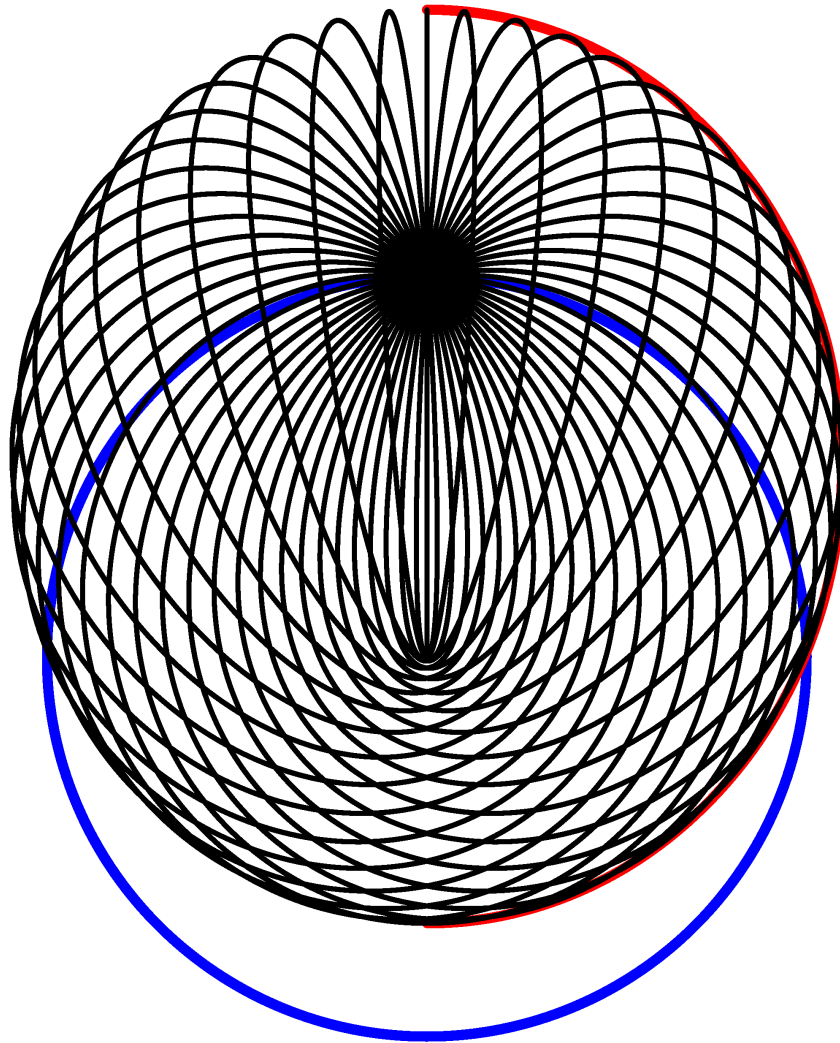


Bulletin

Mai 2015 — Mai 2015

N° 128

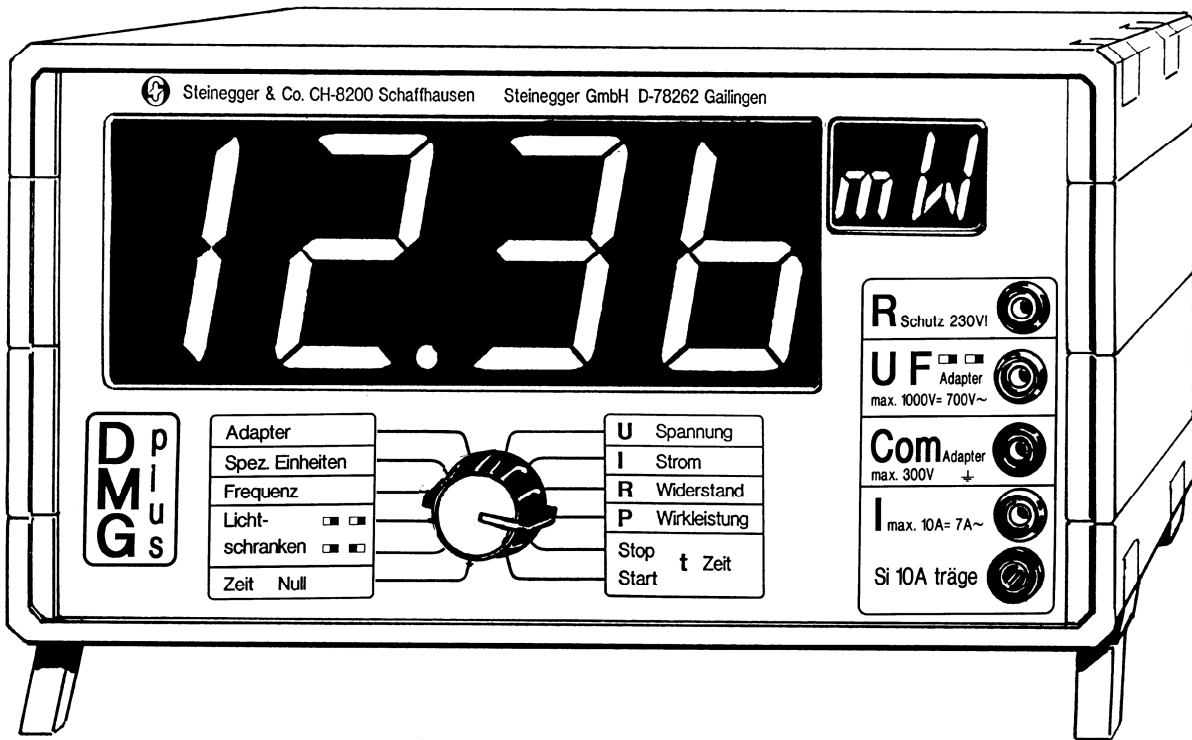


VSMP — SSPMP — SSIMF

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica

Demonstrations-Digitalmultimeter

DMG plus Art. Nr. 160



Das neue vollautomatische Digitalmessgerät für Schulen; kompromisslose Qualität zu erstaunlich günstigem Preis!

- | | |
|--|------------------------------|
| • Misst: Gleich- und Wechselspannung (echt eff.) | 0.1 mV - 1000 V \cong |
| Gleich- und Wechselströme (echt eff.) | 1 nA - 10 A \cong |
| Widerstände | 0.1 Ω - 20 M Ω |
| Wirkleistung (!) | 1 μ W - 10 kW |
| Zeit / Lichtschranken | 0.001 s - 2'000 s |
| Frequenz | 10 Hz- 20 kHz |
- 56 mm hohe Ziffernanzeige - bis auf 25m Distanz ablesbar
 - 2000 Messpunkte und vollautomatische Bereichswahl
 - Viele Zusatzgeräte direkt anschließbar

Preis nur: SFr 1'180.- (inkl. MWSt)

Die kostenlose „Kurzbedienungsanleitung zum DMG plus“ erhalten Sie direkt von Hersteller:

Steinegger & Co.
Rosenbergstrasse 23
8200 Schaffhausen



Internet: www.steinegger.de
Telefon: 052-625 58 90
Fax: 052-625 58 60

In dieser Ausgabe — *Dans ce numéro*



Commission Romande de Mathématique 2

- Yves Dubey*
Compte Rendu: Modélisations mathématiques en biologie
 (Cours CRM 2014) 2
- Cours: Introduction à la logique et théorèmes de Gödel* 4



Commissione di Matematica della Svizzera Italiana 6

- Maurice Froidcoeur et Andrea Pellegrinelli*
Tromba di Torricelli o dell'arcangelo Gabriele 6



Deutschschweizerische Mathematikkommission 10

- Peter Gallin*
 Lösungen zu: Zwei halbe Pizzas auf dem rechteckigen Backblech 10
- Herbert Bruderer*
 Berühmte mechanische Rechenggeräte an der ETH Zürich 14
- Meike Akveld*
 Das Projekt „Basale Kompetenzen“ 19
- Hans Peter Dreyer*
 25 Jahre Rahmenlehrpläne Mathematik und Physik– Wie weiter? 20
- Urs Kirchgraber*
 Schwingungen I oder Wenn der Vater mit dem Sohn ... 24
26. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht 32



Commission Romande de Physique 34

- Stéphane Davet*
Cours: La physique des phénomènes atmosphériques 34



Deutschschweizerische Physikkommission 36

- Samuel Byland, Fiona Streif*
Erfahrungsbericht: Swiss Young Physicists' Tournament 2015 36
- Martin Lieberherr*
 Wurfellipse 38

Internet-Adressen — *Adresses Internet*

www.vsmf.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch

Titelseite — *Page de Titre*

Hüllkurve von Wurfellipsen (Martin Lieberherr, Artikel S. 38 in dieser Ausgabe)

Cours CRM 2014 du 16 au 19 septembre 2014 Modélisations mathématiques en biologie



Le cours s'est déroulé dans de très bonnes conditions. Les participants l'ont grandement apprécié. En tant qu'organisateur, je tiens à les remercier pour leur présence active et positive, ainsi que pour leur souplesse face aux éventuelles petites imperfections.

Je tiens à remercier tous les conférenciers pour la qualité des exposés, et tout particulièrement Christian Mazza, professeur de mathématiques à l'Université de Fribourg, sans qui ce cours 2014 n'aurait pas pu avoir lieu. Le niveau de compétences mathématiques était parfaitement adapté au public cible.

Christian Mazza nous a présenté la phyllotaxie, l'ordre dans lequel sont positionnés les feuilles et les rameaux d'une plante, d'une manière très illustrative. Les documents exposés étaient de très grande qualité. Il nous a montré que l'observation de l'organisation des feuilles remonte à l'Antiquité, nous a exposé des résultats de Léonard de Vinci et de Johannes Kepler, est allé jusqu'à décrire des modèles mathématiques, certains très récents, illustrant parfaitement certaines situations concrètes qui fournissent des conclusions liées à la suite de Fibonacci et au nombre d'or.

Il a réussi, à l'aide de quelques explications claires et concises, à nous montrer les limites de certains modèles concernant la morphogenèse, plus spécialement l'étude des motifs du pelage ou de la peau des animaux (notamment chez les serpents et les zèbres). Les modèles, déterministe et stochastique, du processus linéaire de naissance et décès, ont été étendus au concept de l'élaboration de nouvelles protéines. L'interaction de gènes ainsi que l'effet des antibiotiques furent également abordés. Christian Mazza a terminé son exposé en soulignant que la recherche est encore active aujourd'hui dans ces domaines.

Hugo Parlier, également professeur de mathématiques à l'Université de Fribourg, et son assistant Camille Petit ont donné des exercices de combinatoire basés sur des grilles en forme de mosaïque de nid d'abeilles. Les participants ont activement essayé de les résoudre. Par groupes de deux, ils ont pu expérimenter et énoncer des conjectures en « manipulant » des applications soigneusement préinstallées sur des tablettes numériques mises à disposition pour le cours. Les démonstrations étaient relativement simples à comprendre, mais faisaient preuve d'idées ingénieuses.

Louis-Félix Bersier, professeur de biologie à l'Université de Fribourg, a détaillé quelques modèles mathématiques de réseaux trophiques sur la question « Qui mange qui ? ». Certains modèles stochastiques sont basés sur la structure de ces réseaux, d'autres sur la taille des organismes. Quelques sujets de recherche sur lesquels il a travaillé récemment ont été minutieusement décrits et documentés. Il a également présenté des simulations numériques de ces modèles. Le modèle Holling fut simulé par un jeu de rôle faisant intervenir les participants.

Michel Benaïm, professeur à l'Université de Neuchâtel, a développé une théorie très illustrative des systèmes dynamiques en écologie. Les modèles « historiques » de Malthus (1798), Verhulst (1840) et Lotka-Volterra (1925-1926) ont été illustrés. Il a exposé didactiquement des résultats importants de la théorie des équations différentielles, des flots, des portraits de phase, des ensembles alpha et oméga limites. Il a montré l'intérêt des fonctions Lyapounov appliquées aux équations de Lotka-Volterra.

