, die Umsetzung in den Kantonen und Schulen genau zu verfolgen und gegebenenfalls öffentlich zu diesem Thema Stellung zu nehmen, insbesondere zum Teilprojekt 1. Nach über einem Jahr, ist es aber noch verfrüht Bilanz zu ziehen, da die Umsetzung in den Kantonen oder in den Schulen, bis auf ein paar wenigen Ausnahmen, sehr schleppend vor sich geht. Die ersten Signale deuten auf eine, aus der Sicht des VSMP, mehrheitlich "vernünftige" Auslegung hin.

- Die Kommission Gymnasium-Universität (KGU), eine gemeinsame Organisation der Vereinigung der Schweizerischen Hochschuldozierenden (VSH) und des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und Gymnasiallehrer (VSG), hat am 10. und 11. September 2017 eine dritte Konferenz Übergang Gymnasium-Universität KUGU III an der Universität Bern organisiert. Das Thema Wissenschaftspropädeutik wurde ausgiebig in der Arbeitsgruppe Mathematik diskutiert. Vom VSMP haben Daniela Grawehr, Arno Gropengiesser (Koordinator), René Kaeslin (DMK), Andrea Pellegrinelli, Luca Rovelli, Patrick Turtschy und Joseph Züger (DMK) teilgenommen. Das Programm, die Berichte und weitere Informationen zu allen Tagungen findet man unter math.ch/kugu3. Der Abschlussbericht der AG Mathematik beinhaltet unter anderem auch Empfehlungen, die den VSMP betreffen. Dies wird somit im laufenden Geschäftsjahr vom Vorstand aufgenommen und diskutiert werden müssen.
- Bezüglich weiterer Projekte und Weiterbildungsveranstaltungen verweise ich auf die Jahresberichte der 5 Kommissionen.

VSG, WBZ, SMG, SPG, SCNAT und EDK

- Der Kontakt zum VSG wickelt sich vor allem über die Präsidentenkonferenzen ab, die halbjährlich angesetzt sind (in der Regel Mitte März und Mitte September). Hinzu kommt das alljährliche Präsidententreffen im Mai, das mehr dem informellen Gedankenaustausch dient und jeweils von einem Kantonalverband organisiert wird. Derzeit stehen verschiedene politische Forderungen des VSG im Zentrum (Zeitgemässe Arbeits- und Anstellungsbedingungen, Studie zum Beschäftigungsgrad, siehe Pressemitteilungen August 2017). Zusätzlich hat der VSG bei der Anhörung zur "Informatik am Gymnasium" teilgenommen und auch bei derjenigen zur Totalrevision des Anerkennungsreglements und Aktualisierung des Rahmenlehrplans der Fachmittelschulen. Hierzu wurde vom der VSG eine breit abgestützte "interne Vernehmlassung" bei den Kantonal- und Fachverbänden, an der sich der VSMP beteiligt hat, durchgeführt und daraus eine ausführliche Antwort an die EDK verfasst.
- Als Weiterbildungsdelegierter des VSMP (Bindeglied zwischen dem VSMP und der WBZ) fungierte, bis zur Umwandlung der WBZ in die ZEM-CES, Hansjürg Stocker; ebenso ist er Kontaktperson zur SCNAT. Dort ist er auch Mitglied der «Kommission für Nachwuchsförderung».
- In der SMG (Schweizerische Mathematische Gesellschaft) sind Tatiana Mantuano (CRM) und Hansjürg Stocker (DMK) die beiden Delegierten "en relation des gymnases".
- Mit der SPG (Schweizerische Physikalische Gesellschaft), mit der im Vorjahr ein Doppelmitgliedschaftsabkommen abgeschlossen wurde, ist eine erste konkrete Zusammenarbeit entstanden: das Symposium "Mit Bürgi zu den Sternen" in Lichtensteig (Toggenburg) am 14. April 2018. Als Delegierte bei der SPG für Themen gemeinsamen Interesses fungieren Samuel Byland (DPK, ev. Stefan Büchler) und Stéphane Davet (CRP).

Abschliessen will ich meinen Jahresrückblick mit einem aufrichtigen und grossen Dank an alle meine Vorstandskolleginnen und -kollegen. Ihr engagierter Einsatz für die Physik und Mathematik sowie den dazugehörigen Unterricht, ebenso deren äusserst konstruktive Zusammenarbeit im Vorstand über die sprachlichen und fachlichen Differenzen hinweg – und dies kann niemals genügend unterstrichen werden – verdienen starke Anerkennung und grossen Respekt. Diesbezüglich sei hier nochmals Jean-Marc Ledermann für seine langjährige und hervorragende Arbeit als Kassier, für seine immerwährende und äusserst geschätzte Freundschaft und seinen engagierten Einsatz ganz herzlich gedankt. Ich wünsche ihm alles Gute für die Zeit danach; wir werden sicher noch Gelegenheit haben, mit ihm eine gesellige Runde beim Speisen zu teilen...

Seinem Nachfolger Yves Roisin, der sich bereits vielfältig in den Sitzungen eingebracht hat, wünsche ich ebenfalls eine gute und bereichernde Zeit im VSMP-Vorstand.

Locarno, Mitte November 2017

Combinatoire : quelques ramifications modernes d'un sujet classique

Colloque annuel de la CRM organisé à Leysin du 19 au 22 septembre 2017

La CRM a organisé un cours sur l'analyse combinatoire qui a réuni 44 participants à l'hôtel Central-Résidence de Leysin. Dix exposés de 90 minutes ont été donnés par 5 conférenciers.

Monsieur Emanuele Delucchi, professeur FNS à l'Université de Fribourg, est intervenu trois fois pendant cette semaine.

Il nous a tout d'abord présenté le potentiel didactique des jeux combinatoires par l'exemple du jeu de Chomp. Il a abordé le nombre de configurations possibles de ce jeu, et a montré qu'il existe une stratégie gagnante (même si on ne la connaît pas).

Il est ensuite revenu sur les douze voies de l'énumération (twelvefold way), sujet déjà évoqué en 2016 lors du cours CRM-CMSI à Monte Verità. Il a ainsi pu nous donner un aperçu du travail de Gian-Carlo Rota pour poser un cadre unifié pour les problèmes de dénombrement.

Pour finir, il a présenté la fonction de partition avec l'aide de diagrammes de Ferrers. Cela l'a mené à nous parler de séries formelles, de fonctions génératrices, et lui a permis d'aboutir à un théorème d'Euler sur les nombres pentagonaux.

Monsieur Ivan Izmistiev, maître-assistant à l'Université de Fribourg, nous a parlé du Mot de Fibonacci et notamment de sa structure quasi-périodique. Il a illustré cela avec une table de billard de Fibonacci, puis avec les quasi-cristaux afin d'aboutir aux pavages de Penrose.

Lors de son deuxième exposé, il nous a présenté différentes versions des jeux de Nim dont le jeu de Wythoff. Les positions gagnantes de ce jeu forment deux suites de Beatty qui partitionnent les entiers naturels. Ces deux suites font apparaître finalement le Mot de Fibonacci.

Madame Elisa Gorla, professeure à l'Université de Neuchâtel, nous a présenté une introduction à la cryptographie. Après un survol rapide de l'histoire des codes, elle a parlé un peu de théorie de la complexité pour comparer les chiffrements RSA et El Gamal. Pour finir, elle nous a montré la méthode de cryptage à l'aide de courbes elliptiques.

Monsieur Kolja Knauer, maître de conférence à l'Université d'Aix-Marseille, est ensuite venu nous parler de posets, polynômes et polytopes. Lors de la première partie, il nous a expliqué ce qu'est un poset (ensemble partiellement ordonné) en illustrant son propos avec de nombreux diagrammes de Hasse. Les extensions linéaires de ces ensembles l'ont mené à nous parler de polynôme d'ordre.

Dans la deuxième partie, il a défini la notion de polytope qu'il a mise en lien avec celle de poset. Cela nous a conduit au polynôme d'Ehrhart du polytope dont le degré correspond à la dimension du polytope.

Monsieur Hugo Parlier, professeur à l'Université du Luxembourg, a finalement présenté la géométrie des puzzles (en deux parties). Il s'est arrêté sur plusieurs jeux pour parler du graphe des configurations. Il a essentiellement été question de connexité de ces graphes, puis de leur diamètre. L'exemple des Tours de Hanoï donnait lieu à une jolie recherche pour construire le graphe des configurations. Les pavages d'un rectangle $2 \times n$ avec des dominos permettent de faire réapparaître encore une fois la suite de Fibonacci.

Au terme de ce cours, les participants se sont déclarés très satisfaits. Ils ont particulièrement apprécié l'excellent niveau scientifique et didactique de tous les conférenciers.

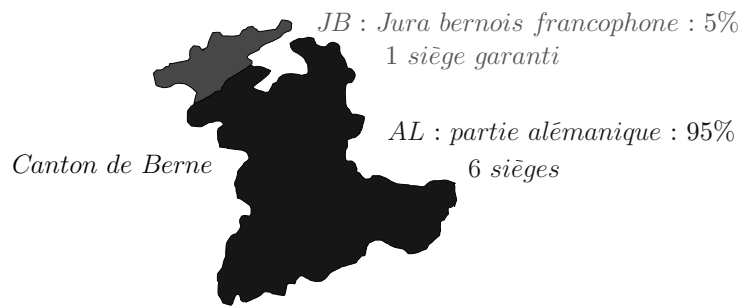
Christophe Bolle
Membre de la CRM

Entrer au gouvernement grâce à la moyenne géométrique

Maxime Zuber, Haute École Pédagogique BEJUNE, maxime.zuber@hep-bejune.ch

1 Introduction

Le Conseil-exécutif est, comme son nom l'indique, l'autorité exécutive du canton de Berne. Il se compose de sept membres élus tous les quatre ans à la majorité des voix populaires. La Constitution cantonale garantit un siège au Jura bernois. Cette région francophone, composée des districts de Courtelary, La Neuveville et Moutier, représente environ 5% de la population.



Historiquement, la question suivante s'est posée au législateur. Comment procéder pour désigner le candidat, parmi ceux issus de cette région, ayant droit au siège francophone ? Celui qui l'emporte sur l'ensemble du canton ? Certainement pas puisque, avec leur poids écrasant de 95%, le vote des citoyens alémaniques serait lui seul décisif. Le candidat ayant obtenu le meilleur résultat dans les trois districts francophones ? Non plus puisque, bien que francophone, le conseiller d'État désigné doit être aussi l'élu du reste du canton dont il dirigera les affaires. Et si l'on calculait la moyenne arithmétique des voix obtenues dans le Jura bernois et dans la partie germanophone ? Là aussi, ce serait accorder trop de poids à la composante alémanique en regard de la faible minorité romande. Ceci reviendrait à vérifier l'adage africain selon lequel «le mariage d'un boa et d'un lapin s'appelle boa». Comment donc s'en sortir ? Il s'agit en fait de combiner équitablement les volontés populaires de deux régions en tenant compte du statut très minoritaire de l'une d'elles.

2 Mathématiciens à la rescousse

Le mode d'attribution du siège réservé au Jura bernois a été conçu, dans les années quatre-vingt, par M. André Ory, vice-chancelier de langue française du canton de Berne, et par le Dr Henri Carnal, professeur à l'Université de Berne.

Voici la solution à laquelle ces deux mathématiciens d'origine jurassienne sont parvenus. Au soir des élections, la chancellerie d'État établit la liste des candidats francophones ayant obtenu la majorité absolue. Celle-ci est définie de la manière suivante : le nombre total des suffrages valables est divisé par 14 (par 7, parce qu'il y a sept sièges à attribuer, puis par 2 pour définir le nombre de voix assurant un demi-siège). On ajoute 1 au quotient (ce qui est un détail).

Dans le cas où plusieurs candidats francophones atteignent la majorité absolue, il convient de décider à qui reviendra le siège réservé au Jura bernois. Pour chaque candidat, on considère alors les variables suivantes :

JB = nombre de voix obtenues dans le Jura bernois ;

AL = nombre de voix obtenues dans la partie alémanique (l'Ancien canton) ;

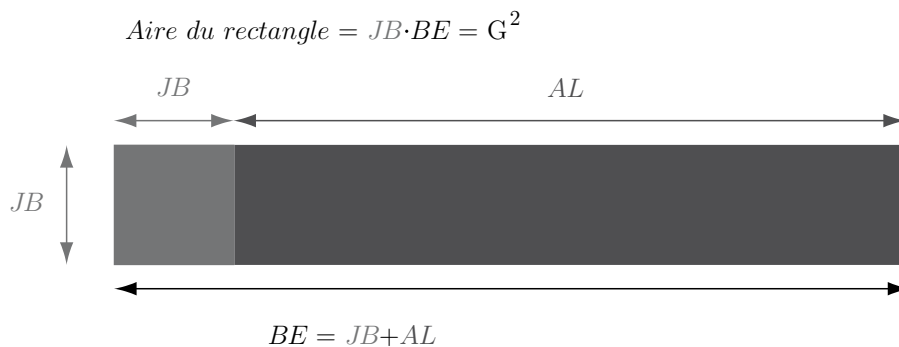
BE = nombre total de voix obtenues sur l'ensemble du canton ($BE=AL+JB$) ;

On calcule ensuite la *moyenne géométrique* G de ces deux variables, à savoir la racine carrée de leur produit

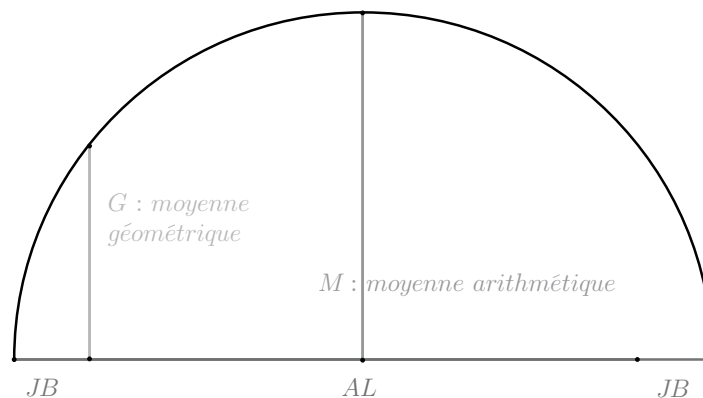
$$G = \sqrt{BE \cdot JB}$$

Le siège revient alors au candidat francophone ayant obtenu la plus grande moyenne géométrique.

Une manière de décrire les choses plus visuellement consiste à dessiner, pour chaque candidat, un carré ayant pour côté le nombre de voix obtenues dans le Jura bernois (donc JB) juxtaposé à un rectangle dont la longueur est égale au nombre de voix obtenues dans le reste du canton ($AL=BE-JB$). Le siège revient ainsi au candidat pour lequel l'aire totale de ces deux figures est maximale.



La figure suivante, qui découle du théorème d'Euclide, montre la différence entre la moyenne géométrique $G = \sqrt{JB \cdot BE}$ (segment gris à gauche), qui est appliquée pour la désignation de l'élu et la moyenne arithmétique $M = (JB + BE)/2$ (segment gris au centre : rayon du cercle) qui n'accorde pas assez de poids à la variable JB .



3 Situations passées

Depuis l'introduction de cette disposition constitutionnelle sur le mode d'élection, la clause de la moyenne géométrique a eu des effets pour la première fois en 2014. Dans les élections précédentes, le candidat élu a en effet devancé ses concurrents autant dans le Jura bernois que sur l'ensemble du canton. En 2014, en revanche, le candidat ayant obtenu le plus grand nombre de voix dans le canton de Berne a été battu en raison de l'application de cette clause. Passons en revue les élections de ces dernières législatures.

3.1 Election 2006

En avril 2006, seuls deux candidats obtiennent la majorité absolue : Mme Annelise Vaucher (UDC) et M. Philippe Perrenoud (PS). Leurs performances électorales sont respectivement les suivantes.

Candidat	BE	JB	Moyenne géométrique
Perrenoud (PS)	79251	3682	17082,2
Vaucher (UDC)	75244	3324	15814,9

La moyenne géométrique de M. Perrenoud étant supérieure à celle de Mme Vaucher, le candidat socialiste est élu. Notons qu'il a droit au siège sans recours à la moyenne géométrique puisqu'il devance Mme Vaucher autant dans le Jura bernois que sur l'ensemble du canton.

A quoi a tenu l'élection de Philippe Perrenoud ? Rappelons qu'elle a engendré la majorité rose-verte au gouvernement ! Soit $x = JB$ le nombre de voix que la candidate UDC aurait dû obtenir dans le Jura bernois, en sus des 71920 (= 75244 - 3324) obtenues dans la partie alémanique, pour égaler la moyenne géométrique de M. Perrenoud. Ce nombre est solution de l'équation

$$x \cdot (71920 + x) = 79251 \cdot 3682$$

que n'importe quel collégien sait résoudre. On trouve ainsi $x = 3851,1 \cong 3852$. Or, Annelise Vaucher a obtenu 3324 voix dans le Jura bernois. Il lui a donc manqué 528 voix pour avoir la meilleure moyenne géométrique et être élue.

Autre question : combien d'électeurs francophones de Philippe Perrenoud auraient dû voter pour Annelise Vaucher de sorte que cette dernière soit élue ? Ce nombre x satisfait l'équation

$$(79251 - x) \cdot (3682 - x) = (75244 + x) \cdot (3324 + x)$$

dont la solution est 258,1. Ainsi, si 259 électeurs de Perrenoud avaient choisi sa rivale, le visage du Conseil-exécutif en eût été fondamentalement modifié !

3.2 Election 2010

Philippe Perrenoud a complètement déclassé Sylvain Astier en le devançant très largement autant dans le Jura bernois que sur l'ensemble du canton.

Candidat	BE	JB	Moyenne géométrique
Perrenoud (PS)	90774	5169	21661,3
Astier (UDC)	55555	3890	14700,6

3.3 Election 2014

En mars 2014, deux candidats obtiennent la majorité absolue : M. Philippe Perrenoud (PS) et M. Manfred Bühler (UDC). Leurs performances électorales sont respectivement les suivantes. Nous reproduisons ici le procès-verbal établi par la Chancellerie d'Etat et publié sur le site internet du canton de Berne.

Calcul

La moyenne géométrique est la racine carrée du produit des suffrages exprimés dans le Jura bernois et des suffrages exprimés dans l'ensemble du canton.

Calcul pour l'attribution du siège garanti au Jura bernois à l'issue de l'élection de 2014

Nom	Suffrages Jura bernois (A)	Suffrages canton (B)	Produit (A x B)	Moyenne géométrique
Manfred Bühler (UDC)	4'919	94'957	467'093'483	21'612
Philippe Perrenoud (PS)	5'889	86'468	509'210'052	22'566

La moyenne géométrique de M. Perrenoud (PS) étant supérieure à celle de M. Bühler (UDC), le candidat socialiste a été élu, malgré son score inférieur à celui de son concurrent.

A quoi a tenu cette fois l'élection de Philippe Perrenoud, laquelle a permis de confirmer la majorité rose-verte au gouvernement ? Soit x le nombre d'électeurs du Jura bernois qui auraient dû choisir Bühler plutôt que Perrenoud pour assurer l'élection du candidat UDC. Ce nombre x est solution de l'équation

$$(5889 - x) \cdot (86468 - x) = (4919 + x) \cdot (94957 + x)$$

qui a pour solution $x = 219,1 \cong 220$. Ainsi, si 220 électeurs de Perrenoud avaient choisi son rival, le visage du Conseil-exécutif en eût été fondamentalement modifié !

L'application de cette clause et l'éviction du candidat ayant obtenu le plus grand nombre de voix, n'ont pas manqué de susciter des réactions. Nous reproduisons ci-dessous un article paru dans «Le Quotidien Jurassien» au lendemain de cette élection.

La moyenne géométrique sous les feux de la rampe

► Si la garantie d'un siège pour le Jura bernois n'est généralement pas remise en cause côté alémanique, la moyenne géométrique est davantage questionnée (lire la revue de presse ci-contre). «Il est vrai que pour le siège du Jura bernois, le système donne une notion de proportionnelle à une élection au système majoritaire. Mais cela a été défini ainsi pour permettre de prendre en compte la voix de la minorité et pour que le représentant du Jura bernois ne soit pas imposé par la majorité alémanique. Après, si quelqu'un propose un meilleur système, la discussion est possible. Mais supprimer ce principe serait faux», analyse Philippe Perrenoud, qui estime que le recours à la moyenne géométrique ne met pas en doute sa légitimité.

► Le politologue bernois Marc Bühlmann, de son côté, estime qu'il serait maladroit de remettre en cause la légitimité de Philippe Perrenoud juste parce qu'il a été élu grâce à la moyenne géométrique. «Une élection par ce biais affaiblit sans doute un peu la position de Philippe Perrenoud. Cer-

tains, à droite, vont jouer avec ça et le considérer comme un demi-conseiller d'Etat. Mais au sein du Gouvernement, ce ne sera pas un problème.»

► Selon Marc Bühlmann, il faut aussi analyser la situation sous l'angle de la Question jurassienne. «On ne peut pas dire le 24 novembre à la population du Jura bernois qu'on souhaite qu'elle reste dans le canton parce qu'elle compte, puis estimer que, finalement, elle n'est pas si importante que ça et remettre en cause les acquis.»

► Mais sur le principe, est-il juste démocratiquement de désigner vainqueur celui qui n'a pas obtenu le plus de suffrages? «La notion de justice est sujette à interprétation», répond Marc Bühlmann. «La démocratie ne veut pas seulement dire qu'il n'y a que la majorité qui compte, mais aussi qu'il faut considérer la minorité et faire en sorte qu'elle puisse aussi décider. En Suisse, il existe différents instruments pour protéger les minorités. La moyenne géométrique pour l'élection au Gouvernement bernois en est un», conclut Marc Bühlmann. CLR

On retiendra en particulier les propos du Prof. Marc Bühlmann de l'Université de Berne : «En Suisse, il existe différents instruments pour protéger les minorités. La moyenne géométrique pour l'élection au Gouvernement bernois en est une».

3.4 Election complémentaire 2016

Comme le montre le procès-verbal de la Chancellerie d'Etat, lors de cette élection partielle, le candidat élu a devancé son adversaire autant dans le Jura bernois que sur l'ensemble du canton.

Nom	Suffrages Jura bernois (A)	Suffrages canton (B)	Produit (A x B)	Moyenne géométrique
Roberto Bernasconi (PS)	5'270	107'755	567'868'850	23'830
Pierre Alain Schnegg (UDC)	7'003	111'657	781'933'971	27'963

3.5 Election 2018

Cette élection verra s'affronter le conseiller d'Etat sortant, Pierre-Alain Schnegg (UDC), et le candidat socialiste Christophe Gagnebin. Il y a fort à parier que la clause de la moyenne géométrique sera décisive. D'où l'importance, pour les deux concurrents, de s'imposer dans le Jura bernois.

Références

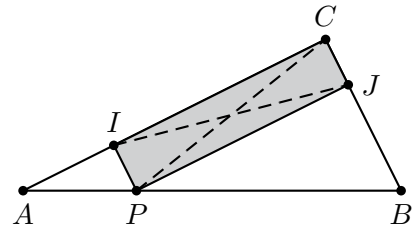
- [1] *Site internet officiel du canton de Berne* (www.be.ch)
- [2] *Le Quotidien Jurassien* (www.lqj.ch)

Projections dans un triangle

Alexandre Junod, Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), alexandre.junod@rpn.ch

1. Problématique

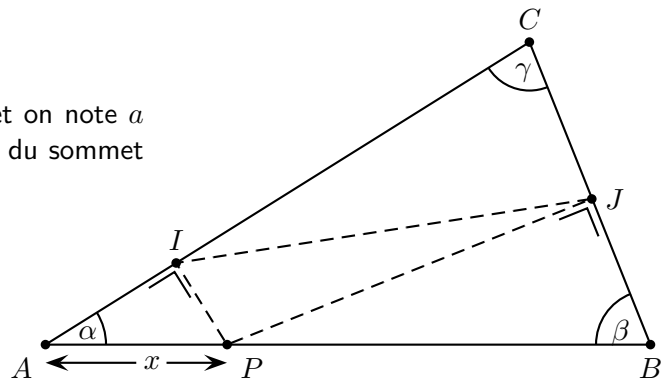
Dans un triangle rectangle ABC , lorsqu'un point P situé sur l'hypoténuse est projeté orthogonalement sur les cathètes, on obtient un rectangle $IPJC$ comme illustré ci-contre. Les diagonales IJ et PC ont donc la même longueur, celle-ci est minimale lorsque P est la projection orthogonale de C sur le côté AB .



Nous nous proposons de généraliser ce résultat à un triangle ABC quelconque. On considère un point P sur un côté du triangle (disons sur le côté AB) et on projette ce point orthogonalement sur les deux autres côtés, obtenant des points I (sur le côté AC) et J (sur le côté BC). Nous voulons calculer la longueur du segment IJ et savoir où placer le point P pour rendre cette longueur minimale.