Yvan Velenik, professeur de mathématiques à l'Université de Genève, nous a exposé des modèles décrivant les polymères. Les marches aléatoires simples symétriques et celles qui évitent de repasser en un même endroit ont été illustrées. Le modèle met en évidence l'influence du PH d'un solvant sur les polymères.

Dans son exposé sur la mécanique statistique, il a abordé le modèle de transition de phase sur un réseau en nid d'abeilles faisant appel à des notions d'un cours d'introduction universitaire de probabilités. Cette étude a été étendue à des variantes dynamiques de ce processus pour analyser, par exemple, la propagation d'un incendie, d'une rumeur ou d'un virus.

Il a terminé sa présentation en citant deux jolis problèmes de probabilités. L'énoncé de l'un d'eux nous a probablement tous fascinés durant sa présentation. Yvan Velenik l'a énoncé comme suit :

« Je vous propose le jeu suivant. Je vais écrire deux nombres entiers (positifs ou négatifs) distincts et placer ces deux nombres dans deux enveloppes que je fermerai ensuite. Je vous présenterai alors les deux enveloppes et vous laisserai en choisir une, que vous pourrez ouvrir, afin de prendre connaissance du nombre qu'elle contient. Vous gagnez le jeu si vous parvenez à déterminer si le nombre que vous avez tiré est le plus grand ou le plus petit des deux. Montrer qu'il existe un algorithme vous permettant de gagner strictement plus d'une fois sur deux. »

Yves Dubey
Membre de la CRM
Organisateur de ce cours

Cours de perfectionnement de la CRM



Introduction à la logique et théorèmes de Gödel
--

Dates	du 15 au 18 septembre 2015
Lieu	Hôtel Central Résidence, Leysin
Renseignements	http://www.vsmf.ch/crm/accueil/
Inscription	wbz - cps

Le cours annuel sera consacré cette année, à une introduction à la logique. Les intervenants seront MM. **Jacques Duparc** (Université de Lausanne et EPFL), **Jérémi Cabessa** (Université Paris 2) et **Amirouche Moktefi** (Tallinn University of Technology).

Les exposés de MM. Duparc et Cabessa s'articuleront autour de la logique du 1^{er} ordre, avec pour objectif la présentation des théorèmes d'incomplétude de Gödel. Pour ce faire, les thèmes abordés permettront en tout premier lieu de fixer les notions de théorie, de preuve et de satisfaction au moyen du théorème de complétude (également de Gödel) qui fait se rejoindre syntaxe et sémantique puisqu'il relie la notion de preuve mathématique à celle de satisfaction de formules dans des modèles donnés.

Prenant appui sur ces bases solides, on verra comment le théorème de compacité est utilisé pour prouver l'existence de modèles non-standard et le théorème de Löwenheim-Skolem pour obtenir, pour une même théorie, des modèles infinis et de cardinalités différentes la satisfaisant. On abordera alors le « paradis de Cantor » (selon le mot de Hilbert) peuplé de nombres ordinaux et cardinaux transfinis, ce qui permettra d'examiner les rôles de l'Axiome du Choix et de l'Hypothèse du Continu.

Toujours guidé par une appréhension correcte de la signification des théorèmes de limitation (1^{er} et 2^e théorèmes d'incomplétude de Gödel, indécidabilité de la logique du 1^{er} ordre, etc.) on présentera la notion de décidabilité qui est étroitement liée à celle de récursivité. On déclinera cette dernière sous trois formes équivalentes : (1) fonctionnelle : fonctions récursives ; (2) mécanique : machine de Turing ; (3) logique : classe (Σ_0^1) de formules de l'arithmétique. On effectuera également une incartade du côté de l'informatique pour interroger les liens entre preuves et programmes. Enfin, on mentionnera les faiblesses de la logique du 2^e ordre qui semblait a priori un meilleur choix que celle du 1^{er} ordre.

M. Moktefi, historien de la logique, traitera pour sa part de la mathématisation de la logique. Celle-ci devient une discipline mathématique au début du XX^e siècle. Si les prémices de cette mathématisation se retrouvent déjà chez Gottfried Leibniz (1646–1716), il reste que cette transformation se réalise essentiellement au cours du XIX^e siècle. D'abord, en s'appuyant sur certaines analogies entre les lois logiques et les opérations algébriques, George Boole (1815-1864) construit une algèbre nouvelle et particulière de la logique. Il mathématise ainsi la logique, ce qui lui permet de résoudre des problèmes bien plus complexes que ceux auxquels s'attaquait la syllogistique aristotélicienne. Plus tard, Gottlob Frege (1848-1925) s'intéresse à la logique afin de donner aux mathématiques les fondements qu'elle requiert. Si Boole construit une logique mathématique, Frege s'applique à fonder la logique des mathé-

matiques. Son projet de dérivation de l'arithmétique à partir de la logique échoue cependant lorsque Bertrand Russell (1872-1970) détecte une contradiction ensembliste, ce qui allait déboucher sur la fameuse crise des fondements au début du XXe siècle. Le cours a pour objectif d'expliquer l'évolution historique de la logique pour se constituer en discipline mathématique et d'analyser les conséquences de cette mathématisation quant à l'idée même de la logique et de son objet.

Plan de la semaine

Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
Logique du 1 ^{er} ordre : syntaxe, sémantique, preuves et théorème de complétude. Paradis de Cantor (ordinaux, cardinaux et récurrence transfinie)	La mathématisation de la logique	Récurtivité et décidabilité. Existence de modèles non-standards et de cardinalités différentes	Les théorèmes de limitation
J. Duparc	A. Moktefi	J. Cabessa et J. Duparc	J. Duparc

Programme (détails)	http://www.vsmp.ch/crm/cours/
Public cible	Professeur-e-s de mathématiques du secondaire II
Prix du cours	350.-
Inscription	sur www.wbz-cps.ch ou www.webpalette.ch
Délai d'inscription	30 juin 2015
Lieu du cours et logement	Hôtel Central-Résidence, Leysin, centralresidence@bonellihotels.ch

Chaque participant-e est responsable de sa réservation à l'hôtel.

Prix du logement

Forfait demi-pension	CHF : 100.- / personne / jour en chambre individuelle CHF : 80.- /personne /jour en chambre double
Forfait pension complète	CHF : 135.- / personne / jour en chambre individuelle CHF : 105.- /personne /jour en chambre double

Organisateurs :

Jean-Daniel Voelke et Patrick Turtschy

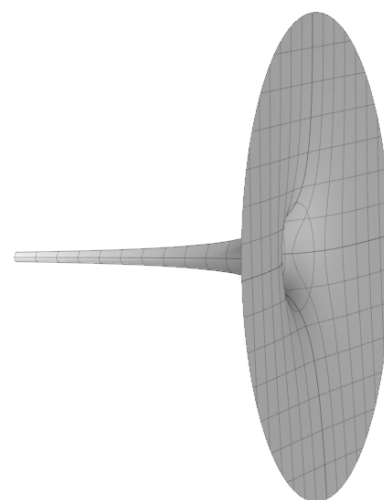


Tromba di Torricelli o dell'arcangelo Gabriele

Maurice Froidcoeur e Andrea Pellegrinelli

Consideriamo la superficie di rotazione ottenuta ruotando di un angolo giro il grafico della funzione $y = \frac{1}{x}$ sull'intervallo $[1; +\infty[$ attorno all'asse delle ascisse. Ruotiamo cioè la metà di un ramo dell'iperbole equilatera attorno ad un suo asintoto, ottenendo una sorta di tromba di lunghezza infinita.

Precisiamo già sin d'ora che, per non appesantire troppo la notazione nei calcoli, ometteremo dove non necessario di indicare esplicitamente $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ e $\lim_{x \rightarrow 0}$, operando nel contesto degli integrali impropri, rispettivamente di introdurre valori assoluti nelle primitive, dal momento che con la variabile x lavoriamo in \mathbb{R}_+ .



Calcoliamo dapprima il volume delimitato dalla tromba:

$$V = \pi \int_1^{+\infty} y^2 dx = \pi \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \pi \left[\frac{-1}{x} \right]_1^{+\infty} = \pi \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} - (-1) \right) = \pi .$$

Calcoliamone ora l'area laterale:

$$A = 2\pi \int_1^{+\infty} y \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} dx .$$

Poniamo la sostituzione $t = x^2$; abbiamo $dt = 2x dx$, e quindi $dx = \frac{dt}{2x}$. Otteniamo

$$A = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{2t^2} dt = \pi \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t^2} dt .$$

Occorre ora procedere integrando per parti, scegliendo $u = \sqrt{t^2 + 1}$ e $dv = \frac{1}{t^2} dt$, da cui $du = \frac{t dt}{\sqrt{t^2 + 1}}$ e $v = \frac{-1}{t}$. Quindi

$$\begin{aligned} A &= \pi \left\{ \left[\frac{-\sqrt{t^2 + 1}}{t} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{-1}{t} \frac{t dt}{\sqrt{t^2 + 1}} \right\} \\ &= \pi \left\{ \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} + \lim_{t \rightarrow +\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} + \sqrt{2} \right\} = \pi \left\{ \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} + \sqrt{2} - 1 \right\} . \end{aligned}$$

Per terminare il calcolo dobbiamo solo determinare una primitiva di $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$. La possiamo trovare consultando un qualsiasi formulario, oppure ricordarci la sostituzione classica $w = t + \sqrt{t^2 + 1}$ che dà $dw = \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} \right) dt = \left(\frac{t + \sqrt{t^2 + 1}}{\sqrt{t^2 + 1}} \right) dt = \frac{w}{w-t} dt$. In questo modo otteniamo facilmente le primitive:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \int \frac{(w-t)dw}{(w-t)w} = \int \frac{dw}{w} = \ln w + K = \ln(t + \sqrt{t^2+1}) + K.$$

Possiamo ora concludere facilmente il calcolo:

$$A = \pi \left\{ \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t + \sqrt{t^2+1}) - \ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 \right\} = +\infty.$$

Si evidenzia così un aspetto assolutamente paradossale: questo solido (a forma di tromba di lunghezza infinita) ha un volume finito, pari a π , delimitato però da una superficie infinita!

Alcune osservazioni supplementari.

Limitandoci all'intervallo $[1; 2]$ possiamo confrontare volume e area del pezzo di tromba di Torricelli con quella laterale del tronco di cono che la "ingloba".

Iniziamo dalla tromba.

Il volume è presto calcolato:
$$V = \pi \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \pi \left[\frac{-1}{x} \right]_1^2 = \pi \left(-\frac{1}{2} - (-1) \right) = \frac{1}{2}\pi.$$

Per l'area laterale, ricordando che $t = x^2$, abbiamo:

$$\begin{aligned} A &= \pi \left[\ln(t + \sqrt{t^2+1}) - \frac{\sqrt{t^2+1}}{t} \right]_1^4 = \pi \left[\ln(4 + \sqrt{17}) - \frac{\sqrt{17}}{4} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} \right] \\ &= \pi \left[\ln\left(\frac{4 + \sqrt{17}}{1 + \sqrt{2}}\right) + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{17}}{4} \right] \approx 5.01642 \approx 1.60\pi. \end{aligned}$$

Per il tronco di cono abbiamo:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{7}{12}\pi; \\ A_{lat} &= \pi \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}\pi\sqrt{5} \approx 5.26861 \approx 1.68\pi. \end{aligned}$$

Il risultato sul volume ci soddisfa appieno, mentre potrebbe esserci un attimo di smarrimento iniziale sul fatto che la superficie generata dal segmento sia superiore a quella generata un arco che è più lungo del segmento. Un piccolo momento di riflessione però ci rassicura subito. Infatti i dischetti infinitesimi generati dalla curva hanno tutti un'area laterale minore rispetto a quelli generati dal segmento.

È possibile dimostrare che l'area laterale della Tromba di Torricelli è infinita senza dover fare il calcolo esplicito effettuato nella pagina precedente. Basta ricorrere alla semplice minorazione seguente, suggerita ad esempio da wikipedia, del tutto evidente visto che $y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} \geq y$, dal momento che $y > 0$ e $\sqrt{1 + (y')^2} \geq 1$:

$$A \geq 2\pi \int_1^{+\infty} y dx = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = 2\pi \ln x \Big|_1^{+\infty} = 2\pi \cdot \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 0 \right) = +\infty.$$

Si può anche fare il calcolo ruotando la stessa curva, considerata sull'intervallo $]0; 1]$, attorno all'asse delle ordinate.