2. Notations

On adopte les notations du schéma ci-contre et on note a (resp. b et c) la longueur du côté situé en face du sommet A (resp. B et C).



3. Première approche

Comme nous ne savons pas à quel résultat nous attendre, nous allons exprimer la longueur (IJ) en fonction de $x = (AP)$. L'angle en P dans le triangle IJP est $180^\circ - (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \beta) = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$ et le théorème du cosinus implique

$$\begin{aligned}(IJ)^2 &= (PI)^2 + (PJ)^2 - 2(PI)(PJ) \cos(180^\circ - \gamma) \\ &= (PI)^2 + (PJ)^2 + 2(PI)(PJ) \cos(\gamma).\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant la relation "sin-opp-hyp" dans les triangles rectangles IPA et JPB , on obtient $(PI) = x \sin \alpha$ et $(PJ) = (c - x) \sin \beta$. On a donc

$$(IJ)^2 = x^2 (\sin \alpha)^2 + (c - x)^2 (\sin \beta)^2 + 2x(c - x) \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\gamma).$$

Nous allons exprimer maintenant tous les angles à l'aide d'un seul, disons γ . En appliquant le théorème du sinus dans le triangle ABC , on obtient $\sin \alpha = \frac{a}{c} \sin \gamma$ et $\sin \beta = \frac{b}{c} \sin \gamma$.

On en déduit $(IJ)^2 = \left(\frac{\sin \gamma}{c}\right)^2 [x^2 a^2 + (c-x)^2 b^2 + 2x(c-x)ab \cos \gamma]$. On peut alors développer et réordonner le polynôme en x entre crochets :

$$(IJ)^2 = \left(\frac{\sin \gamma}{c}\right)^2 [(a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma)x^2 - 2bc(b - a \cos \gamma)x + b^2 c^2].$$

Le théorème du cosinus appliqué au triangle ABC dit que $a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = c^2$ et d'autre part, on a $b - a \cos \gamma = c \cos \alpha$ car la hauteur issue du sommet B partage le côté b en deux segments de longueurs respectives $a \cos \gamma$ et $c \cos \alpha$. Il s'ensuit donc

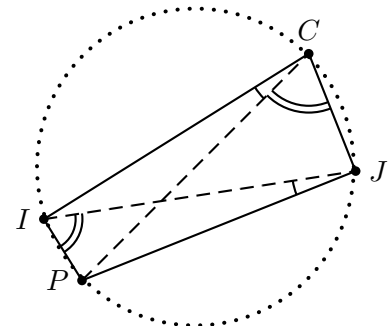
$$(IJ)^2 = \left(\frac{\sin \gamma}{c}\right)^2 [c^2 x^2 - 2bc^2 x \cos \alpha + b^2 c^2] = (\sin \gamma)^2 [x^2 - 2bx \cos \alpha + b^2].$$

Le théorème du cosinus appliqué au triangle APC montre que la dernière expression entre crochets n'est rien d'autre que $(CP)^2$. On a donc $(IJ)^2 = (\sin \gamma)^2 (CP)^2$.

Conclusion. On a $(IJ) = (CP) \sin \gamma$. La longueur (IJ) est minimale lorsque (CP) est minimale, c'est à-dire lorsque P est la projection orthogonale de C sur le côté AB . Cette longueur minimale est alors $(IJ) = h_C \sin \gamma = a \sin(\beta) \sin(\gamma)$.

4. Variante de preuve

Au vu de la simplicité du résultat, il est légitime de présenter une preuve plus courte. Le quadrilatère $IPJC$ est inscriptible dans un cercle de diamètre PC (cercle de Thalès). L'angle au sommet C est $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ avec $\gamma_1 = \widehat{PCI}$ et $\gamma_2 = \widehat{PCJ}$. Par le théorème de l'angle inscrit, on a alors $\widehat{PJI} = \widehat{PCI} = \gamma_1$ et $\widehat{PIJ} = \widehat{PCJ} = \gamma_2$.



Dans le triangle PIJ , l'angle au sommet P est donc $180^\circ - \gamma$ et le théorème du sinus implique $\frac{(IP)}{\sin \gamma_1} = \frac{(IJ)}{\sin(180^\circ - \gamma)}$. Comme $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$ et $\sin \gamma_1 = \frac{(IP)}{(PC)}$ selon le triangle rectangle PIC , on en déduit que $(PC) = \frac{(IJ)}{\sin \gamma}$, donc $(IJ) = (PC) \sin \gamma$. \square

5. Corollaires

Etablissons maintenant des relations intéressantes au sujet de notre quadrilatère $IPJC$.

Corollaire 1. En utilisant la formule d'addition des angles et les relations dans les triangles rectangles CIP et CJP , on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{(IJ)}{(PC)} &= \sin \gamma = \sin(\gamma_1 + \gamma_2) = \sin(\gamma_1) \cos(\gamma_2) + \cos(\gamma_1) \sin(\gamma_2) \\ &= \frac{(PI)}{(PC)} \cdot \frac{(JC)}{(PC)} + \frac{(IC)}{(PC)} \cdot \frac{(PJ)}{(PC)} = \frac{(PI)(JC) + (IC)(PJ)}{(PC)^2} \end{aligned}$$

On en déduit que $(PI)(JC) + (IC)(PJ) = (IJ)(PC)$ autrement dit, dans le quadrilatère $IPJC$, la somme des produits des côtés opposés est égale au produit des diagonales. Cette propriété caractérise les quadrilatères convexes inscriptibles (théorème de Ptolémée).

Corollaire 2. L'aire \mathcal{A} du quadrilatère $IPJC$ peut être calculée avec les triangles rectangles CIP et CJP . On peut également utiliser le triangle JCI qui présente un angle γ et le triangle JPI qui présente un angle $180^\circ - \gamma$ (ayant le même sinus que γ) :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}((CI)(IP) + (CJ)(JP)) = \frac{1}{2}((JP)(PI) + (JC)(CI)) \sin \gamma.$$

En isolant $\sin \gamma$, on peut exprimer le quotient des diagonales à l'aide des produits des paires de côtés successifs :

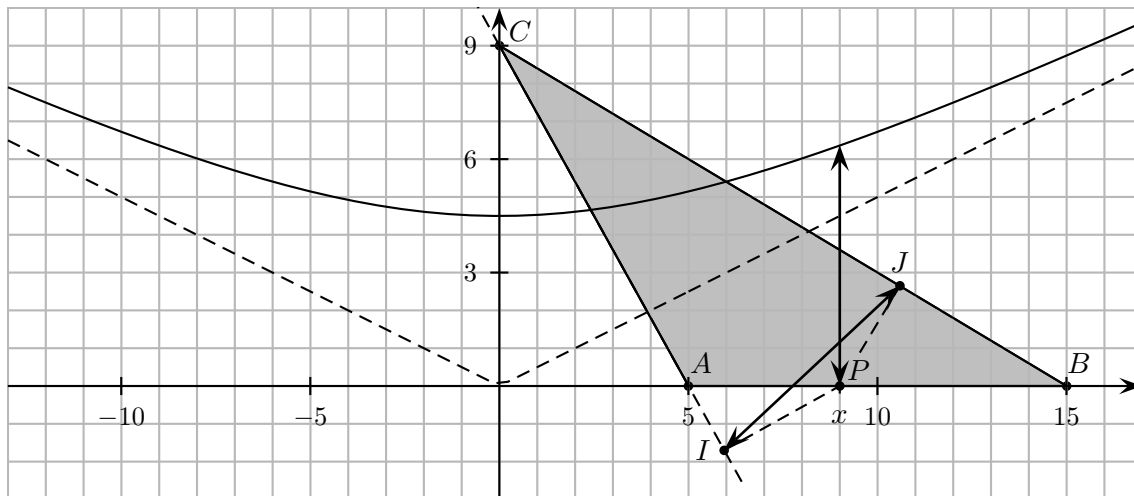
$$\frac{(IJ)}{(PC)} = \frac{(CI)(IP) + (CJ)(JP)}{(JP)(PI) + (JC)(CI)}$$

Cette propriété est en fait valable pour tous les quadrilatères convexes inscriptibles $IPJC$ (deuxième théorème de Ptolémée).

6. Remarque

Nous avons raisonné avec un triangle ABC dont la hauteur h_C issue du sommet C coupe le côté AB , c'est-à-dire lorsque les angles α et β sont aigus. Lorsque ce n'est pas le cas, on peut généraliser le problème en considérant les trois droites supportant les côtés du triangle.

Nous avons reproduit ci-dessous le graphe de $y = (IJ)$ en fonction de l'abscisse x du point P (relativement à celle de C). Dans cet exemple, on a $\gamma \cong 30^\circ$ et $y_C = 9$, donc $y = (CP) \sin \gamma \cong \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 81}$, ce qui est asymptotique à la fonction $y = \frac{1}{2}|x|$ dont le graphe est donné en traitillés.



7. Conclusion

Nous avons généralisé à un triangle quelconque un résultat évident concernant les triangles rectangles. Alors que la première démonstration utilisait les théorèmes du sinus et du cosinus, la deuxième a permis de découvrir les théorèmes de Ptolémée sur les quadrilatères inscriptibles (que nous n'avons pas démontrés de manière générale). La problématique peut être introduite avec un logiciel tel que Geogebra : on peut identifier les coefficients a et b d'une fonction $f(x) = a\sqrt{x^2 + b^2}$ puis, en déplaçant le sommet C sur l'axe Oy (ou les sommets A et B sur l'axe Ox), on peut exprimer a à l'aide de l'angle γ et interpréter la racine carrée comme la distance entre les points P et C .

Mathematik in Bildern

Albert A. Gächter. 6987 Caslano, mefi@bluewin.ch

1 Pinsel und Zirkel

Wenn ich wüsste, was Kunst ist, würde ich es für mich behalten. (Pablo Picasso)

Die Mathematik ist bekanntlich die Wissenschaft von den Mustern. Es gilt, Muster zu schaffen, zu entdecken oder zu erkunden. Dabei lässt man sich oft von ästhetischen Aspekten leiten.

Die Kunst ist ein kompliziertes Phänomen (Wassily Kandinsky). Sie zu definieren ist fast unmöglich. Man muss sie selber sehen und fühlen. Kunst dient der Erbauung und der Bildung.

Henri Poincaré, der letzte Universalist, schrieb einmal: *It is only through science and art that civilisation is of value.* Es macht daher Sinn, die Verwobenheit von Mathematik und Kunst vermehrt im Unterricht deutlich zu machen.

Hier stelle ich einen Künstler vor, der in Europa fast unbekannt ist. Obwohl in Sachen Mathematik ein Amateur im wahrsten Sinn des Wortes, lassen sich seine eigenen Entdeckungen sehen. Die Rede ist von Crockett Johnson (1906 – 1975), einem amerikanischen Maler und Kinderbuchautor. Die Karriere des Crockett Johnson (CJ) erfuhr 1965 eine eigenartige Wendung. Mit grosser Leidenschaft begann er, berühmte Sätze aus der Mathematik in Bilder umzusetzen. Zwei Jahre später wurden 30 Werke in einer New Yorker Galerie ausgestellt. Seit 1967 beschäftigte er sich mit den klassischen unlösbaren Problemen der Antike: Würfelverdoppelung, Winkeldreiteilung, Kreisquadratur und Konstruktion des regelmässigen Siebenecks. Er wusste, dass Zirkel und Lineal allein nicht ausreichen, um diese vier Probleme geometrisch exakt zu lösen. Dutzende von Bildern zeugen von seiner Liebe zu diesen wohl berühmtesten Konstruktionsaufgaben.

Besonders stolz war Johnson auf seine Entdeckung einer Einschiebekonstruktion für das Siebeneck und die guten Näherungen für die Kreisquadratur. Er schrieb: *Much of my more recent work derives from my own investigation and discovery.*

Der grosse Teil seiner gegen 120 Werke kann im *National Museum of American History* in Washington bewundert werden. Der Rest ist in Privatbesitz oder verschollen.