Calcoliamo dapprima il volume (attenzione: la funzione è decrescente, pertanto l'incremento verticale sarà negativo, quindi per "rimettere le cose a posto" abbiamo scambiato gli estremi di integrazione):

$$V = \pi \int_1^0 x^2 y' dx = \pi \int_1^0 x^2 \frac{-1}{x^2} dx = \pi \int_1^0 -dx = \pi \left[-x \right]_1^0 = \pi \left(\lim_{x \rightarrow 0} (-x) - (-1) \right) = \pi .$$

L'area laterale si ottiene calcolando $2\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + (y')^2} dx$. Osserviamo che qui il fatto che la funzione sia decrescente non ha conseguenze, dal momento che per calcolare l'apotema del tronco di cono infinitesimale si usa il teorema di Pitagora e quindi gli incrementi sulle ascisse e sulle ordinate sono considerati al quadrato.

Abbiamo così:

$$A = 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx ;$$

la consueta sostituzione $t = x^2$ (e quindi $dt = 2x dx$) ci porta a

$$A = \pi \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} dt .$$

Occupiamoci di trasformare convenientemente l'integranda:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} = \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t} = \frac{t^2 + 1}{t\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} + \frac{1}{t\sqrt{t^2 + 1}} .$$

Per trovare le primitive della prima frazione poniamo $u = t^2 + 1$, da cui $du = 2t dt$, e quindi:

$$\int \frac{t dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} + K = \sqrt{t^2 + 1} + K .$$

La seconda la sostituzione è di tipo trigonometrico. Poniamo $t = \tan u$, da cui $dt = (1 + \tan^2 u) du$, e quindi:

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2 + 1}} = \int \frac{1 + \tan^2 u}{\tan u \sqrt{1 + \tan^2 u}} du = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 u}}{\frac{\sin u}{\cos u} \cdot \frac{1}{\cos u}} du = \int \frac{du}{\sin u} = \ln \left(\tan \frac{u}{2} \right) + K .$$

Prima di completare il calcolo dell'area della tromba, ricordiamo che per giungere alla primitiva della funzione $\frac{1}{\sin u}$ si usa la formula trigonometrica $\sin u = \frac{2 \tan \frac{u}{2}}{1 + \tan^2 \frac{u}{2}}$.

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{1 + \tan^2 \frac{u}{2}}{2 \tan \frac{u}{2}} du = \int \frac{1 + \tan^2 \frac{u}{2}}{\tan \frac{u}{2}} d \left(\frac{u}{2} \right) = \ln \left(\tan \frac{u}{2} \right) + K .$$

Per ritornare alla variabile t , e dare così una primitiva della funzione $\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}$, necessitiamo ancora di un poco di calcolo, ricordando che $t = \tan u$

$$\begin{aligned} \tan \frac{u}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos u}{1 + \cos u}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos u)^2}{1 - \cos^2 u}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos u)^2}{\sin^2 u}} = \frac{1 - \cos u}{\sin u} \\ &= \frac{1}{\sin u} - \frac{1}{\tan u} = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 u}}{\tan u} - \frac{1}{\tan u} = \frac{\sqrt{t^2 + 1} - 1}{t} \end{aligned}$$

Possiamo ora assemblare i diversi pezzi:

$$A = \pi \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} dt = \pi \left[\sqrt{t^2 + 1} + \ln \left(\frac{\sqrt{t^2 + 1} - 1}{t} \right) \right]_0^1.$$

Grazie al teorema di de l'Hospital abbiamo $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2 + 1} - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{2\sqrt{t^2 + 1}} = 0$.

Conseguentemente

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln \left(\frac{\sqrt{t^2 + 1} - 1}{t} \right) = -\infty.$$

E infine

$$A = \pi \cdot [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} - 1) - 1 - (-\infty)] = +\infty.$$

Qualcuno potrebbe stupirsi di non aver letto in questo testo il vocabolo "iperboloide", visto che il solido esaminato è costruito ruotando un ramo di iperbole. Torricelli parlava di *solido iperbolico acuto* o *tromba di Gabriele* oppure anche di *anfora di Zeus* (si veda <http://www.imss.fi.it/multi/torricel/itorat31.html>). In realtà oggi chiamiamo iperboloide il solido ottenuto ruotando una iperbole attorno ad un suo asse di simmetria. La tromba di Gabriele invece è ottenuta ruotando la metà di un ramo d'iperbole attorno ad un suo asintoto. Così un iperboloide è una quadrica (oggetto di secondo grado), mentre il solido che stiamo esaminando è in realtà una quartica. Infatti l'equazione di questo solido è $x^2(y^2 + z^2) = 1$, $x \geq 1$, se lo costruiamo ruotando attorno all'asse delle ascisse, rispettivamente $y^2(x^2 + z^2) = 1$, $y \geq 1$, quando si ruota attorno all'asse delle ordinate. È quindi una superficie descritta da una equazione di quarto grado.

Per determinare volumi ed aree anche per oggetti che hanno qualche dimensione geometrica che fugge verso l'infinito ci serviamo di integrali impropri. Per sottolineare ulteriormente gli aspetti paradossali che si possono incontrare in queste occasioni segnaliamo anche l'esistenza del *vaso di de Sluse*. È il solido generato dalla rotazione dell'area tra un semiarco infinito di cissoide e il suo asintoto, attorno al suo asse di simmetria. In questo caso il volume è infinito mentre l'area laterale è finita. Si veda a proposito di questo matematico belga, di quattordici anni più giovane rispetto a Torricelli, <http://serge.mehl.free.fr/chrono/Sluse.html> e i vari siti correlati. Si consiglia anche di consultare quanto wikipedia scrive, nelle diverse lingue, a proposito della cissoide di Diocle. Di particolare interesse la versione francese che si trova all'indirizzo fr.wikipedia.org/wiki/Cissoïde_de_Dioclès.

Gli autori ringraziano Philip Hubert per il disegno e per la preziosa collaborazione.

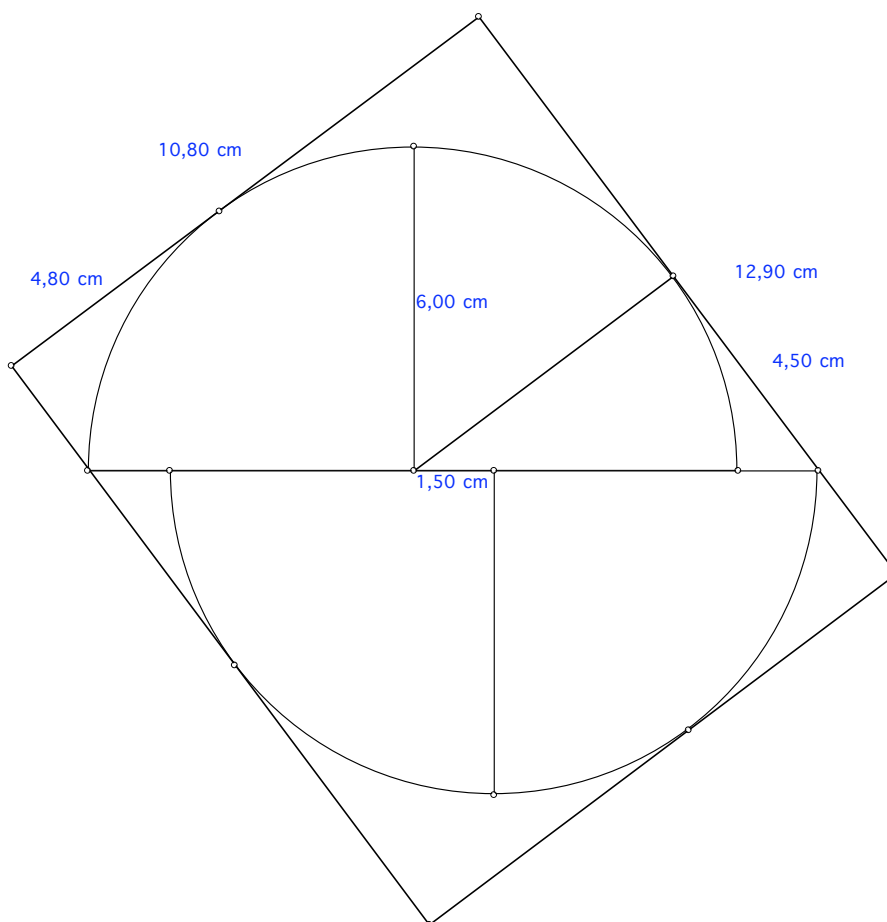
Lösungen zu: Zwei halbe Pizzas auf dem rechteckigen Backblech

Peter Gallin

Aufgabe von Winfried Müller aus dem vorangehenden Bulletin des VSMP: Peters Fertigpizza hat einen Durchmesser von 35 cm und passt daher nicht aufs Backblech von 31.5 cm auf 38 cm. „Kein Problem“, sagt Freundin Uta, „halbiere sie doch und ...“. Welchen Tipp Uta hatte, wissen wir nicht. Mit welchen Maßen eines Bleches kannst du zwei halbe Pizzas auf dem Blech unterbringen? Natürlich können die obigen realistischen Maße variiert oder sogar durch Variable ersetzt werden; gefragt ist bei einem Kreisradius r generell nach den möglichen Seitenlängen l und b des unbeschriebenen Rechtecks.

Lösungen

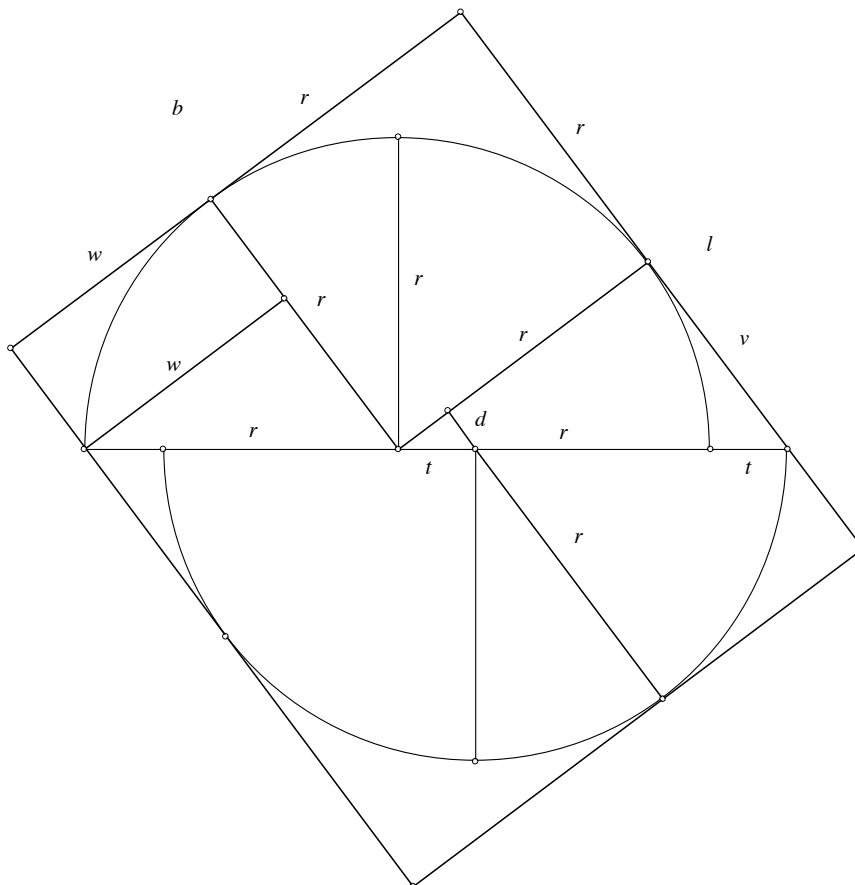
Nach einigem Probieren mit den konkret vorgegebenen Massen merkt man schnell, dass die beiden Halbkreise mit ihren Begrenzungsdurchmessern aneinander liegen sollten, allerdings leicht zueinander verschoben, so dass sie zusammen keinen Vollkreis mehr bilden.