80 Bilder mit kurzer Beschreibung und in guter Qualität finden sich im Internet unter

<http://americanhistory.si.edu/collections/object-groups/mathematical-paintings-of-crockett-johnson>

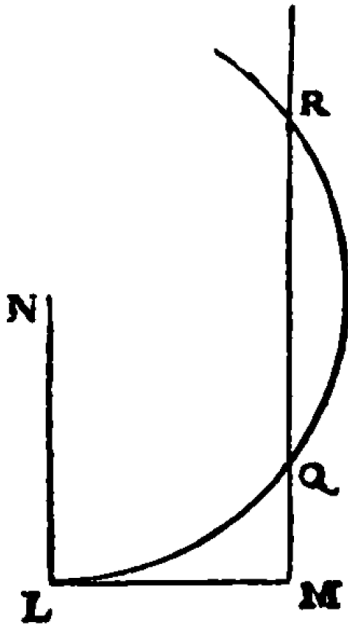
An Hand seines Werkes könnte gymnasiale Mathematik weitgehend illustriert werden. Ein einziges ausgewähltes Beispiel soll zeigen, wie seine Bilder als Startpunkte, Begleitobjekte oder zur Repetition nützlich sein können. Mit dem Werk von Künstlern ein Stück Mathematik zu lernen, steigert die Motivation und hilft, Berührungängste abzubauen.

Selbstverständlich eignen sich die Bilder auch für Fach- oder Maturaarbeiten.

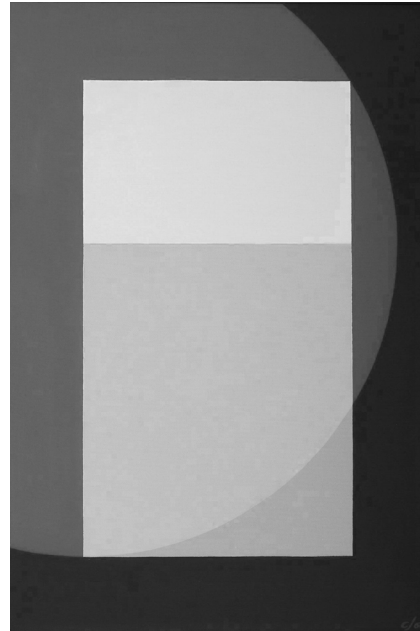
Und: Eigene Bilder zu mathematischen Themen zu malen, fördert die Kreativität, macht Freude und kann als Hinweis dazu dienen, ein Stück Mathematik wirklich verstanden zu haben.

2 Simple Equation

Die Nr. 24 aus der Bildersammlung von Crockett Johnson trägt den Titel *Simple Equation*. Das im Original farbige Bild kommt recht unscheinbar daher und kann seinen Ursprung im Werk von Descartes *Geometrie* [1] nicht verleugnen:



Descartes 1637



Simple Equation, CJ 1966, Nr. 24

Blenden wir daher zurück ins 17. Jh., wo die Algebra immer stärker an Boden gewinnt und zur neuen Königin der Mathematik aufsteigt.

Descartes (1596 – 1650) wählt die Geometrie als Basis für die Lösung algebraischer Probleme. Um zum Beispiel die Gleichung der Form $x^2 = ax - b^2$ zu lösen, konstruiert er eine passende unbekannte Strecke x . Er schreibt im Ersten Buch:

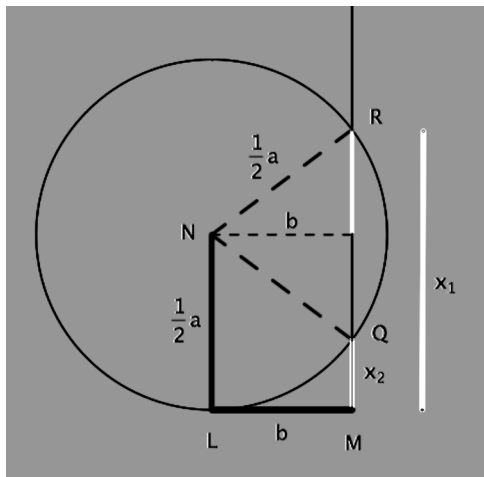
Habe ich endlich $x^2 = ax - b^2$, so mache ich NL gleich $\frac{1}{2}a$ und LM gleich b ; dann ziehe ich, statt die Punkte MN zu verbinden, MQR parallel mit LN und beschreibe um N als Mittelpunkt einen durch L gehenden Kreis, der MQR in den Punkten Q und R schneidet; die gesuchte Linie x ist MQ oder MR , denn in diesem Falle entsprechen ihr zwei verschiedene Ausdrücke, nämlich

$$x_1 = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}.$$

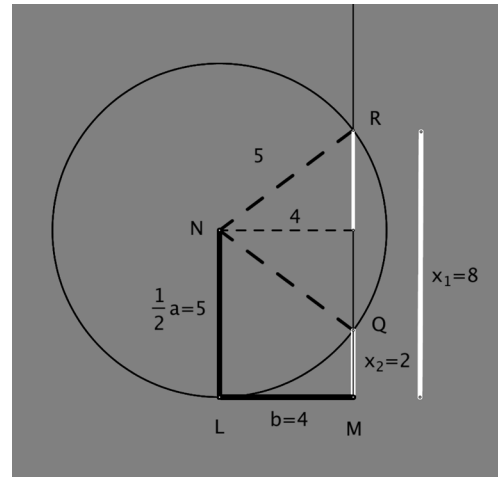
Und wenn der Kreis mit dem Mittelpunkt N , der durch den Punkt L hindurchgeht, die gerade Linie MQR weder schneidet noch berührt, so hat die Gleichung keine Wurzel, so dass man versichern kann, die Konstruktion des Problems sei unmöglich.

Meine Rekonstruktion zeigt, wie die beiden Lösungen graphisch entstehen. Die Anzahl Lösungen ergibt sich sehr anschaulich aus dem Vergleich der beiden Quadrate $\frac{1}{4}a^2$ und b^2 . Sind beide gleich gross, liegt eine Doppellösung vor, da die beiden Schnittpunkte zusammenfallen.

Das helle Rechteck im Bild von Crockett Johnson ist ein goldenes Rechteck (künstlerische Freiheit). Wie muss eine Gleichung des Typs $x^2 = ax - b^2$ beschaffen sein, damit ein solches Rechteck entsteht? Wie löst Descartes Gleichungen vom Typ $x^2 = ax + b^2$? Siehe [3].



Rekonstruktion



Beispiel $x^2 = 10x - 16$

Sie möchten mehr erfahren?

Mein Buch *Pinsel und Zirkel* [2] enthält neun ausgearbeitete Beispiele von Bildern, welche Crockett Johnson gemalt hat. Es enthält über 100 neuartige Aufgaben mit Lösungen.

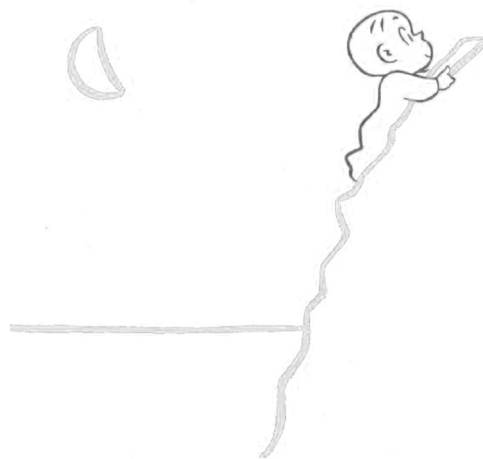
Weitere Beispiele und die Streckenrechnung von Descartes finden sich im Buch *7 Zahnstocher* [3].

Bestellungen mittels E-Mail an mefi@bluewin.ch.

Für Leser und Leserinnen des Bulletins offeriere ich die Bücher zu je 20 Franken inkl. Porto bei Bezahlung mit E-Banking (Selbstkostenpreis 29.80!).

Informationen über den Inhalt der Bücher auf www.didamath.com.

Crockett Johnson schreibt in seiner erfolgreichen Kinderbuchreihe mit dem Titelhelden Harold: *Harold knew that the higher up he went, the farther he could see*. Dem ist nichts beizufügen.



3 Literatur

[1] Descartes R.: *Geometrie*, Darmstadt, 1969.

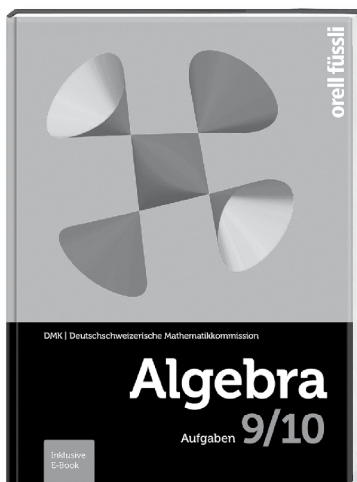
[2] Gächter A.: *Pinsel und Zirkel*, mefi-Verlag, 2013.

[3] Gächter A.: *7 Zahnstocher*, mefi-Verlag, 2013.

Algebra 9/10

NEU

Der zweite Band der vollständigen Neubearbeitung



DMK (Hrsg.)

Algebra 9/10 Aufgaben

inklusive E-Book

1. Auflage 2018

304 Seiten, 17 × 23 cm, gebunden
ISBN 978-3-280-04072-0

Preis CHF 39.–

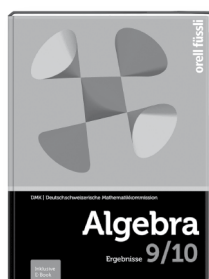
Erhältlich ab März 2018

BLICK INS BUCH:
www.ofv.ch/lermedien

Die DMK-Aufgabensammlung zur Algebra wurde inhaltlich erweitert und den aktuellen Anforderungen des Gymnasiums angepasst. Mit diesem zweiten Band wird die gesamte Algebra abgedeckt, wie sie für das Grundlagenfach Mathematik vorgesehen ist. Punktuell stehen zusätzliche Themen zur Verfügung, die sich für das Schwerpunktfach eignen. Ein Brückenskapitel hilft Lernenden beim Einstieg ins Kurzzeitgymnasium. Vielfältige Aufgaben stehen im Zentrum und werden ergänzt durch kurz gefasste Theorie. Jedes Kapitel schliesst neu mit vermischten Aufgaben und Kontrollaufgaben ab.

Inhaltsübersicht

- Brückenskapitel
- Bruchterme
- Proportionalitäten und lineare Funktionen
- Lineare Gleichungssysteme
- Quadratische Gleichungen und Funktionen
- Potenzen
- Exponentialfunktionen und Logarithmen
- Anhänge: Reelle Zahlen und Funktionen



DMK (Hrsg.)

Algebra 9/10 Ergebnisse

inklusive E-Book

1. Auflage 2018

144 Seiten, 17 × 23 cm, broschiert
ISBN 978-3-280-04074-4

Preis CHF 45.–

Erhältlich ab März 2018

BLICK INS BUCH:
www.ofv.ch/lermedien



Unsere E-Books:

- sind in der kostenlosen App «Fachmedien Orell Füssli Verlag» (im Apple App Store bzw. Google Play Store) oder unter <https://reader.ofv.ch> erhältlich
- können ohne zusätzliche Installation auf jedem PC online und als App auf dem Tablet offline sofort verwendet werden
- sind mit verschiedenen interaktiven Funktionen angereichert
- können beliebig mit eigenen Notizen ergänzt werden
- enthalten verlinkte Seitenverweise und Internetadressen

Bestellen Sie online über
www.ofv.ch/lermedien

orell füssli Verlag

Letzte zwei Ziffern von aufeinander folgenden Primzahlen

H.U. Keller (hukkeller@bluewin.ch), MNG Zürich

"Aufeinander folgende Primzahlen wiederholen ihre Endziffer nur ungern": Dies war die Folgerung der Mathematiker Kannan und Soundararajan von der kalifornischen Stanford–Universität nach ihrer Untersuchung der Übergangshäufigkeiten der letzten Ziffern von aufeinander folgenden Primzahlen (vgl. dazu auch das VSMP–Bulletin Nr. 135 vom September 2017, S. 3).

Interessant ist in diesem Zusammenhang natürlich auch die Frage, wie gross die Übergangshäufigkeiten nicht nur bei der letzten Ziffer allein, sondern bei den letzten beiden Ziffern von zwei aufeinander folgenden Primzahlen sind. Da es ab der dritten Primzahl $p[3] = 5$ nur 40 Möglichkeiten für die letzten beiden Ziffern der weiteren Primzahlen gibt, ergeben sich auch nur gerade 1600 mögliche Übergänge: Wenn wir die n -te Primzahl mit $p[n]$ bezeichnen, so ist z. B. der Übergang von $p[62] = 293$ zu $p[63] = 307$ einer unter einer Vielzahl von Übergängen der letzten beiden Ziffern von "...93" zu "...07".

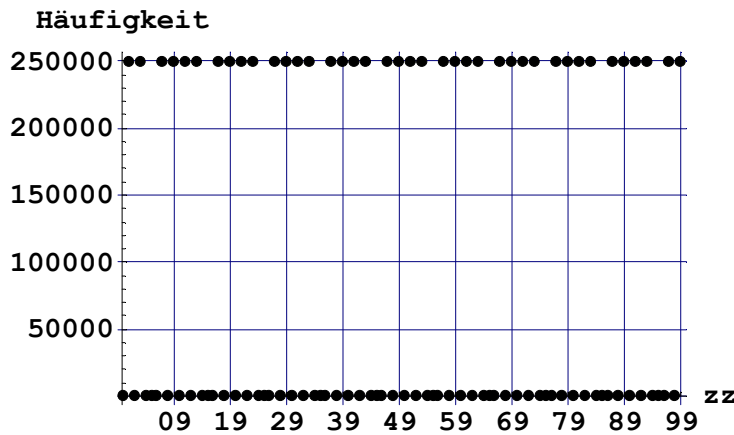


Fig. 1: Häufigkeit der letzten beiden Ziffern "...zz".

Wegen der steigenden Rechenzeit habe ich mich hier auf die ersten 10 Millionen Primzahlen $> p[4]=7$ beschränkt. Zunächst zeigt sich, dass die letzten beiden Ziffern recht gleichmässig verteilt sind: Alle Paare kommen mit der ungefähr gleichen und erwarteten Häufigkeit von etwa einer viertel Million vor, wie sich dies aus der Fig. 1 ergibt.

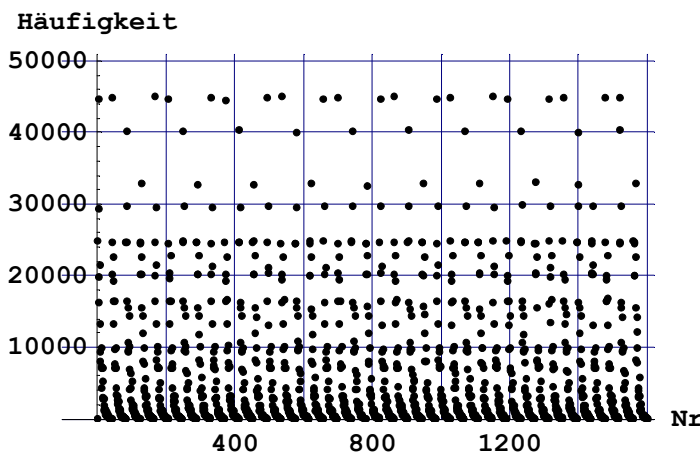


Fig. 2: Häufigkeit der 1600 möglichen Übergänge der letzten beiden Ziffern von $p[n]$ zu $p[n+1]$.

Die Häufigkeiten von jedem der 1600 möglichen Übergänge, von '...01' → '...03' bis '...97' → '...99', können leicht ausgezählt werden und von '0103' bis '9799' geordnet und mit je einer Nummer Nr von 1 bis 1600 durchnummeriert werden. Werden diese Häufigkeiten graphisch dargestellt, ergibt sich ein absolut erstaunliches, unerwartetes und hübsches Muster, das in Fig. 2 dargestellt ist.

Es fällt sofort auf, dass gewisse Übergänge in immer gleichen Abständen und mit etwa den gleichen Häufigkeiten auftreten. Die 20 Spitzenreiter – alle mit einer Häufigkeit von mehr als 44'000, aber weniger als 46'000 – sind in der folgenden Tabelle in Fig. 3 aufgezählt.

$\Delta Nr:$	Nr:	von ...zz:	\rightarrow	nach ...zz:	$\Delta Nr:$	Nr:	von ...zz:	\rightarrow	nach ...zz:
-	3	01	\rightarrow	07	-	44	03	\rightarrow	09
164	167	11	\rightarrow	17	164	208	13	\rightarrow	19
164	331	21	\rightarrow	27	164	372	23	\rightarrow	29
164	495	31	\rightarrow	37	164	536	33	\rightarrow	39
164	659	41	\rightarrow	47	164	700	43	\rightarrow	49
164	823	51	\rightarrow	57	164	864	53	\rightarrow	59
164	987	61	\rightarrow	67	164	1028	63	\rightarrow	69
164	1151	71	\rightarrow	77	164	1192	73	\rightarrow	79
164	1315	81	\rightarrow	87	164	1356	83	\rightarrow	89
164	1479	91	\rightarrow	97	164	1520	93	\rightarrow	99

Fig. 3: Die 20 Übergänge mit den grössten Häufigkeiten (mit $\mu = 44800.7$ und $\sigma = 149.2$ (!)).

Erstaunlich ist dabei vor allem, dass die gleichen Einerzifferübergänge immer wieder in den gleichen Abständen erscheinen, und zwar mit einer konstanten Differenz der Nummern ΔNr von 164, aber auch mit einer ebenfalls konstanten Differenz von 41 in den Nummern 3 bis 44, 167 bis 208, etc., und gleichfalls konstanter Differenz von $3 \cdot 41 = 123$ in den Nummern von 44 bis 167, 208 bis 331, etc.!

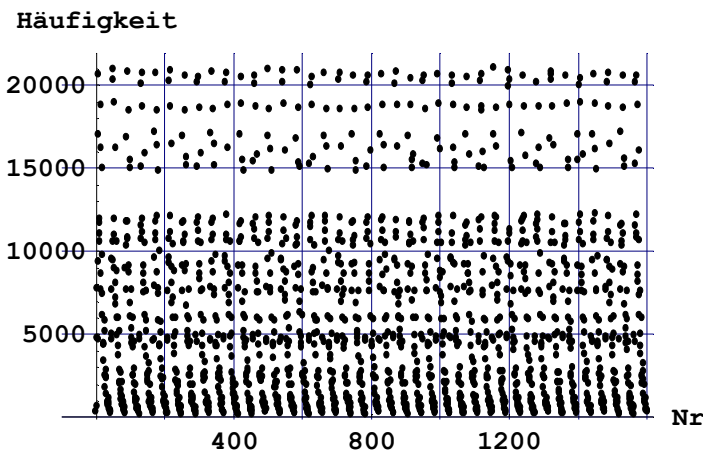


Fig. 4: Häufigkeit der 1600 möglichen Übergänge der letzten beiden Ziffern von $p[n]$ zu $p[n+2]$.

Wie steht es weiter mit den Häufigkeiten der Übergänge der letzten beiden Ziffern einer Primzahl $p[n]$ zu denen ihres übernächsten Nachbarn $p[n+2]$? Auch hier ist wieder eine bemerkenswerte Struktur sichtbar, wie sich dies aus dem Diagramm in Fig. 4 ergibt.

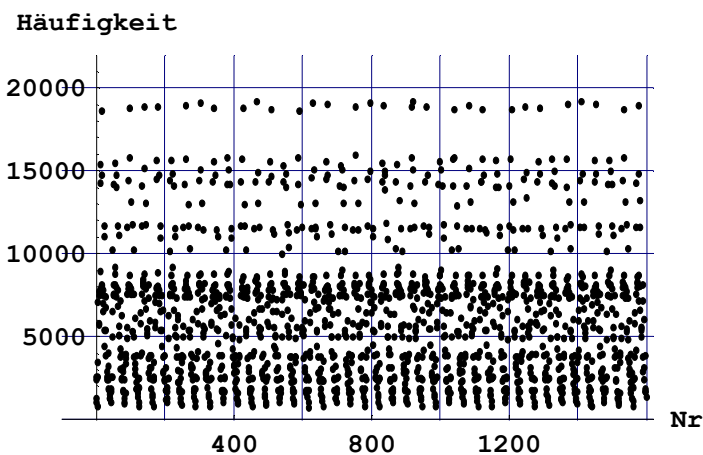
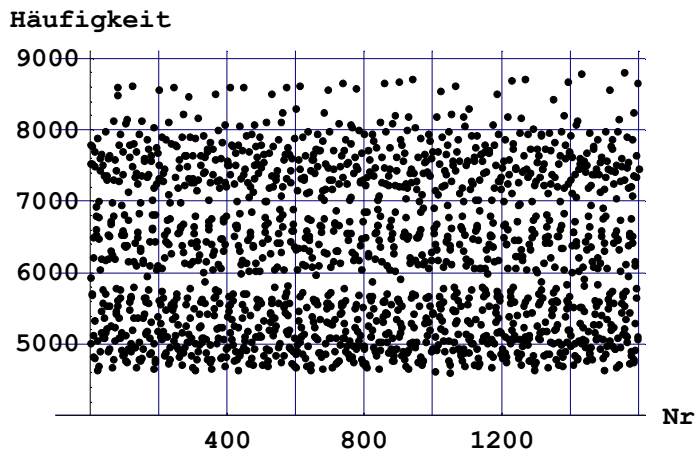


Fig. 5: Häufigkeit der 1600 möglichen Übergänge der letzten beiden Ziffern von $p[n]$ zu $p[n+3]$.

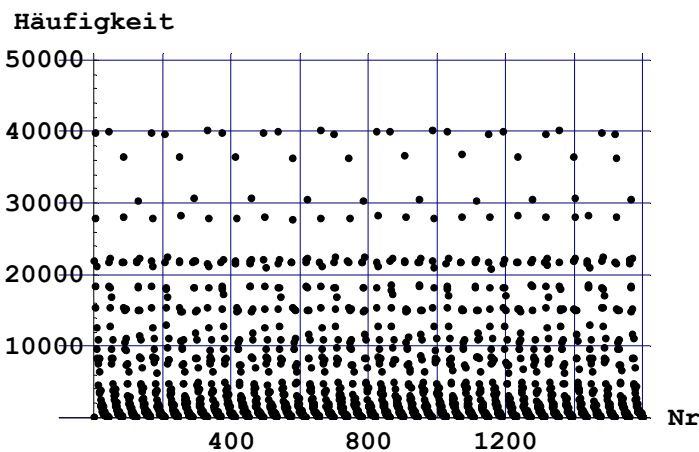
Die Häufigkeit der Übergänge der letzten zwei Ziffern einer Primzahl $p[n]$ zu denen ihres überübernächsten Nachbarn $p[n+3]$ zeigt ebenfalls eine interessante Struktur, wie sich dies auf dem Diagramm in Fig. 5 sehen lässt.



Die Häufigkeiten der Übergänge zu jeweils weiter entfernten Nachbarn scheinen sich etwas anzugleichen, aber gewisse Strukturen sind immer noch klar ersichtlich. Werden beispielsweise die Häufigkeiten des Überganges der letzten beiden Ziffern zu denen ihres 17. Nachbarn gezählt, also von $p[n]$ zu $p[n+17]$, ergibt sich das in Fig. 6 wiedergegebene Häufigkeitsdiagramm.

Fig. 6: Häufigkeit der 1600 möglichen Übergänge der letzten beiden Ziffern von $p[n]$ zu $p[n+17]$.

Werden nicht die beiden Endziffern der ersten 10 Millionen Primzahlen, sondern die beiden Endziffern der Primzahlen von $p[30'000'001] = 573'259'433$ bis $p[40'000'000] = 776'531'401$ mit denen ihrer jeweiligen unmittelbaren Nachbarn verglichen, ergibt sich das Diagramm in Fig. 7.



Diese Häufigkeitsverteilung hat eine nicht unerwartete Ähnlichkeit mit den in Fig. 2 wiedergegebenen Häufigkeiten, wobei die maximalen Häufigkeiten – für mich nicht ganz erklärlich – mit rund 40'000 hier deutlich kleiner sind als die etwa 44'800 Vorkommnisse beim Vergleich bei den ersten 10 Millionen Primzahlen und ihren direkten Nachbarn.

Fig.7: Häufigkeit der 1600 möglichen Übergänge der letzten beiden Ziffern von $p[n]$ zu $p[n+1]$ für $30'000'001 \leq n \leq 40'000'000$.

Als Schluss:

Vielleicht ergeben sich durch ein genaueres Studium der Übergangshäufigkeiten der letzten 1, 2, 3, ... Endziffern einer Primzahl $p[n]$ zu den entsprechenden Endziffern ihrer nächsten oder weiter entfernten Nachbarn $p[n+1]$, $p[n+2]$, $p[n+3]$, ... neue Einblicke in die Verteilung der Primzahlen innerhalb der natürlichen Zahlen. Es scheint, dass in der Musik der Primzahlen immer noch manch ein bis anhin unbekannter Klang gefunden werden könnte!