Ich habe zunächst mit $r = 6$ cm gearbeitet. Daraus folgt dass alle Maße mit dem Faktor $12/35$ verkürzt werden. Das rechteckige Backblech hat also die Maße 10.8 cm auf etwa 13.02857 cm. Das erste mit Cabri gezeichnete Bild zeigt bereits, dass die beiden Halbkreise mit Radius 6 cm bei

einer Verschiebung von 1.5 cm auf einem Blech von 10.8 cm auf 12.90 cm Platz finden. Dazu habe ich von den beiden frei liegenden Ecken der Halbkreise je die Tangente an den anderen Halbkreis und anschliessend senkrecht dazu stehende Tangenten an die beiden Halbkreise gelegt, so dass das minimale umschreibende Rechteck entsteht. Man schöpft also bei einer Verschiebung von 1.5 cm die gegebene Länge des Backblechs nicht ganz aus.

Mit Hilfe der nächsten Abbildung wollen wir bei gegebenem Radius r und angenommenem Verschiebungsparameter t , mit dem die beiden Halbkreise gegeneinander versetzt sind, berechnen, welche Länge l und Breite b sich mit der beschriebenen Tangentenkonstruktion ergeben. Dabei verwenden wir die Hilfsgrössen v , d und w gemäss Eintrag in der Abbildung.



Mit Pythagoras berechnen wir zuerst

$$v = \sqrt{(r+t)^2 - r^2} = \sqrt{2rt + t^2} = \sqrt{t(2r+t)}.$$

Mit Ähnlichkeit folgt

$$d : t = v : (r+t)$$

und damit $d = \frac{t}{r+t} \sqrt{t(2r+t)}$. Die Länge l ergibt sich aus $l = 2r + d$ und damit

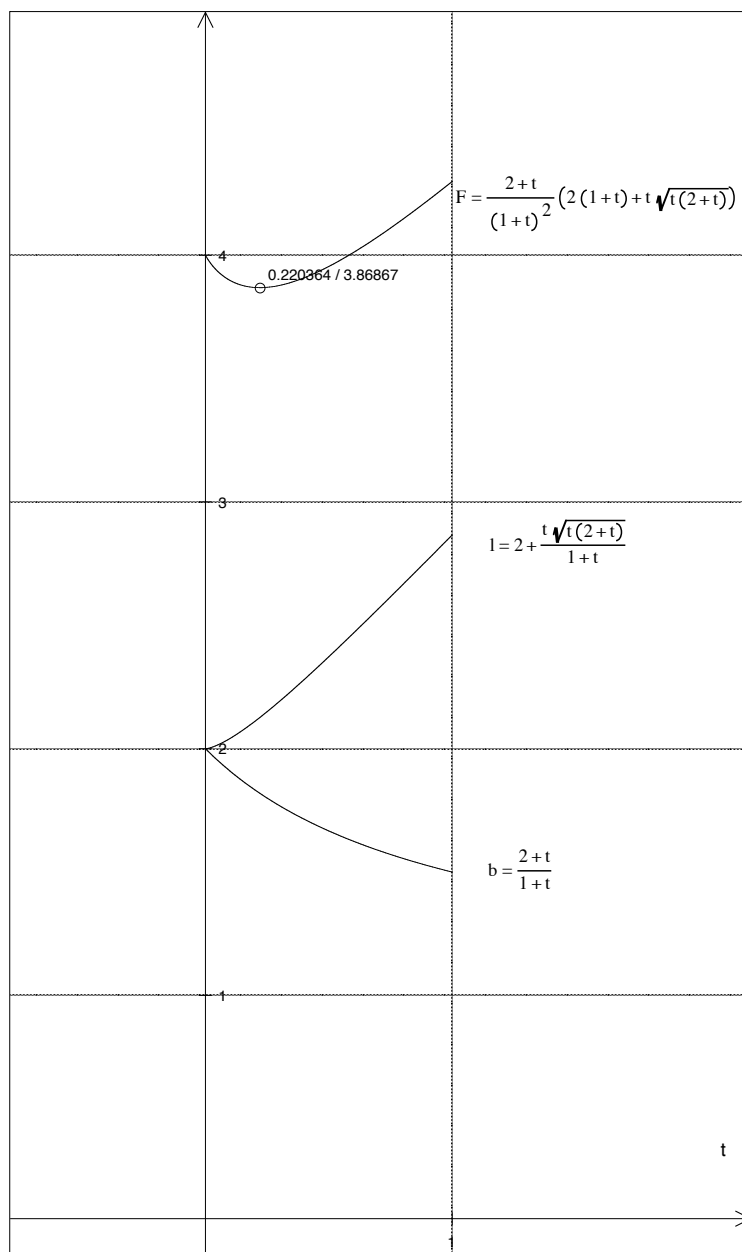
$$l(t) = 2r + \frac{t}{r+t} \sqrt{t(2r+t)}.$$

Für die Breite $b = r + w$ müssen wir noch die Hilfsgrösse w mittels Ähnlichkeit berechnen: $w : r = r : (r + t)$, womit sich $w = \frac{r^2}{r+t}$ ergibt. Insgesamt erhalten wir

$$b(t) = r + w = r + \frac{r^2}{r+t} = \frac{2r^2 + rt}{r+t} = \frac{r}{r+t}(2r+t) .$$

Die nebenstehende Abbildung zeigt für $r = 1$ die Funktionen $l(t)$ und $b(t)$ für den Bereich $0 < t < 1$. Ausserdem ist auch die Rechtecksfläche $F(t) = l(t) \cdot b(t)$ dargestellt. Die minimale Rechtecksfläche wird für $t \approx 0.220364$ erreicht, was einer Breite von $b \approx 1.8194$ bei $r = 1$ entspricht. Für $r = 17.5$ cm ergibt sich eine Breite von 31.8395 cm, was etwas mehr als die ursprünglich gegebene Breite von 31.5 cm ist. Wählen wir t etwas grösser, nämlich $t = 0.25$, erhalten wir $b = 1.8$, was auf eine Breite von genau 31.5 cm führt. Die Masse des ursprünglich gegebenen Backblechs liegen also nahe bei der für den Durchmesser von 35 cm minimalen Fläche.

Um die gestellte Aufgabe noch vollständiger zu bearbeiten, müsste man auch rechteckige Backbleche untersuchen mit genügend grosser Länge, aber einer Breite, die zwischen einem und zwei Radien der Pizza liegt. Dann können die beiden Pizzahälften auch so platziert werden, dass deren begrenzende Durchmesser punktsymmetrisch zur Mitte des Blechs auf den Längsseiten liegen und sich die beiden Kreisbogen im Zentrum des Blechs berühren. Berechnet man nun die notwendige minimale Länge des Blechs, erhält man $l = 2r + \sqrt{(2r)^2 - b^2}$. Für die gegebenen $r = 17.5$ cm und $b = 31.5$ cm ergibt sich in dieser Anordnung allerdings $l \approx 50.256$ cm, was viel mehr als die gegebene Länge ist.



Vom Kindergarten bis zur Hochschule – Mathematik im Unterricht heute

Zentrale Aspekte des Mathematiklernens gelten vom Kindergarten bis zur Hochschule. In dieser Vortragsreihe der Fachbereiche Mathematik der PH Zürich und der ETH Zürich soll vorgestellt werden, was für den Mathematikunterricht aller Stufen wesentlich ist – theoretisch fundiert und praktisch illustriert. Diese Veranstaltung richtet sich an Lehrpersonen aller Stufen sowie an Mathematikunterricht Interessierte.

Donnerstag, 27. August 2015 in Zürich

17:15 bis 18:45 Uhr Vortrag mit anschliessendem Apéro (Eintritt frei)

Reinhard Hölzl (PH Luzern)

***Musterschüler* - Proben mathematischen Denkens bei Kindern und Jugendlichen**

Mathematik als Wissenschaft deckt auf eine spezifische Weise Regelmässigkeiten und Muster auf und versucht deren inneren Zusammenhang zu beschreiben. Auch auf der Volksschule werden Muster und Gesetzmässigkeiten bei Zahlen und Zahloperationen, bei geometrischen Figuren und Abbildungen eingehender betrachtet.

Das dahinter stehende Ideal, im wortwörtlichen Sinne Musterschüler auszubilden, geht dem Mathematikunterricht im Alltagsgeschäft gelegentlich aber verloren, und dies obwohl Lernende durchaus Intuitionen für solche Regelmässigkeiten besitzen und einbringen könnten.

Im Vortrag berichte ich von einem eher untypischen Mathematikwettbewerb, den wir vor einigen Jahren im Rahmen eines Begabenseminars (WINGS) in der Zentralschweiz durchgeführt hatten und dessen Produkte wie Eisenspäne im Magnetfeld eine Ausrichtung auf den Universalauftrag der Mathematik nahelegen.

Und nicht nur für die Elite.



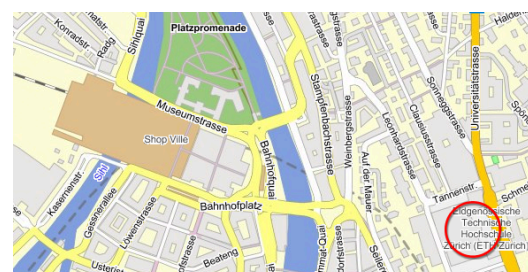
Prof. Dr. Reinhard Hölzl ist Dozent für Mathematik und ihre Didaktik an der PH Luzern. Nach dem Studium der Mathematik an den Universitäten Regensburg und München promovierte und habilitierte er am Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik der Universität Augsburg. Er unterrichtete mehrere Jahre an der Kantonsschule Seetal bevor er an die PH Luzern wechselte und mithalf diese aufzubauen.

Herzlich laden ein

Norbert Hungerbühler (ETH Zürich) und
René Schellendorfer (PH Zürich)

Veranstaltungsort

ETH Zürich, Hauptgebäude
Rämistr. 101, 8092 Zürich
Hörsaal: HG F 3



Tram Linie 6 oder 10 ab HB bis «ETH/Unispital»,
Linie 9 ab Bellevue bis «ETH/Unispital»,

Berühmte mechanische Rechengeräte an der ETH Zürich

Funde im Departement Informatik, der Sammlung Sternwarte und im Hochschularchiv der ETH-Bibliothek

Ablauf der 50-jährigen Sperrfrist: neue Erkenntnisse zur Vermarktung der Ermeth

Herbert Bruderer

Die Universität Cambridge hat in Bezug auf die Frühgeschichte der Rechentechnik weltweit wohl die glanzvollste Vergangenheit: Charles Babbage als Erfinder der analytischen Maschine (Vorläufer des heutigen Digitalrechners, 1834), Alain Turing mit der universellen Turingmaschine (mathematisches Modell einer Vielzweckmaschine, 1936) und Maurice Wilkes, der Schöpfer der ersten praktisch nutzbaren speicherprogrammierten Rechenmaschine (Edvac, 1949). Auf dem europäischen Festland ragt die ETH Zürich heraus mit dem 1950 gemieteten programmgesteuerten Relaisgerät Z4 von Konrad Zuse und der Miterfindung der „automatischen Programmierung“ durch Heinz Rutishauser (1952), einem der Väter der Programmiersprache Algol. An der ETH wurde der erste Schweizer Röhrenrechner, die Ermeth gebaut (Inbetriebnahme 1956). Wegweisend war später auch die Arbeitsstation Lilith von Niklaus Wirth, dessen Name mit Pascal verknüpft ist.

In Vergessenheit geraten

Völlig in Vergessenheit geraten sind die mechanischen Rechengeräte. Wer erinnert sich heute noch an einst weit verbreitete Werkzeuge wie Proportionalzirkel, Reduktionszirkel, Storchnabel (Pantografen), Planimeter, Integrieranlagen? Auch der Rechenstab ist ausgestorben. Der Reduktionszirkel wird mit dem genialen Erfinder Jost Bürgi in Verbindung gebracht. Das erfolgreiche Polarplanimeter (1854) stammt vom legendären Jakob Amsler, Schaffhausen. Damit lässt sich ein Flächeninhalt durch Umfahren bestimmen. Ein führender Hersteller mathematischer Werkzeuge war auch der Zürcher Coradi.