Das neue Lehrmittel der DMK: Stochastik

Die Frage nach der Wahrscheinlichkeit begegnet uns in verschiedenen Bereichen des Lebens: ob beim Würfelspiel, bei einer Umfrage des Bundes oder einem medizinischen Test. Doch, wie können solche Wahrscheinlichkeiten mathematisch zuverlässig berechnet werden? Welche Ideen müssen dafür entwickelt und welche Überlegungen angestellt werden? Bereits im 14. und 15. Jahrhundert hat die «Berechnung des Zufalls» sowohl Spieler als auch Mathematiker interessiert. Um 1812 schrieb der französische Mathematiker Pierre-Simon Laplace: «Es ist bemerkenswert, dass eine Wissenschaft, die mit der Untersuchung von Glücksspielen begann, zur wichtigsten Erkenntnis der Menschheit wurde». Das neue Lehrmittel der DMK «Stochastik» hilft bei der Suche nach dieser «wichtigsten Erkenntnis der Menschheit» und bietet Schülerinnen und Schülern wie auch Lehrpersonen viele interessante und realitätsnahe Inhalte und Beispiele.

Unter dem Begriff der Stochastik verstehen die Autoren des Lehrmittels die Teilgebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik. Die didaktische Ausrichtung beschreiben sie wie folgt: Das Lehrmittel kann im Grundlagenfach Mathematik eingesetzt werden, unabhängig von didaktischen oder methodischen Präferenzen. Es dient als Leitfaden für die Fragestellungen und Probleme, mit denen sich die Schüler auseinandergesetzt haben sollten. Das Lehrmittel verfügt zudem über ausführliche Theorieteile, die angehenden Studierenden ermöglichen, wesentliche Inhalte selbständig aufzuarbeiten. Um die Neugierde der Schülerinnen und Schüler zu wecken, führt eine Einstiegsaufgabe mit einer offenen Fragestellung in das jeweilige Thema ein. Anschliessend wird die Theorie anhand von anschaulichen und anwendungsbezogenen Beispielen hergeleitet. Damit bietet das Lehrmittel eine solide Grundlage für den Stochastikunterricht.

Im kommentierten Lösungsband finden sich neben den Lösungen der Einstiegsaufgaben auch thematische Ergänzungen, Exkurse und Literaturhinweise. Der Lösungsband schafft damit einen attraktiven Mehrwert für Lehrpersonen wie auch für Schülerinnen und Schüler, die das Thema im Selbststudium aufarbeiten.

Das Lehrmittel wird dem 2016 publizierten *Kanon Mathematik* gerecht, in welchem der Stochastik mehr Gewicht verliehen wurde.

Stochastik (Theorie / Aufgaben und kommentierte Lösungen) erscheint im Februar 2018.

Stochastik

Theorie und Aufgaben für die Sekundarstufe II

inklusive E-Book

DMK (Hrsg.)

184 Seiten, 18,4 × 26,5 cm, broschiert mit Klappe

ISBN 978-3-280-04139-0

Preis: CHF 35.-

Kommentierte Lösungen und Ergänzungen

inklusive E-Book

DMK (Hrsg.)

96 Seiten, 18,4 × 26,5 cm, broschiert

ISBN 978-3-280-04144-4

Preis: CHF 79.-

Orell Füssli Verlag

Bestellungen: www.ofv.ch/lernmedien



EAGLE-Starthilfe, Kartografie. Hans Walser, 88 Seiten. Edition am Gutenbergplatz Leipzig EAGLE, 2016, EAGLE 098. CHF 11.60. ISBN 978-3-95922-098-9

Buchrezension von H.R. Schneebeli, Wettingen

Die EAGLE-Starthilfe bietet Lehrtexte an, die den Einstieg in ein Hochschulstudium erleichtern sollen. Das Buch von Hans Walser betrifft Fächer wie Geografie, Geodäsie, Kartografie, Geoinformation.

Der Text handelt von der Geometrie auf einer Kugel und von Abbildungen einer Kugel in eine Ebene. Walser bietet wesentliche Grundlagen und verzichtet auf akademische Feinheiten [z.B. das Geoid], die ein Fachstudium abdecken wird. Sein Vorgehen baut auf Anschauung und [auch einfachen handwerklichen] Erfahrungen. Sein Programm ist weise beschränkt auf wesentliche Beispiele und Begriffe aus der Kugelgeometrie und den kartografischen Abbildungsverfahren. Invarianten bei Abbildungen von der Kugel in die Ebene, flächentreue Karten, winkeltreue Karten. Warum gibt es keine längentreue Abbildung von der Kugel in die Ebene? Warum sind Verzerrungen bei Kartenprojektionen in die Ebene unvermeidbar?

Eine repräsentative Auswahl von wichtigen Kartenprojektionen wird mit ihren Eigenschaften vorgestellt und verglichen. Man kann bloss staunen, wie dies Hans Walser auf weniger als 100 Seiten gelingt. Ein wichtiger Grund sind die zahlreichen, gut konzipierten Abbildungen.

Im Abschnitt sphärische Vielecke wird der Zusammenhang zwischen der Winkelmessung und der Flächenmessung bei sphärischen Vielecken behandelt. Sphärische Trigonometrie wird elegant gewonnen aus den Eigenschaften von Vektorprodukt und Skalarprodukt mit Kugelkoordinaten.

Der Text ist sehr gut lesbar, didaktisch mustergültig konzipiert, versehen mit Aufgaben und kommentierten Lösungen. Er eignet sich auch sehr gut als Grundlage für *Anwendungen der Mathematik* mit Vektorgeometrie als Basis und einem Blick auf die Kugelgeometrie und ausgewählte Themen zur Kartografie. Damit empfiehlt sich das kleine Büchlein nicht nur für das Selbststudium vor Studienbeginn, sondern auch als Grundlage für Anwendungen der Geometrie im Schwerpunktfach PAM oder im Ergänzungsfach AM.

Neuheiten beim Mathematikwettbewerb Känguru 2018

11a4h€ + i(ãπ9ur)^u



Känguru Schweiz ist jetzt auch auf Facebook

Dort gibt es regelmässig Einblicke über das Wirken und Schaffen der Schweizer «Mathe-Kängurus». Natürlich würden wir uns über zahlreiche Besuche, Likes und Kommentare von Ihnen sehr freuen!

Känguruaufgaben sind jetzt auch auf Englisch erhältlich

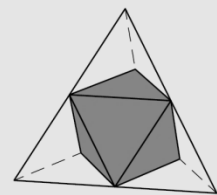
Wir können ab jetzt die Känguru-Aufgaben für den Wettbewerb auch auf Englisch zur Verfügung stellen. Die Aufgaben sind analog zu den deutschen und haben jeweils den gleichen Lösungsbuchstaben. Bei der Anmeldung können entsprechende Aufgabenblätter bestellt werden.

Muster gefällig?

Hier die ersten der zehn schwierigsten Multiple-Choice Fragen für das Schuljahr 11–13 von 2017.

- 21.** The four corners of a regular tetrahedron are cut off by four planes, each passing through the midpoints of three adjacent edges, as shown. What fraction of the volume of the original tetrahedron is the volume of the resulting solid, which is marked in grey?

(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{1}{3}$



- 22.** The polynomial $5x^3 + ax^2 + bx + 24$ has integer coefficients a and b . Which of the following is *certainly not* a root of this polynomial?

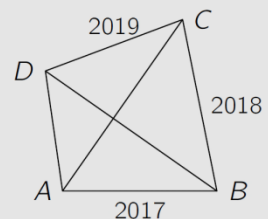
(A) $x = 1$ (B) $x = -1$ (C) $x = 3$ (D) $x = 5$ (E) $x = 6$

- 23.** A sequence of numbers a_n is given by $a_1 = 2017$ and $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n}$ for all integers $n \geq 1$. What is a_{2017} ?

(A) -2017 (B) $-\frac{1}{2016}$ (C) $\frac{2016}{2017}$ (D) $\frac{2017}{2016}$ (E) 2017

- 24.** In the quadrilateral $ABCD$ the diagonals intersect in the interior and are perpendicular. $|AB| = 2017$, $|BC| = 2018$ and $|CD| = 2019$. What is $|AD|$? (diagram not to scale)

(A) 2016 (B) 2018 (C) $\sqrt{2020^2 - 4}$
 (D) 2020 (E) $\sqrt{2018^2 + 2}$



Känguru Schweiz
 Meike Akveld/Werner Durandi

www.mathe-kaenguru.ch



TEACHERS TEACHING
WITH TECHNOLOGY



3-tägiger Workshop vom 26. bis 28. April 2018 auf dem Appenberg (Zäziwil)

T³ (Teachers Teaching with Technology) ist eine internationale Vereinigung von Lehrkräften. Die Mitglieder widmen sich der Entwicklung von Unterrichtseinheiten in den Bereichen Mathematik, Natur- und Wirtschaftswissenschaften, wobei der sinnvolle Einsatz aktueller Technologie gemäss der MINT- / STEM-Offensive im Zentrum ihrer Arbeit steht. **T³** wird vom US-amerikanischen Elektronikkonzern *Texas Instruments* finanziert. Deshalb steht der Einsatz der technologischen Lehrmittel dieser Firma im Vordergrund: Handheld-Rechner der Serien TI-30X Plus/Pro (wissenschaftliche Rechner), TI-84 CE-T (Grafikrechner), und TI-Nspire CX (CAS), Softwareprodukte wie TI-Nspire (PC, Mac®, i-Pad®) oder Lua (Programmierungsumgebung) und seit kurzem das Microcontroller-System TI-Innovator® und der Roboter TI-Innovator® Rover. Dieses Material wird den Mitgliedern von **T³** zur Verfügung gestellt. Daneben werden aber im Rahmen von **T³** im Sinne eines plattform-offenen Technologieeinsatzes auch Alternativen, etwa von Vernier, National Instruments oder Lego, untersucht und eingesetzt.

Die Sektion **T³ Schweiz** führt vom **Donnerstag, 26. bis Samstag, 28. April 2018** ihren traditionellen jährlichen Workshop durch. Im geschützten Rahmen eines schönen Hotels werden im freundschaftlichen Austausch zwischen etwa 20 erfahrenen Lehrkräften Unterrichtseinheiten entwickelt – zum Eigengebrauch, zur Präsentation an interessierten Schulen, oft auch für spätere Publikationen. Der Anlass findet im **Hotel Appenberg bei Zäziwil im Emmental** statt und ist **kostenlos** (freie Kost und Logis bei Selbstanreise). Teilnahmeberechtigt sind Lehrkräfte und Studierende (auch Anfänger/innen!). Die Teilnehmerzahl ist beschränkt. Ihre Anmeldung an eine der nachfolgenden E-Mail-Adressen würde uns sehr freuen!

Christof Deiwiks, Schulberater Schweiz (Texas Instruments), c-deiwiks@ti.com
Hans Kammer, Koordinator **T³ Schweiz** a.i., hanskammer@bluewin.ch

Congrès de l'UdPPC à Limoges, 28 → 31 octobre 2017

Didier Roulet Rue de la Scie 2 1207 Genève

rouletd@infomaniak.ch

Comme chaque année, l'Union (française) des Professeurs de Physique et Chimie a invité un représentant de la CRP à son congrès annuel, qui se tenait cette année à Limoges. J'ai eu la chance d'être ce représentant, et je me suis - à tous points de vue - régalé. En effet, Limoges est comme chacun sait non seulement un haut lieu de la porcelaine (de table comme industrielle) et de la céramique, mais aussi le pays de la vache limousine; et je peux témoigner ici que sa qualité n'est pas seulement légendaire, mais aussi bien réelle.

Parfaitement organisé, le congrès se composait de conférences plénières, d'ateliers, de visites scientifiques et de tourisme, le tout entrecoupé d'agapes délicieuses et d'un dîner "officiel" de la meilleure qualité.

Les conférenciers et conférencières, toutes et tous brillants, ont traité de la physique quantique à l'œil nu, de la plongée de la sonde Cassini sur Saturne, du rôle des métaux dans le monde vivant, d'une nouvelle technique de mesure pour l'astrophysique, tandis que dans les petits ateliers, j'ai appris comment on pouvait connaître la taille moyenne des grains d'une poudre et j'ai vu la réalisation d'un simulateur d'aurores boréales réalisé avec du matériel disponible dans tous les établissements du secondaire II. S'ajoutent à cela le côté touristique (visite totalement passionnante d'un ancien four de cuisson pour la céramique) et les visites scientifiques, où, tout comme pour le tourisme ou les ateliers, le plus difficile était d'en choisir une plutôt qu'une autre. J'ai quant à moi pu voir un laser (CO_2) qui découpe indifféremment du plexiglas ou de l'acier, un dispositif qui, pour relever la position des points de la surface d'un objet, parcourt cette surface avec un faisceau laser ($\sim 10^5$ points / seconde...), et une installation de stéréolithographie (réalisation d'objets en 3D).