An der ETH wurden zahlreiche weltberühmte analoge und digitale Rechengeräte verwendet, die meisten wurden verschrottet. Mechanische Rechenmittel waren jahrhundertlang in Gebrauch. In den 1970er Jahren wurden sie fast schlagartig von den Elektronenrechnern abgelöst. Vorzügliche Maschinen fertigte etwa die Hans W. Egli AG, Zürich: Millionär (erste brauchbare Multiplikationsmaschine) und Madas, eine sehr leistungsfähige, vielseitige Rechenmaschine. Madas sind in manchen Sammlungen erhalten geblieben, der Direktmultiplizierer Millionär ist eher selten. Mehrere neue Funde lassen die Vergangenheit wieder aufleben

Weltweit grösste 24-Meter-Rechenwalze

Im November 2013 tauchte im Departement Informatik der ETH ein seltenes Exemplar einer 24-Meter-Loga-Rechenwalze auf. Das ist die grösste und genaueste Rechenwalze der Welt. Auf der Trommel gibt es 80 Skalenabschnitte zu 60 cm. Das entspricht einer Skalenlänge von 24 m. Damit man rechnen kann, sind die Skalenabschnitte nämlich doppelt (überlappend) aufgetragen. Bei solchen logarithmischen Rechenhilfsmitteln wird die Multiplikation auf eine Addition, die Division auf eine Subtraktion zurückgeführt, was Berechnungen stark vereinfacht. Die Walze wurde von Daemen Schmid vor 1912 in Zürich gebaut. Sie läuft nach wie vor. Würde man eine kreisrunde Rechenscheibe mit einer Skalenlänge von 24 m herstellen, hätte die Scheibe einen Durchmesser von 7,64 m! Zurzeit sind weltweit sechs Exemplare dieser Walzengrösse bekannt, die überlebt haben. Das Institut für angewandte Mathematik der ETH, Wiege der Schweizer Informatik, besass einem Dokument aus dem Hochschularchiv zufolge 1949 eine Rechenmaschine (Madas) und

eine Loga-Rechenwalze. Zu den Anhängern von Rechenscheiben gehörte der Gesteinskundler Conrad Burri, der sie 1943 und 1944 in je einem Aufsatz empfahl.

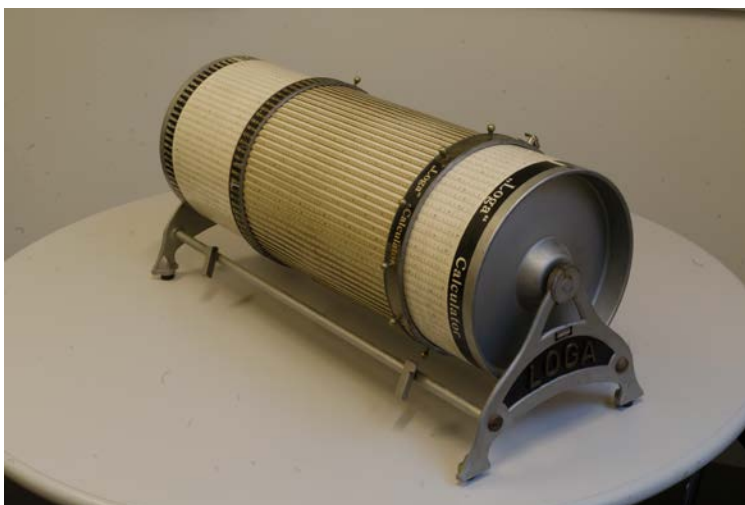


Bild 1: Die über 100-jährige 24-m-Loga-Rechenwalze aus der Sammlung des Departements Informatik der ETH: grösste und genaueste Rechenwalze, gebaut von Heinrich Daemen Schmid, Zürich. © Jan Lichtensteiger, Departement Informatik, ETH Zürich

Älteste, besterhaltene Tastenaddiermaschine der Welt

Im Januar 2014 kam bei der Suche nach alten Rechenstäben in der Sammlung Sternwarte der ETH-Bibliothek ein Tastenaddierer (1851) von Jean-Baptiste Schwilgué zum Vorschein. Der Uhrmacher hat u.a. die letzte astronomische Uhr des Strassburger Münsters mit dem berühmten Kirchenkomput gebaut (Kirchenkalender für die Berechnung der beweglichen Feiertage). Im Unterschied zu früheren mechanischen Rechenmaschinen werden die Zahlenwerte nicht über Schieber, sondern über Tasten eingegeben. Nach bisherigem Wissen sind zwei Geräte (und zwei Vorläufermodelle) erhalten. Das Strassburger Exemplar stammt aus dem Jahr 1846, es ist nicht mehr betriebsbereit. Ein Nachbau des Grenchener Uhrmachers Victor Schilt wurde 1851 auf der ersten Weltausstellung im Londoner Kristallpalast vorgeführt. Solche Geräte waren für das Zusammenrechnen von Zahlenkolonnen bestimmt. Bei weiteren Untersuchungen kam im Strassburger Historischen Museum im Dezember 2014 eine einzigartige mechanische Additionsmaschine des gleichen Erfinders ans Licht. Sie wurde für die Berechnung der hochpräzisen Zahnradgetriebe der astronomischen Uhr verwendet. Die Ergebnisse „steuerten“ eine ebenfalls von Schwilgué konstruierte Fräsmaschine.



Bild 2: Schwilgué-Tastenaddierer (1851) aus der Sammlung Sternwarte der ETH-Bibliothek: besterhaltene, älteste Tastenaddiermaschine der Welt, erfunden von Schwilgué, dem Schöpfer der derzeitigen astronomischen Uhr des Strassburger Münsters, © Herbert Spühler, Stallikon

Erste erfolgreiche mechanische Rechenmaschine der Welt

Bei den Nachforschungen in der Sammlung Sternwarte gab es neben Neperschen Rechenstäbchen und Proportionalzirkeln eine weitere Überraschung: ein frühes Exemplar eines Thomas-Arithmometers (1863).

Schon Schickard, Pascal und Leibniz hatten sich mit dem Bau mechanischer Rechenmaschinen abgemüht. Aber erst die Vierspeziesmaschine (Gerät mit vier Grundrechenarten) des Pariser Versicherungsunternehmers Thomas wurde serienmässig gefertigt. Die Zahlen werden mit Schiebern eingegeben. Das mit einer Handkurbel angetriebene Gerät beherrscht den automatischen Zehnerübertrag, für die Konstrukteure lange Zeit eine Knacknuss. Ein Kölner Auktionshaus versteigerte eine solche Maschine, die in einen reich verzierten, unpassenden (zu kleinen) Kasten eingepflanzt wurde, 2013 für über 230 000 Euro. Die Datierung war falsch.

Bild 3: Thomas-Arithmometer (1863) aus der Sammlung Sternwarte der ETH-Bibliothek: erste erfolgreiche, in Serie hergestellte Rechenmaschine der Welt, erfunden von Thomas aus Colmar, Versicherungsunternehmer in Paris. © Herbert Spühler, Stallikon



Kleinste mechanische Taschenrechenmaschine der Welt: Curta

Im Dezember 1957 fanden im Hauptgebäude der ETH Zürich dreitägige Kurse für die Mathematiklehrkräfte der schweizerischen Mittelschulen statt. Auf dem Programm standen neben Vorlesungen Übungen mit der Curta. Die vom österreichischen Ingenieur Curt Herzstark erfundene Taschenrechenmaschine wurde in Liechtenstein gefertigt. Die Konstruktionszeichnungen entstanden im Konzentrationslager Buchenwald. Die zierliche „Pfeffermühle“ gilt als technisches Wunderwerk. Sie beherrscht alle vier Grundrechenarten. Nutzer waren z.B. das Institut für angewandte Mathematik, das Institut für technische Physik, die Eidgenössische Anstalt für Wasserversorgung und die Eidgenössische Materialprüfungsanstalt Empa. Ein neuer technischer Zeitzeugenbericht aus der Feder des hoch betagten Entwicklungsingenieurs Elmar Maier ist auf dem Dokumentenserver (<http://e-collection.library.ethz.ch/>; e-Collection) der ETH-Bibliothek zu finden. Im Nachlass des von den Nazis verfolgten Curt Herzstark gibt es u.a. einen Briefwechsel mit den führenden Schweizer Herstellern mechanischer Rechenmaschinen (Hans W. Egli AG, Precisa AG). Die Curtas laufen selbst nach Jahrzehnten noch einwandfrei. An der ETH sind fast alle Curtas verschwunden.



Bild 4: Curta I und II, seinerzeit beliebte mathematische Rechenhilfsmittel an der ETH und heute begehrte Sammelobjekte, kleinste mechanische Vierspeziesrechenmaschine der Welt, gebaut in Liechtenstein von 1947 bis 1971 © Liechtensteinisches Landesmuseum, Vaduz (Bild: Sven Beham)

50-jährige Schutzfrist abgelaufen

Die (erste) Pionierzeit der Informatik an der ETH dauerte von 1948 (Gründung des Instituts für angewandte Mathematik) bis 1963 (Abbruch des Eigenbaus Ermeth). Z4 und Ermeth standen im Hauptgebäude der ETH, im ehemaligen Zeichensaal. Nachdem die 50-jährige Sperrfrist abgelaufen ist, sind nun alle Dokumente des Hochschularchivs für diese Zeit zugänglich. Ausgewertet wurden die Jahre 1947 bis 1964. Zum Vorschein kamen viele überraschende Schriftstücke, so dass man die Schweizer Frühgeschichte der Informatik in mancher Beziehung umschreiben muss. An der ETH Zürich wurden nicht nur weltbekannte Rechenmaschinen benutzt, es fanden auch mehrere Eigenentwicklungen statt.

Ein Beispiel für eine überfällige neue Deutung der Schweizer Informatikgeschichte: In vielen Ansprachen und NZZ-Aufsätzen wurde jahrzehntelang beklagt, dass die Vermarktung des ersten Schweizer Elektronenrechners, der Ermeth, misslang. Die Schuld wird dabei allgemein der untätigen Industrie zugeschoben. Die im Hochschularchiv, einer Fundgrube, aufgespürten Dokumente vermitteln ein anderes Bild.

Die Berner Hasler AG wollte die Ermeth weltweit vermarkten

Die Berner Hasler AG (heute Ascom), die massgeblich am Bau der Ermeth mitwirkte, hatte schon 1954 die Absicht, die millionenteure Maschine weltweit zu vermarkten. Sie schloss dazu 1955 mit dem Institut für angewandte Mathematik einen zehnjährigen Lizenzvertrag zum Nachbau des Magnettrommelspeichers ab. Ende 1955 wechselte jedoch Chefingenieur Ambros Speiser – vor Vollendung der Ermeth – kurzfristig zu IBM als Direktor des neuen Forschungslabors. Damit durchkreuzte er Haslers Pläne. Die Folge waren heftige Auseinandersetzungen mit dem Institutsvorsteher Eduard Stiefel und der Spitze der Hasler AG.

Schon im Juni 1955 hatte sich Stiefel in einem Schreiben beim Schulratspräsidenten Hans Pallmann beschwert: „Es scheint mir fast, dass Herr Direktor Herzog [IBM Schweiz] etwas die Absicht hatte, die Fertigstellung der ERMETH zu stören.“ Ein weiteres Beispiel für die Offenheit gewisser Industriebetriebe gegenüber der aufkommenden Elektronik ist die dreijährige Forschungsgemeinschaft zwischen der Paillard SA (Yverdon), der Hasler AG (Bern) und der ETH zur Entwicklung einer elektronischen Fakturiermaschine.

Hat der Chefingenieur die Vermarktung der Ermeth verhindert?

Mehrere amerikanische Unternehmen (IBM, Radio corporation of America, Battelle) gründeten in den 1950er Jahren Forschungsabteilungen in der Schweiz. Wegen der höheren Löhne befürchtete man an der ETH eine Abwerbung von Spitzenkräften. Für Speiser war der neue, verantwortungsvolle Posten bei IBM natürlich eine verlockende Herausforderung. Nach seinem Weggang zur Konkurrenz hatte Hasler jedoch die Lust auf die Vermarktung der Ermeth verloren. Dass Speiser mit seinem Stellenwechsel den Vertrieb der Ermeth verdarb, war gewiss nicht seine Absicht. Die Stimmung war sehr gereizt: Speiser sei „äusserst egozentrisch eingestellt und verfolge seine persönlichen Interessen rücksichtslos“. Das war die Einschätzung von Ernst Baumann, einem Kollegen Speisers. Der Physiker und Leiter der Abteilung für industrielle Forschung der ETH äusserte diese Vorbehalte im Juni 1955 gegenüber dem Schulratspräsidenten zum Fall IBM und Ermeth.

Stiefel schrieb Ende Januar 1956 in einen Brief an Pallmann: „Einer solchen Bewilligung steht somit nichts im Wege; im Gegenteil, es ist erwünscht, dass Herr Speiser wenig im Institut erscheint, da er als Exponent einer ausländischen Kampfgruppe auf schweizerischem Boden womöglich nichts erfahren sollte von den Verhandlungen, die gegenwärtig mit der Schweizer Industrie laufen.“ Mit der „Kampfgruppe“ war IBM gemeint. Der Institutsvorsteher genehmigte die vorzeitige überraschende Kündigung. Speiser war Anfang 1956 entgegen den Abmachungen nur noch selten im Institut erschienen. Bei den Verhandlungen ging es um Gespräche mit der Schweizer Industrie.

Das Berner Unternehmen hätte vermutlich gute Chancen gehabt. Denn selbst der finanzschwachen Zuse KG gelang es, einen ähnlichen Röhrenrechner über 50 mal zu verkaufen. Längerfristig hätte Hasler aber kaum mit der starken amerikanischen Konkurrenz (Univac, IBM) mithalten können. Das zeigt das Schicksal vieler europäischer IT-Unternehmen, die untergingen.

Vielfach verewigt

In den massgebenden deutsch-, englisch- und französischsprachigen Büchern zur Informatikgeschichte sind die mechanischen Rechengерäte Thomas-Arithmometer, Millionär, Madas und Curta sowie die mathematischen Instrumente von Amsler und Coradi vielfach verewigt. Der Schwilgué-Tastenaddierer fehlt überall. Die Loga-Rechenwalze fand Eingang in die Zeitschrift für Vermessungswesen. Über die Ermeth und die Lilith hingegen ist im Ausland vergleichsweise wenig zu lesen.

Eine beeindruckende Vergangenheit in der Frühgeschichte der Rechentechnik hatten auch die Universitäten Harvard (Howard Aiken, Schöpfer, gemeinsam mit IBM, des Relaisrechners Harvard Mark), Philadelphia (Presper Eckert und John Mauchly, beide mit Schweizer Vorfahren, Erbauer des riesigen Elektronenrechners Eniac) und das Institute for advanced study, Princeton (John von Neumann, der an der ETH Chemie studiert hatte, einer der Väter der modernen Rechnerarchitektur).

Buchhinweise

- Herbert Bruderer: Meilensteine der Rechentechnik. Zur Geschichte der Mathematik und der Informatik, de Gruyter Oldenbourg, Berlin/Boston 2015
- Herbert Bruderer: Konrad Zuse und die Schweiz. Wer hat den Computer erfunden? de Gruyter Oldenbourg, Berlin/München 2012, XXVI, 224 Seiten

Hinweise zu seltenen historischen Rechengерäten sind erbeten an: Herbert Bruderer, herbert.bruderer@bluewin.ch oder bruderer@retired.ethz.ch; Telefon +41 71 855 77 11.

4.3.2015

Das Projekt "Basale Kompetenzen"

Meike Akveld, Reto Schuppli
akveld@math.ethz.ch, schuppli@gmx.ch

Liebe Kollegen und Kolleginnen

Wie Sie wissen hat die EDK Prof. Franz Eberle den Auftrag erteilt, die sogenannten *Basalen Kompetenzen für die Erstsprache und die Mathematik* zu definieren und auszuarbeiten. Wir beide, als Hochschulvertreter (ETHZ und HSG) und Mitglieder der Kanongruppe (www.math.ch/kanon), wurden Ende 2013 angefragt, dieses Projekt als Fachexperten zu begleiten. Wie üblich bei EDK-Projekten ist alles geheim und streng vertraulich. Deshalb dürfen wir Ihnen über die Inhalte im Moment nichts sagen. Wir denken aber, dass es uns frei steht, etwas über den Prozess zu schreiben.

Nachdem die Daten erhoben waren, wurden wir (zwei Hochschulvertreter, ein Gymnasialrektor, ein Mathematiklehrer der gleichen Schule und ein Studienberater) zu vier Sitzungen eingeladen, um die von den Fachdidaktikern vorgeschlagenen *Basalen Kompetenzen in Mathematik* zu besprechen. An diesen Sitzungen wurde sehr kontrovers diskutiert und kein Konsens gefunden. Der Bericht spiegelt daher nicht die Meinung der Hochschulvertreter wider, sondern er ist ausschliesslich ein Produkt der Autoren.

Der Bericht soll nun im Mai der EDK vorgelegt werden und geht dann in die Vernehmlassung. Bitte bedenken Sie bei der Lektüre, dass es sich beim Bericht nur um die Sicht der Autoren handelt.

25 Jahre Rahmenlehrpläne für Mathematik und Physik - Wie weiter?

Hans Peter Dreyer*, Departement Mathematik, ETH Zürich und Kantonsschule Wattwil

Die EDK will 2015 die Studierfähigkeit genauer umreissen. Wenn die Lehrkräfte und ihre Verbände im Hinblick auf sich abzeichnende Veränderungen eigene Perspektiven entwickeln wollen, lohnt es sich zurückzublicken. Hilfreich ist auch, das aktuelle Stimmungsbild der Gymnasiastinnen und Gymnasiasten, wie es etwa in MUPET¹ zum Ausdruck kommt, ernst zu nehmen.

Rückblick auf die Rahmenlehrpläne²

Vor 25 Jahren erschien das VSMP-Bulletin zum ersten Mal im A4-Format. Wir brauchten Platz für gewichtige Vorhaben: Die Gymnasiallehrer kritisierten zusammen mit den Hochschulmathematikern und -physikern den von der EDK geplanten Abbau bei der Fachausbildung zukünftiger Lehrkräfte. Anschliessend wurden die Rahmenlehrpläne für Mathematik, Physik und Angewandte Mathematik breit auf Deutsch und Französisch zur Diskussion gestellt.

1985 hatte die Kommission Gymnasium-Universität ihre „10 Thesen“ veröffentlicht, welche die EDK veranlasste „Rahmenlehrpläne für die Maturitätsschulen“ - das waren damals ausschliesslich die Gymnasien - in Auftrag zu geben. Die EDK stützte sich auf das Schulkonkordat von 1970, so dass die Rahmenlehrpläne (RLP) Vorläufer des Lehrplans 21 sind... Die Freizeitarbeit vieler Kolleginnen und Kollegen wurde überarbeitet, mit Listen von Kompetenzen ergänzt, 1994 zum offiziellen Dokument der EDK und durch den Artikel 8 des MAR 1995 gar zur Basis aller kantonalen Lehrpläne erhoben.

Im Lernbereich „Mathematik und Naturwissenschaften“, zu dem interessanterweise auch die Geografie zählt, gibt es für jedes Fach „Allgemeine Bildungsziele“, „Begründungen und Erläuterungen“. Das Formulierungsniveau ist abstrakt, die Inhalte idealistisch, die Ziele hoch. Hier ein Beispiel aus den Allgemeinen Bildungszielen der Physik:

Die Schülerinnen und Schüler lernen grundlegende physikalische Gebiete und Phänomene in angemessener Breite kennen und werden befähigt, Zustände und Prozesse in Natur und Technik zu erfassen und sprachlich klar und folgerichtig in eigenen Worten zu beschreiben. Sie erkennen physikalische Zusammenhänge auch im Alltag und sind sich der wechselseitigen Beziehungen von naturwissenschaftlich-technischer Entwicklung, Gesellschaft und Umwelt bewusst.

Auch die „Grundfertigkeiten“ in den „Richtzielen“ blieben allgemein, um nicht zu sagen vage:

- Einen Sachverhalt auf die wesentlichen Grössen reduzieren
- Modelle gewinnen und auf konkrete Situationen anwenden
- Probleme erfassen, formulieren, analysieren und lösen

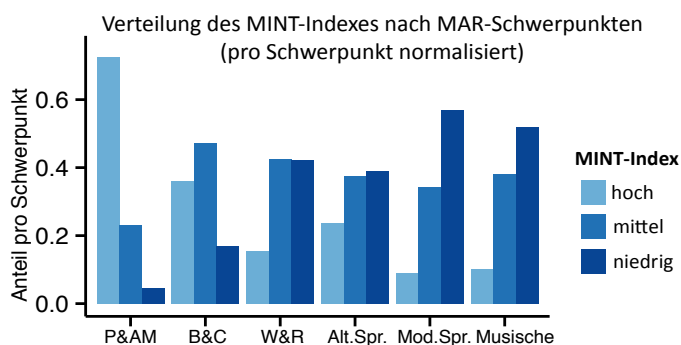
Als Präsident des VSMP habe ich damals, wie wohl viele andere gehofft, die RLP würden zu einer „inneren Reform“ des Gymnasiums beitragen, denn es war klar, dass die politisch heiss umstrittenen Strukturänderungen des MAR 95 den Schulalltag nicht verbessern würden. (Dass das MAR auch als Anlass für Kürzungen und andere massive Sparmassnahmen im Gymnasium diente, zeichnete sich erst später ab.) Doch die RLP blieben Papier, wenn auch einzelne Formulierungen in die nächste Stufe, die Kantonalen Lehrpläne, übernommen worden sind. Hand aufs Herz, wann haben Sie, liebe Kollegin, lieber Kollege, die 25 Jahre alten Texte² das letzte Mal für Ihre Unterrichtsplanung konsultiert?

Ein Stimmungsbild aus der Physik

Die MUPET-Studie, über die ich im BULLETIN 119 kurz und im GYMNASIUM HELVETICUM³ ausführlich berichtet habe, erlaubt einen Einblick in die Stimmungslage der Lernenden. Diese ist in unserem individualistischen Zeitalter sehr divers. Für die Belange von Physik und Mathematik lässt sich eine einfache Charakterisierung

geben. Ich definiere den MINT⁴-Index als Mittelwert der Interessen für Chemie, Physik und Mathematik (doppelt gewichtet) und teile die Gesamtpopulation in drei etwa gleich grosse Gruppen von Hoch-, Mittel- und Niedrig-Interessierten auf. Es gibt grosse Unterschiede zwischen den (teilweise noch zu wählenden) Schwerpunkten schon im 9. Schuljahr. Erfreulicherweise und wie erwartet hat es in P&AM fast nur MINT-Hoch-Interessierte. Es müsste bloss gelingen, mehr als die jetzigen 10% der Maturandinnen und

Maturanden für eine modernisierte und um Informatik ergänzte Variante dieses Schwerpunkts zu gewinnen. In



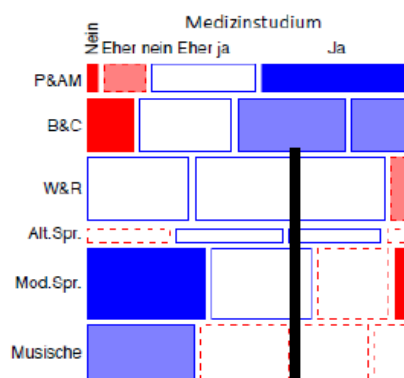
Biologie&Chemie hingegen stösst man auf eine deutlich weniger MINT-begeisterte Population, was zu den in EVAMAR II festgestellten Schwächen passt. Insgesamt ist in diesen beiden Schwerpunkten die Situation für Mathematik und Physik sowohl hinsichtlich Leistung als auch punkto Stimmung überwiegend gut.