Tout ce programme était entrecoupé de repas, officiels ou non mais - tradition française oblige - toujours délicieux, au cours desquels les échanges avec les collègues (de France bien sûr, mais aussi de Belgique ou d'Italie) ont toujours été très intéressants.

Un grand merci donc à l'UdPPC pour son invitation, et aussi un grand bravo à l'équipe régionale des professeurs limougeaux pour leur accueil et leur organisation.

Pour la CRP, Didier Roulet

Ré-édition de l'expérience de Fizeau

Didier Roulet Rue de la Scie 2 1207 Genève

rouletd@infomaniak.ch

Introduction

Cet article a été rédigé suite à la conférence que Francesco Lo Bue, de l'université de Mons en Belgique, a donnée en août dernier dans le cadre du congrès de l'association belge des professeurs de physique et chimie, conférence à laquelle j'ai eu la chance d'assister.

Bref historique

La première "bonne" valeur (c'est-à-dire qui donne correctement l'ordre de grandeur de la vitesse de la lumière) a été obtenue en 1676 par Ole Rømer, qui a trouvé 220000 km/s, soit un écart de 26% par rapport à la valeur aujourd'hui retenue de 299792 km/s. Rømer a pensé à tenir compte de la variation de la distance entre la Terre et Jupiter, variation qui donne lieu à des avances ou à des retards par rapport aux valeurs attendues lorsque les satellites de Jupiter (en particulier Io) disparaissent derrière la planète ou réapparaissent.

En 1849, Hippolyte Fizeau a 30 ans et il imagine pour mesurer la vitesse de la lumière le dispositif que tout le monde connaît, et qui est mentionné dans tous les livres de physique, mais contrairement au célèbre pendule de Foucault, depuis 1904 plus personne n'a réalisé cette expérience.

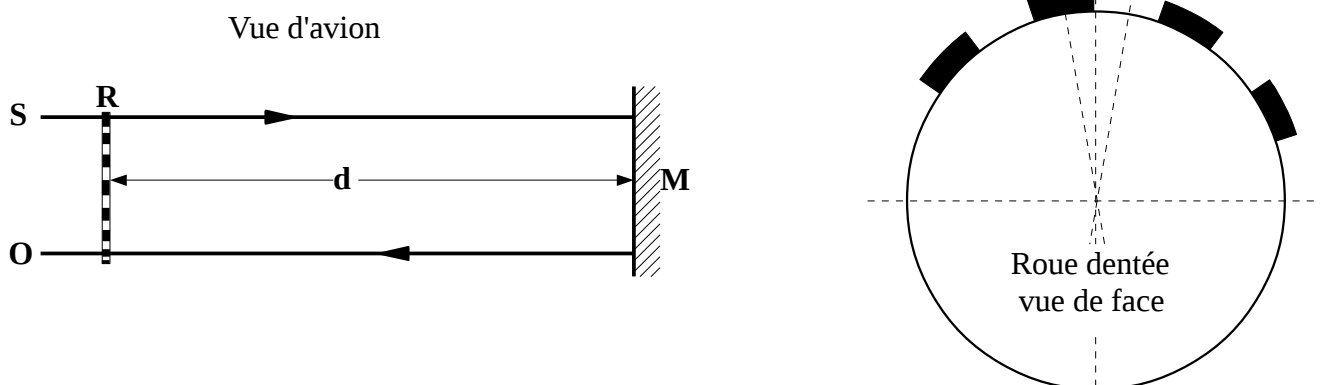
C'est le but de l'équipe de l'université de Mons.

Le principe

On fait passer à travers (l'intervalle entre) deux dents de la roue **R** la lumière émise par la source **S**. Cette lumière va en ligne droite jusqu'au miroir **M** puis revient sur ses pas. Si la roue est immobile ou tourne à basse fréquence, la lumière repasse par le même intervalle, mais si la rotation est suffisamment rapide, lors de son retour la lumière rencontre une dent: l'observateur **O** ne voit plus le spot lumineux renvoyé par le miroir.

Connaissant la fréquence de rotation de la roue, son diamètre et le nombre de dents, on calcule aisément le temps qu'a mis la roue pour tourner d'un angle ϕ . (voir les dessins ci-dessous) : c'est aussi le temps qu'a mis la lumière pour faire l'aller-retour **R-M-R** ($=2d$). On peut ensuite faire croître encore la fréquence de rotation : en passant par le créneau suivant, la lumière ré-apparaît (la roue a alors tourné d'un angle 2ϕ), puis disparaît à nouveau lorsqu'elle est bloquée par la prochaine dent (ce qui correspond à un angle de rotation de 3ϕ), etc...

Comme on connaît la distance **d** ($=\mathbf{R-M}$), il est facile d'en déduire la vitesse de la lumière.



N.B. : Sur le schéma ci-dessus, la lumière passe au retour par un espace inter-dentaire diamétralement opposé à celui de l'aller: ceci est sans conséquence, car **d** vaut plusieurs kilomètres, alors que le diamètre de la roue est d'environ 10 cm.

La pratique...

Comme on va le voir, il y a loin de la théorie à la pratique. Grâce à la valeur obtenue par Rømer près de deux siècles plus tôt, Fizeau connaît l'ordre de grandeur de c . Il doit donc choisir une distance d aussi grande que possible; il choisit de faire l'expérience entre Suresnes et Montmartre, soit 8633 mètres.

La source lumineuse

Cela demande d'avoir une source suffisamment puissante pour être perçue après un trajet (aller-retour) de plus de 17 km. En 1849, Fizeau ne dispose d'aucune source électrique pour produire une lumière intense : il choisit la lumière solaire pour les expériences faites de jour, et une lumière dite "Drummond" (une flamme d'un chalumeau oxy-acétylénique dirigée sur un morceau de craie) pour les expériences de nuit.

En 2016, l'équipe belge a opté pour un laser (vert), mais de très faible puissance (5 milliwatts, soit un pointeur laser), car le but était de permettre à tout un chacun de pouvoir venir faire une mesure sans danger.

La roue

Fizeau fait appel à un fabricant renommé pour fabriquer avec le plus grand soin un disque de métal de 12 cm de diamètre sur la périphérie duquel il taille 720 dents, soit des dents de 0,26 mm de largeur...

Dans l'exposé du principe ci-dessus, j'ai parlé d'une fréquence de rotation de la roue de 12 tours par seconde. Il faut être conscient que Fizeau ne disposait bien sûr d'aucun asservissement électrique, et c'est aujourd'hui une question non élucidée : comment a-t-il fait, non seulement pour connaître avec précision la valeur de la fréquence de rotation de la roue, mais encore pour la stabiliser durant le temps de la mesure, et pour pouvoir la modifier jusqu'à obtenir une extinction du signal ?

Pour la ré-édition, la roue choisie se trouve dans le commerce : c'est un disque de 10 cm de diamètre percé de 445 fentes, et la régulation électronique ne pose plus de problème pour cette étape. Ainsi la fréquence de rotation a pu être augmentée d'un facteur 8 (100 tours / seconde) par rapport à l'expérience de Fizeau.

Le réflecteur

Dans la version moderne, la distance choisie était de 5,5 km. Vu la faible puissance du laser utilisé, il était naturel de penser à un miroir, mais les difficultés d'alignement et la sensibilité des réglages étaient tels que finalement, ce qui a donné les meilleurs résultats fut un écran réflecteur "perlé", du type dont est constitué le revêtement des panneaux de signalisation routière. Contre toute attente, le spot était facilement visible même en plein jour pour un observateur placé dans l'axe du faisceau.

L'observation

Il semble que Fizeau ait dirigé le faisceau de retour sur le même chemin qu'à l'aller, en intercalant un miroir semi-réfléchissant orienté à 45° et placé entre la source et la roue dentée. Là encore, on ne sait pas comment il a résolu la difficulté que les nombreuses réflexions parasites sur les surfaces des lentilles devaient créer lors des mesures.

Dans la version moderne, le faisceau de retour passe (ou pas) entre des dents situées à l'opposé de celles que traverse le faisceau aller, comme sur le schéma ci-dessus.

Les mesures

La valeur retenue par Fizeau pour l'ensemble de ses mesures est 315300 km/s, alors que l'université de Mons a obtenu 297000 km/s.

Conclusion

Il vaut la peine de temps en temps de se retourner et de prendre conscience, quand nous insérons ces constantes physiques indispensables (G , c , ϵ_0 , μ_0 , ...) dans une calculatrice (encore une facilité très récente ...) ou dans un programme afin d'obtenir un résultat chiffré pour une force, une distance, un courant, un champ ..., que chacune d'elles a nécessité des années d'efforts à des personnes astucieuses, inventives, habiles, tenaces, parfois géniales, alors que nous lisons si facilement leur valeur dans une table numérique ou sur Internet et que presque toujours leur obtention si ardue est mentionnée très (trop !) brièvement dans les cours.

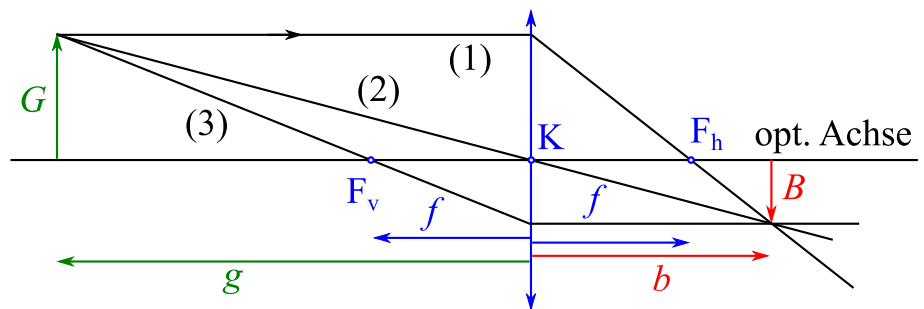
Axialer Abbildungsmassstab

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

1 Einleitung

Die Abbildung von Gegenständen durch dünne Sammellinsen ist ein gängiges Thema an Gymnasien, denn sie lässt sich geometrisch konstruieren, siehe Abbildung 1, oder algebraisch berechnen.

Abbildung 1: Konstruktion des Strahlengangs vom Gegenstand zum Bild bei der optischen Abbildung durch eine dünne Sammellinse. Die Linse ist auf ihrer Hauptebene, den Knotenpunkt und die zwei Fokusse reduziert.



Aus Abbildung 1 können mit den Strahlensätzen die Abbildungsgleichungen hergeleitet werden.

$$\text{Abbildungsmaßstab } A = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \qquad \text{Gauss'sche Linsenformel } \frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \qquad (1)$$

In diesen Gleichungen ist f die Brennweite der Linse, g die Gegenstandsweite, b die Bildweite, G die Gegenstandsgrösse und B die Bildgrösse. Das Verhältnis $A = B/G$ heisst lateraler oder transversaler Abbildungsmaßstab, weil er quer zur optischen Achse gemessen wird. Das ist sinnvoll, weil der Bildschirm ja meistens auch quer (senkrecht) zur optischen Achse aufgestellt wird. Der laterale Abbildungsmaßstab ist für alle Strecken auf dem Bildschirm gleich.

Viel seltener wird der axiale oder Tiefen-Abbildungsmaßstab berechnet. Zwei Gegenstände, die Abstand dg parallel zur optischen Achse haben, werden auf zwei Bilder mit Abstand db projiziert. In welchem Verhältnis stehen diese Längen? Für kleine Abstände gilt

$$\frac{db}{dg} = \frac{d}{dg} \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{g} \right)^{-1} = - \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{g} \right)^{-2} \frac{1}{g^2} = - \frac{b^2}{g^2} = -A^2 \qquad (2)$$

Dummerweise bin ich nämlich auf die Idee gekommen, diese Aufgabe an einer Prüfung zu stellen (mit entsprechender Instruktion natürlich). Etwa die Hälfte von der besseren Hälfte der Klasse konnte die Ableitung formal korrekt durchrechnen, aber niemand konnte das Resultat interpretieren. Ich hätte gerne gelesen, dass die Abbildung längs und quer zur optischen Achse in der Regel verschiedene Abbildungsmaßstäbe aufweisen, das Bild also verzerrt erscheint.

Da ich mir das Ganze aber selber schlecht vorstellen konnte, habe ich im nächsten Abschnitt ein paar Bilder berechnet, damit man diese Verzerrung sieht.

2 Abbildung

Was passiert mit einem Gegenstand, der längs und quer zur optischen Achse ausgedehnt ist? Wir wollen einen Spezialfall untersuchen: Der Gegenstand liege in einer Ebene, welche die optische Achse enthält. Diese Ebene sei meine Zeichenebene. Als Gegenstand habe ich einfache Gitterstrukturen genommen. Für jeden Gegenstandspunkt (links von der Hauptebene der Linse) liess ich mit Hilfe der Abbildungsgleichungen (1) den korrespondierenden Bildpunkt berechnen und zeichnen. Einige Beispiele sind in Abb. 2-4 wiedergegeben.

Abbildung 2: (rechts) Optische Abbildung eines quadratischen Gitters durch eine Linse

Die Linse ist auf ihre Hauptebene (vertikaler Strich) und ihre zwei Brennpunkte reduziert. Die achsenparallelen Gitterstäbe werden auf Geraden abgebildet, die nicht mehr parallel zu einander sind. Der axiale Abbildungsmaßstab variiert über das Bild. Einige Bildpunkte sind virtuell.

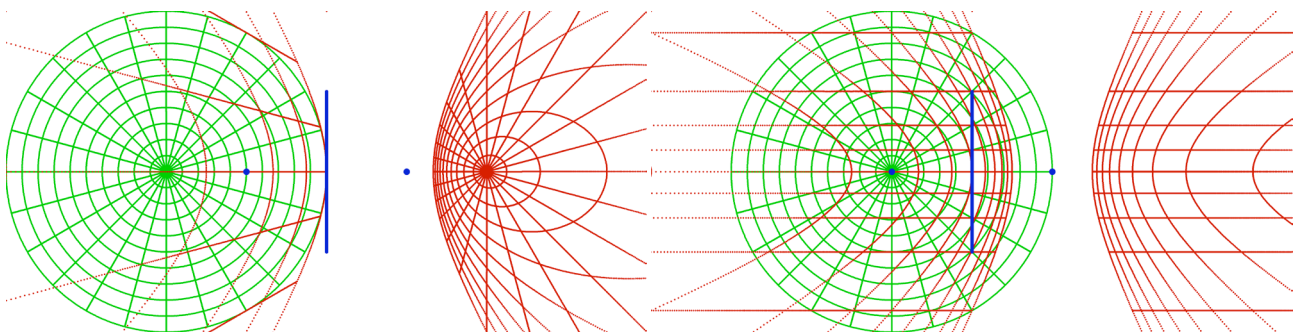
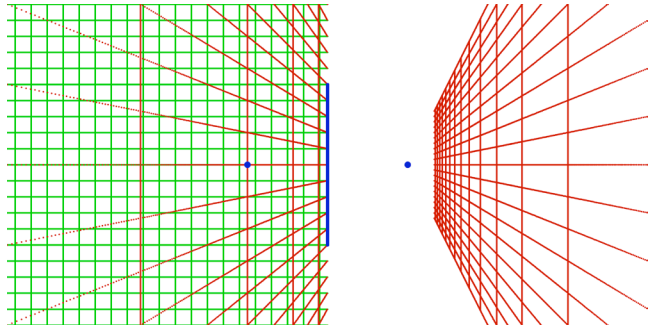
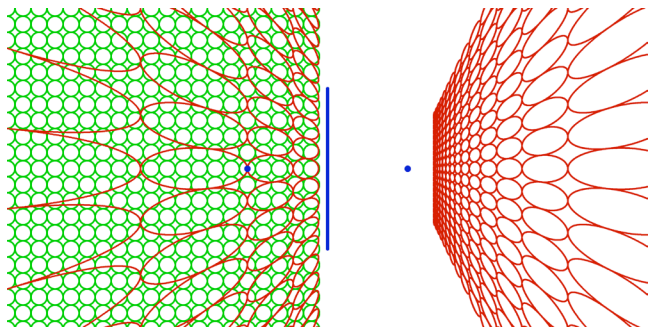


Abbildung 3: (oben) Optische Abbildung konzentrischer Kreise durch eine Sammellinse. Links sind die Kreise auf den Punkt $g = 2f$ auf der optischen Achse zentriert, rechts auf den Brennpunkt der Linse. Gegenstandspunkte auf einem Brennpunkt werden nach unendlich abgebildet, d.h. der Kreis wird aufgetrennt. Wir sehen auch, dass Geraden auf Geraden abgebildet werden. Die Abbildung ist geradentreu.

Abbildung 4: (rechts) Optische Abbildung eines Gitters aus Kreisen durch eine Sammellinse

Die meisten Kreise werden auf auf geschlossene Ovale abgebildet, die wie Ellipsen aussehen.



Einige Bild-Kurven in den Abbildungen 3-4 sehen verdächtig aus wie Kegelschnitte (Ellipsen oder Hyperbeln). Ist das wahr oder nur eine Illusion?

3 Transformation

Die optische Abbildung, wie sie in den Abb. 2-4 dargestellt ist, kann mathematisch als Transformation der Ebene auf die Ebene betrachtet werden. Seien (x, y) Koordinaten in der Gegenstandsebene mit x parallel zur optischen Achse und y parallel zur Hauptebene der Linse. Der Nullpunkt liege im Haupt- respektive Knotenpunkt der Linse. Seien (ξ, ζ) die entsprechenden Koordinaten in der Bildebene. Die Abbildungsgesetze (1) liefern für diesen Fall

$$x = \frac{f\xi}{\xi - f} \qquad y = \frac{\zeta f}{\xi - f} \qquad (3)$$

Die Abbildungsgesetze sind symmetrisch bezüglich den Bild- und Gegenstandskoordinaten. Die Vorzeichendiskussion unterschlage ich. Ein Kreis in der Gegenstandsebene der Abbildungen 3-4 erfüllen die Gleichung

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2 \qquad (4)$$

wobei (x_M, y_M) die Koordinaten des Mittelpunkts und r dessen Radius ist. Wollen wir die korrespondierenden Koordinaten in der Bildebene haben, müssen wir (3) in (4) einsetzen und die neue Gleichung untersuchen.

$$\left(\frac{f\xi}{\xi - f} - x_M \right)^2 + \left(\frac{\zeta f}{\xi - f} - y_M \right)^2 = r^2 \quad \| \cdot (\xi - f)^2 \qquad (5)$$

$$(f\xi - x_M\xi + x_Mf)^2 + (\zeta f - y_M\xi + y_Mf)^2 = r^2 \cdot (\xi - f)^2 \qquad (6)$$

Nun brauchen wir gar nicht weiter zu rechnen, denn wir erkennen sofort, dass Gleichung (6) eine quadratische Form ist, d.h. ein Polynom zweiten Grades in ξ und ζ . Die Graphen solcher Polynome sind Kegelschnitte (und ein paar Spezialfälle). Die Ovale in den Abbildungen 3-4 sehen nicht nur aus wie Ellipsen, es sind auch welche.

Wer es bis jetzt noch nicht glaubt, kann mit derselben Technik nachrechnen, dass beliebige Geraden auf Geraden abgebildet werden. Die Transformation ist geradentreu, aber weder flächen-, noch winkeltreu.

14. April 2017, Lie.

5 Tage und 4 Nächte Physik

Rafael Winkler, Schweizer Physik-Olympiade, rafael.winkler@swisspho.ch

Ein wenig aufgeregt war ich schon, an jenem Montag am 06. November 2017. Das allererste Physik-Lager unserer Olympiade stand bevor. Als Leiter war ich seit Wochen damit beschäftigt, den Anlass zu organisieren. Ein persönlicher Erlebnisbericht.

Montag, Vordemwald, 14:00 Uhr: Alles ist parat. Der Unterricht ist vorbereitet, der Kühlschrank voll. Die Skripte sind gedruckt, die Referenten frisch und motiviert. Endlich treffen auch die 35 Jugendlichen aus der ganzen Schweiz ein. Sie haben die erste Prüfung der Olympiade im September 2017 erfolgreich gemeistert.

Trainieren, trainieren – und spielen

Bereits eine Stunde nach der Ankunft beginnt die erste Unterrichtseinheit: Mathematik – das Werkzeug der Physik. Damit sind vor allem die Referenten und Schülerinnen und Schüler gefordert, ich habe das erste Mal eine Verschnaufpause. Der Start in die Woche ist geglückt!

In den nächsten drei Tagen lösen die Jugendlichen Aufgaben zu Mechanik und Thermodynamik. Und sie lernen Neues über Schwingungen, Wellen und Elektromagnetismus. Ausserdem erhalten sie einen kleinen Einblick in die Quantenmechanik. Der Unterricht wird meist parallel auf Französisch, Italienisch und Deutsch angeboten.



Physik ist ein Spiel: Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Physik-Olympiade erfinden und bauen ein "Physik-Leiterlenspiel". Sie spielen bis spät in die Nacht. Bauanleitung bei Rafael Winkler erhältlich. Bild: Rafael Winkler

Schokoladeneis zaubern, Physiker kennenlernen

Neben den intensiven Physiklektionen haben wir auch eine Exkursion und Abendprogramme organisiert. So wird das Lagerhaus am Donnerstag zur Gelateria, aus flüssigem Stickstoff machen wir leckeres Eis. Am Dienstag besuchen uns ehemalige Teilnehmer und Mitglieder der Physik-Olympiade. Sie arbeiten heute als Physiker und stellen uns ihre Berufe vor. Die Jugendlichen erhalten einen Einblick in die vielfältige Berufswelt des Physikers und der Physikerin.

Abends geniessen wir die Lagerstimmung. Die Schülerinnen und Schüler spielen Karten, basteln am Leiterlispiel weiter, spielen Ping-Pong. Einige lösen sogar Differentialgleichungen! Für jeden Geschmack findet sich eine passende Gruppe.



Physik ist Kochen: Aus flüssigem Stickstoff zaubern die Jugendlichen feines Schokoladen- und Vanilleeis. Bild: Sebastian Käser

Freitag, Vordemwald, 10:00: Nach einem feinen Frühstück mit Zopf heisst es: Aufräumen und Abschied nehmen. Für mich war das Lager super verlaufen, die Schülerinnen und Schüler waren sehr motiviert und wir erlebten viele schöne Momente. Auch unter den Helferinnen und Helfern war die Stimmung grossartig und wir sind alle motiviert, nächstes Jahr wieder ein tolles Lager zu organisieren.

Haben Sie Lust, mit Ihrer Klasse bei der Physik-Olympiade mitzumachen? Die nächste Olympiade beginnt im August 2018. Informieren Sie sich auf www.swisspho.ch oder www.olympiads.ch

Herausgeber — *Éditeur*
VSMP — SSPMP — SSIMF

Korrespondenz — *Correspondance*

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Layout — *Mise en page*

Samuel Byland samuel.byland@vsmp.ch
Weinbergstrasse 48b Tel. 079 728 63 97
5000 Aarau

Inserateverwaltung — *Publicité*

Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch
Weinbergstrasse 3 Tel. 032 512 0 128
8807 Freienbach

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

— *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:

ganzseitig Fr. 500.–
halbseitig Fr. 300.–

Beilagen:

bis 20 g Fr. 500.–
über 20 g nach Vereinbarung

Adressänderungen — *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder — Membres de la SSPMP:
VSG – SSPES – SSISS
Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)
3000 Bern
Tel. 056 443 14 54 / Fax. 056 443 06 04
information@vsg-sspes.ch

übrige Abonnenten — autres abonnés:

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Auflage — *Tirage*

900 Exemplare
erscheint dreimal jährlich

Präsident VSMP — SSPMP — SSIMF

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Domenico Galli 44
6600 Locarno-Solduno Tel. 091 751 14 47

Deutschscheizerische Mathematikkommission

Daniela Grawehr grawehr@kfanet.ch
Schützenstrasse 36 Tel. 041 810 49 88
6430 Schwyz

Deutschscheizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@gymburgdorf.ch
Strandweg 17 Tel. 034 423 46 43
3400 Burgdorf

Commission Romande de Mathématique

Tatiana Mantuano tatiana.mantuano@gfbienne.ch
rue Louis-de-Meuron 4 Tél. 032 544 47 53
2074 Marin-Epagnier

Commission Romande de Physique

Stéphane Davet davet.stephane@lyca.eduvs.ch
Av. Plantaud 28B Tél. 024 471 21 83
1870 Monthey

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Luca Rovelli lucarovelli@ticino.com
Via Pedmunt 10 Tel. 091 825 76 69
6513 Monte Carasso

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

— *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 137 31.03.2018 (Ende Mai)
Nr. 138 31.07.2018 (Ende September)
Nr. 139 30.11.2018 (Ende Januar)

Druck und Versand — *Imprimerie*

Niedermann Druck AG
Letzistrasse 37
9015 St. Gallen
www.niedermanndruck.ch