Ich möchte aber die Aufmerksamkeit auf die 70% aller Gymnasiastinnen und Gymnasiasten in den nicht-naturwissenschaftlichen Schwerpunkten lenken. Die Modernen Sprachen sind das Musterbeispiel. Schon zu Beginn des Gymnasiums haben wir eine kleine Gruppe von Hochinteressierten (10%) und eine erschreckend **grosse Gruppe von Niedriginteressierten** (50%). Wenn es der Lehrkraft im konkreten Fall gelingt, die Mittleren zu interessieren und den Klassengeist auf „konstruktives Lernklima“ zu trimmen, dann hat sie gewonnen. Leider ist das selten der Fall, denn MUPET zeigt, dass das Interesse an Physik im Gymnasium von 2.9 auf 2.7 sinkt (im Durchschnitt aller Schwerpunkte). Gleichzeitig wächst es in Geschichte, und in Mathematik bleibt es zumindest konstant. Unter den jetzigen Rahmenbedingungen gelingt es nicht (Ausnahmen bestätigen die Regel), die vielen „physikalischen Zusammenhänge auch im Alltag“ sichtbar zu machen, das Interesse zu fördern und damit den Allgemeinbildungsauftrag zu erfüllen.

Leider gelingt es aber häufig auch nicht, die Studierfähigkeit zu erreichen, wie der Mosaicplot dokumentiert: Mehr als zwei Drittel der Maturandinnen und Maturanden in den nicht-naturwissenschaftlichen Schwerpunkten halten sich in Physik für nicht ausreichend auf ein Medizinstudium vorbereitet. Ausgerechnet Medizin liefert den juristischen Anlass für die gesamtschweizerische Regelung der Maturität, aber Links von der Trennlinie liegt rund die Hälfte der Gymnasialpopulation!

Gibt es eine Lösung für dieses doppelte Problem innerhalb unseres Systems? - Mir schwebt **ein MINT-Kurs**, ein „kleines Physikum“ nach dem Modell des „kleinen Latinums“ vor: Die Gruppe, die bessere Startbedingungen für die Uni braucht, arbeitet in Physik und Chemie freiwillig mehr. Sie erreicht dementsprechend auch mehr als im Grundlagenfach in den wenigen Lektionen auf der unsicheren Basis der Sekundarstufe I möglich ist. Studierfähigkeit erfordert Systematik im Stil des Buchs von Hans Kammer und Mathematisierung, so dass die erste Differentialgleichung in der Uni keinen Schock mehr auslöst.

Dieses - im Vergleich zum Aufwand für die zweisprachige Maturität - erschwingliche Angebot hat den Vorteil, dass sich nun der Physikunterricht auf die Mehrheit ausrichten und **mehr „science literacy“**, d. h. naturwissenschaftliche Allgemeinbildung im Sinn des RLP bieten kann. Dazu gehört unbedingt eine minimal-mathematische Einsicht in die Grundkonzepte der Physik nach 1850: Entropie nicht bloss in der Biologie; Schrödingers Katze nicht nur im Religionsunterricht; Relativitätstheorie nicht bloss als Software im GPS-App des Smartphones; Antimaterie nicht nur als Science Fiction.



Ein Stimmungsbild aus der Mathematik

Die Situation in der Mathematik ist im Vergleich zur Physik günstiger und dramatischer zugleich. Günstiger ist die Interessenslage und besser sind die Vorkenntnisse. Eine Maturandin aus den alten Sprachen, die Phil. I studieren will und in der Sek I nicht gern Mathematik hatte, schreibt in MUPET:

Ich finde, wir haben einen guten, humorvollen Lehrer. Er ist menschlich und schikaniert die Schüler nicht (im Gegensatz zu unserem früheren Mathe Lehrer). Er ist hilfsbereit und erklärt gewisse Dinge gerne zweimal. Mir gefällt, dass wir fertige Dossiers mit Lücken zum selbst Dinge einfüllen bekommen, anstatt ganze Tafeln abzuschreiben; so bleibt auch Zeit, zuzuhören. Mein Interesse an Mathematik variiert je nach Thema. Mit der ganzen Analysis konnte ich nicht viel anfangen, hingegen finde ich Stochastik sehr spannend.

Sie repräsentiert die beachtliche Gruppe, die mit der Situation zufrieden ist und gute Leistungen erbringt. Aber im Ganzen ist die Leistungssituation betrüblich, wie EVAMAR II⁵ gezeigt hat: Mehr als **40% der schriftlichen Maturitätsprüfungen sind ungenügend!** Dieses Alarmsignal müsste nicht bloss zu Artikeln in der Sonntagspresse⁶ sondern zu heftigen Reaktionen im Gymnasialsystem führen. Denn im Unterschied zur Physik braucht die Mehrheit der Lernenden noch Mathematik im Tertiärbereich. Drei Viertel werden für Studien auch in Wirtschaftswissenschaften, Psychologie, Linguistik usw., Prüfungen bestehen müssen, am häufigsten zur Statistik.

Mich überrascht, dass viele Kolleginnen und Kollegen den Fehler bloss bei schlecht vorbereiteten und/oder faulen Schülern und bei der reduzierten Unterrichtszeit suchen. - Ja, es kommen nicht bloss die 21% PISA-Besten; ja, die Unterrichtszeiten wurden gekürzt, und ja, das aktuelle Kompensationssystem erlaubt das Abhängen eines ungeliebten Fachs. Doch eine nüchterne Analyse fügt diesen Faktoren auch die Lerninhalte, die Lernziele und die Qualitäten von Lehrpersonen und Lehrmitteln hinzu.

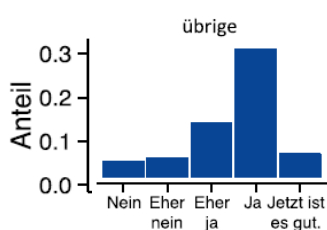
Ein Maturand aus den alten Sprachen, der auch Phil. I studieren will, aber in der Sek I gern Mathematik hatte, schreibt zur Frage, was er am Mathematikunterricht gut finde:

Schlafen. Nein im Ernst, der Mathematikunterricht im Gymnasium ist katastrophal. 2-3 Leute interessieren sich für das Fach an sich und wollen aufpassen. Den Rest der Klasse interessiert es kaum und somit beginnen immer einige den Unterricht zu stören. KEIN(!) Mathematiklehrer im Gymnasium ist fähig spannenden Unterricht zu gestalten, es herrscht reiner, uninteressanter Frontalunterricht. Alle in der Klasse wären froh, wenn die Interessierten sich in einem Zusatzkurs ungestört mit dieser Materie auseinandersetzen könnten.

Dass er leider keinen Einzelfall schildert, zeigen die folgenden Zahlen zu Unterrichtsmethoden und Lehrmitteln in Mathematik (Durchschnitt aller Schwerpunkte):

Methoden und Lehrmittel	prakt. nie	selten	häufig	fast immer
Lehrperson entwickelt Theorie	3%	9%	32%	55%
Benutzung Theoriebuch	45%	23%	18%	14%
Skript der Lehrperson	20%	20%	26%	34%

Bei solchen Rahmenbedingungen erstaunt es nicht, dass die Schülerinteressen oft zu kurz kommen. Aufschlussreich, ist die hohe Zustimmung der „übrigen“ Maturandinnen und Maturanden (nicht aus einem naturwissenschaftlichen Schwerpunkt und nicht mit MINT-Studienplänen) zur Aussage: *In Mathematik wäre mein Interesse (noch) grösser, wenn der Nutzen des Stoffs für mich klarer ersichtlich wäre.* Ich zweifle nicht daran, dass die meisten Lernenden „Nutzen“ als „**sinnstiftenden Zusammenhang**“ verstehen. Hier ist wohl der grösste Handlungsbedarf, wenn mehr Interesse und damit eine höhere Leistungsbereitschaft erreicht werden soll.



Eigentlich steht schon im Mathematik-Rahmenlehrplan von 1994, was auch im Grundlagenfach angestrebt werden soll - die Schwerpunkte waren damals noch nicht geboren.

Bei den Lernenden stehen folgende drei Blickrichtungen im Vordergrund:

- der Blick in die Welt der Mathematik hinein als einer eigenständigen Disziplin;
- der Blick aus der Mathematik hinaus in ihre Anwendungen, die Modellbildungen und deren Bezüge auf die uns umgebende Wirklichkeit;
- der Blick in die Ideengeschichte der Mathematik und deren Einbettung in die Kulturgeschichte und die Entwicklung von Wissenschaft und Technik.

Wenn es nicht gelingt, die Mathematik auch für diese „Übrigen“ sinnstiftend zu gestalten, wird die Situation im Maturjahr noch dramatischer als folgenden Zahlen signalisieren. Es sind Antworten aus den nicht-naturwissenschaftlichen Schwerpunkten zur Sondierung nach dem effektiven persönlichen Einsatz für Mathematik im Vergleich zum maximal möglichen:

Bruchteil der Maximalleistung	100-95%	94-80%	79-50%	49-0%
Anteile aller in nicht naturwiss. SP	16%	37%	33%	14%
Anteile bei den Ungenügenden	5%	20%	40%	35%

Ein Drittel aller arbeitet offensichtlich „mit angezogener Handbremse“ und jede(r) Siebte hat sich ausgeklinkt oder verweigert prinzipiell die Mitarbeit. Bei denjenigen mit ungenügenden Leistungen wird Hoffnungslosigkeit sichtbar.

Lehrmittel im Fokus

Zweifellos gibt es weder für die Physik noch die Mathematik ein simples und kostenneutrales (!) Patentrezept. Ein zentrales Element sind aber die Mathematiklehrmittel. Ich schliesse mich der Meinung des Verantwortlichen in Bayern an⁷: „Für die **Umsetzung von Innovationsprozessen** haben Schulbücher einen entscheidenden Stellenwert.“ Der Wunsch nach besseren Lehrmitteln kommt auch in den subjektiven MUPET-Urteilen von Maturandinnen und Maturanden aus allen drei Landesteilen zum Ausdruck:

„Die Theorie ist eine Katastrophe und ich habe auch noch keine klar strukturierte und simple Lehrmittel gefunden, die das bieten können (z.B. Analysis).“ (Maturand, W&R)

„Pour améliorer l'enseignement des mathématiques, je propose un livre de théorie en complément avec des exercices supplémentaires (...) Un site internet au niveau fédéral ou cantonal (...) est aussi une bonne chose à mettre en place.“ (Gymnasiastin, W&R)

„Un libro di testo con esercizi integrati così da avere il materiale in modo ordinato e facile da ripassare.“ (Maturandin, B&C)

Objektive Studien zeigen, dass abgesehen vom Werdegang der Lehrperson nichts den Unterrichtsalltag so prägt wie die Lehrmittel. Bei der Einführung der Rahmenlehrpläne und des MAR 95 hat man die Lehrmittel „vergessen“. Dementsprechend benützt man in vielen Fächern Produkte, die auf ausländische Verhältnisse zugeschnitten sind, oder man hat die desolote Situation der Mathematik.

Auf Universitätsstufe verbreiten sich MOOCs, massive open online courses, aus Kostengründen rasch. Für die Gymnasien braucht es etwas anderes, vielleicht den **MMMOOC**, einen modellhaften, modularen Mathematik-Course, mit „offline“ Heften für die Schülerhand, und online Ergänzungen (einfache und anspruchsvolle Aufgaben mit und ohne Lösungen, Testserien, Anregungen für Aktivitäten, Alltagsbezüge usw.) und offen für best-practice Schätze, die jetzt in Schubladen schlummern. Die Betonung liegt auf „Kurs“, also einer ansprechenden und kohärenten Darlegung der ganzen Gymnasialmathematik für das Grundlagenfach im Niveau I, so dass sie Lernende auch zum Nacharbeiten, Üben usw. nutzen können.

Wenn auch erfahrene Lehrkräften diesen Kurs wohl nur auszugsweise einsetzen würden, wäre er eine Systemstütze: Kein noch so guter Individualist kann in seinem Skript leisten, was ein Redaktionsteam samt Lektor und Grafikerin zustande bringt. Damit ein MMMOOC zustande kommt, braucht es einen Kristallisationskern und **das schweizerische Pendant zur Deutschen Telekomstiftung**⁸ für die Finanzierung. Ein derartiges Projekt kostet mehrere Millionen Franken. Im Vergleich zu den rund zwei Milliarden, die jährlich fürs Gymnasium ausgegeben werden, ist das wenig und der Nutzen für gute ebenso wie für „abgelöschte“ Mathematikschüler wäre immens.

Das MAR 95, die EDK und der VSMP

Vor 20 Jahren wurde das MAR 95 in Kraft gesetzt - gegen den Willen des VSMP, der den Typus C erhalten wollte. Nach der Teilrevision, die 2007 zum Ergänzungsfach Informatik geführt hat, ist die EDK am Überlegen, ob zur „langfristigen Sicherung des prüfungsfreien Hochschulzugangs“ Ergänzungen im RLP eingebaut werden sollen. Vermutlich werden im Mai 2015 die „basalen Studierkompetenzen für Erstsprache und Mathematik“ vorgestellt. Die oben skizzierte Analyse zeigt, dass Einzelmassnahmen wie ein höheres Notengewicht, ein Minimum von 16 Jahreswochenstunden oder Präzisierungen im RLP nicht genügen. In MUPET habe ich eine Liste mit möglichen Massnahmen auf Strukturebene⁹ und im Inhaltsbereich¹⁰ zusammengestellt und begründet.

Mir scheint, der VSMP und seine Kommissionen seien dringend gefordert. Besser als bloss **Reaktionen** in Vernehmlassungen sind ausformulierte Vorschläge. Mir scheint, die Fachkommissionen müssten bald **ein Massnahmenbündel zugunsten der Studierfähigkeit** zusammenstellen und, damit es mehr Gewicht bekommt, über „den Dienstweg“ an die Verantwortlichen in EDK und Bund leiten.

Darüber hinaus geht es um unseren Berufsstand: Eine Gymnasiallehrerin, ein Gymnasiallehrer, das ist eine Fachlehrperson, die eine Maturarbeit fachgerecht zu betreuen vermag; aber auch willens und fähig ist, ihr Fach allgemeinbildend zu unterrichten, und dadurch unterscheidet sie sich vom Hochschuldozenten. Der VSMP und die anderen im VSG zusammengeschlossenen Verbände müssen das Gymnasiallehrer-Berufsbild einerseits mit der nötigen Selbstkritik, aber andererseits mit grösserem Selbstbewusstsein gegen aussen tragen. Zu diesen anspruchsvollen Arbeiten wünsche ich viel Erfolg!

*) Hans Peter Dreyer arbeitete von 1972 bis 2010 Physik- und Mathematiklehrer an der KS Wattwil und wirkte zeitweise als Physikdidaktiker an der ETH und der UNI Zürich, als VSG-Präsident und als Mitglied der Schweizerischen Maturitätskommission.

Quellen:

¹ www.math.ch/mupet

² www.edudoc.ch/record/17476/files/D30a.pdf - Bemerkenswert sind die teilweise beachtlichen Unterschiede zwischen den RLP-Versionen in den verschiedenen Landessprachen

³ www.vsg-sspes.ch/index.php?id=59 Nummern 14-05, 15-01 und 15-02

⁴ MINT = Mathematik, Informatik, Naturwissenschaft, Technik

⁵ www.edk.ch/dyn/22481.php

⁶ Das kann doch nicht so schwer sein, NZZaS, 15. 02. 2015, pp 22-23

⁷ Josef Erhard, Erwartungen an Schulbücher im Kontext von Bildungsreformen, München 2010

⁸ www.telekom-stiftung.de

⁹ Z. B. Mathematikdiagnose im 9. Schuljahr, Kompetenztests ende 9. und 11. Schuljahr, Mathematik auf 2 Niveaux, Einführungskurse an den Universitäten, doppeltes Notengewicht für Mathematik und Erstsprache

¹⁰ U. A. mehr Statistik, mehr echte Anwendungen und mehr „mathematics literacy“ im Grundlagenfach

Schwingungen I oder Wenn der Vater mit dem Sohn ...

Urs Kirchgraber, kirchgra@math.ethz.ch

1

In seinem Artikel [2] im Juni-Heft des VSMP-Bulletins des Jahres 2012 beschreibt der Autor Martin Lieberherr warum er dazu gekommen ist, die sogenannte Duffing-Gleichung zu untersuchen: Er war mit seinem kleinen Sohn auf einem Kinderspielplatz und dem Buben bereitete es Vergnügen mit einem ‘Flugsimulator’ zu ‘fliegen’, Abbildung 1. Der ‘Flugsimulator’ für Kinder besteht im wesentlichen aus einer grossen, starken Feder, die senkrecht montiert und oben mit einem Sitz versehen ist. Darauf hatte der Junge Platz genommen und man kann sich gut vorstellen, dass er – mit Papas Hilfe oder gar ganz allein – eine vertikale Auf- und Abwärtsbewegung zustande brachte: und schon erlebte er einen Hauch von Fliegen!



Abbildung 1: ‘Flugsimulator’ für Kinder

Die *Duffing-Gleichung* ist eine (gewöhnliche) Differenzialgleichung 2. Ordnung:

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \alpha x(t) - \gamma x(t)^3 = k \cos(\Omega t) \quad (1)$$

Sie ist benannt nach dem deutschen Ingenieur *Georg Duffing* (1861-1944), der sich mit ihr sowohl experimentell als auch theoretisch auseinandersetzte, siehe [1]. Die Gleichung hat folgende *mechanische Deutung*: x bezeichnet die Auslenkung eines sich entlang einer Geraden bewegenden Massenpunkts, bezogen auf einen Nullpunkt O . Auf den Massenpunkt wirken drei *Kräfte* (pro Masseneinheit):

- die von der Auslenkung abhängige *Rückstellkraft*

$$-(\alpha x - \gamma x^3)$$

hervorgerufen zum Beispiel durch eine Feder

- die von der Geschwindigkeit $v := \dot{x}$ abhängige *Reibungs-* oder *Dämpfungskraft*

$$-2\delta\dot{x}$$

- eine periodisch einwirkende *Anregungskraft*

$$k \cos(\Omega t)$$

mit der Periode

$$\frac{2\pi}{\Omega}$$

Newtons *Grundgesetz der Mechanik*¹ liefert umgehend die Differenzialgleichung (1).

In der Community derjenigen, die sich mit Differenzialgleichungen und Dynamischen Systemen befassen, ist die Duffing-Gleichung bestens bekannt – weil viel zitiert und intensiv studiert! Sie gehört in die Kategorie der (mathematischen) *Juwelen*. Ein Juwel ist in diesem Zusammenhang ein Problem, das schwierig, ja sehr schwierig, aber nicht hoffnungslos schwierig ist, sondern so, dass sich an ihm mit (hartnäckiger) Arbeit neue *Ideen* entwickeln, neue *Einsichten* gewinnen lassen.

2

Ist die Duffing-Gleichung das plausibelste Modell für die Bewegung, die Lieberherrns Sohn mit seinem ‘Flugsimulator’ ausführte?

Durch die Feder ist beim ‘Flugsimulator’ eine rücktreibende Kraft im Spiel (linear oder nicht). Ferner die Schwerkraft, weil die Feder vertikal montiert ist. Und (viel) Reibung. Wenn der Bub einfach ruhig sitzen würde, würde sein ‘Flugzeug’ bald stillstehen: Das System würde bald im Gleichgewicht verharren, das eintritt, wenn sich die einwirkenden Kräfte gegenseitig kompensieren.

Aber der Bub sitzt nicht einfach still. Er bewegt sich, führt dem System (vielleicht von Papa unterstützt) Energie zu. Aber wie? Nach einem bestimmtem Rythmus, einem festen Fahrplan (wie der Term $k \cos(\Omega t)$ bei der Duffing-Gleichung)? Ich glaube eher nicht.

Ich meine, dass die Bewegung, die beim kindlichen ‘Flugsimulator’ zustandekommt, anders erklärt werden kann: mit dem Mechanismus, der zu sogenannten

selbsterregten Schwingungen

führt. Bei diesem Mechanismus wird die Energiezufuhr durch den *Systemzustand* geregelt.

Ich möchte das Phänomen selbsterregter Schwingungen anhand der *Kinderschaukel* erklären. Der Ausgangspunkt zur Entwicklung eines Modells ist natürlich das (mathematische) Pendel: An einer um einen Aufhängepunkt in einer Ebene drehbaren, masselosen Stange ist am freien Ende eine Masse angebracht. Lenkt man das Pendel aus und lässt es los, beginnt es zu schwingen – hin und her: von rechts nach links und zurück, von rechts nach links und zurück, usw.

Idealisiert man zunächst und stellt sich vor, dass man den Versuch im Paradies macht, wo keinerlei Reibung wirkt, dann wiederholt sich der immergleiche Vorgang ad infinitum (damit ist im Paradies freilich die Zeit erfunden ...). Richten Sie Ihr Augenmerk nun bitte auf die (Momentan-)Geschwindigkeit v mit

¹Masse m mal Beschleunigung a gleich einwirkende (Gesamt-)Kraft F : $ma = F$.

der das Pendel von rechts nach links durch die vertikale Lage (also seine “untere” Gleichgewichtslage) schwingt. Bei reibungsfreier Bewegung bleibt diese Geschwindigkeit immer gleich gross.

Wenn man die Geschwindigkeit bei jedem Durchgang (einfachheitshalber nur, wenn das Pendel von rechts nach links schwingt) protokolliert, lautet das Protokoll

$$v, \quad v, \quad v, \quad v, \quad v, \quad \dots \tag{2}$$

Denkt man sich das Experiment aus dem Paradies in unsere Welt geholt, in der Reibung durch allerhand Massnahmen (Kugellager im Aufhängepunkt, Durchführung im Vakuum ...) zwar reduziert werden kann aber nicht vollständig vermeidbar ist, wird die Bewegung des schwingenden Pendels gebremst: die Geschwindigkeit beim Durchgang von rechts nach links durch die vertikale Lage nimmt von Durchgang zu Durchgang ab.

Man kann das Phänomen der Reibung modellieren, indem man etwa annimmt, dass die Geschwindigkeit beim Durchgang durch die vertikale Lage jeweils um einen gewissen konstanten Prozentsatz reduziert ist, im Vergleich zum Durchgang zuvor. Anstelle von (2) tritt dann das folgende Protokoll

$$v_0 := v, \quad v_1 := \lambda v_0, \quad v_2 := \lambda v_1, \quad v_3 := \lambda v_2, \quad \dots \tag{3}$$

Dabei bezeichnet λ eine Zahl zwischen 0 und 1. Die Geschwindigkeit des Pendels wird also bei diesem Reibungsmodell bei jedem Durchgang von rechts nach links durch die vertikale Lage um

$$(1 - \lambda) \cdot 100\%$$

reduziert^a.

Aus (3) folgt

$$v_n = \lambda^n v \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots \tag{4}$$

Die Geschwindigkeit beim Durchgang durch die vertikale Lage nimmt demzufolge wie eine *geometrische Folge* ab. Je nach dem Wert von λ steht das Pendel früher oder später defacto still – die Uhr aus dem Paradies tickt in dieser unserer Welt nicht ewig ...

Zurück zur Kinderschaukel. Solange das Kind noch ganz klein ist, kann es die Bewegung der Schaukel nicht selber aufrecht erhalten. Papa oder Mama müssen helfen. Wie? Immer wenn die Schaukel durch den *tiefsten Punkt* geht, geben sie ihr einen “Schubs”!

Ich schlage vor, diese Unterstützung von Mami oder Papi wie folgt zu modellieren. Immer wenn das Pendel von rechts nach links *durch die untere Gleichgewichtslage* geht, wird dem Pendel ein “Kick” nach links erteilt, der die *Geschwindigkeit* des Pendels um einen bestimmten *festen Betrag*, den ich mit Δ bezeichne, *erhöht*. Das bedeutet, dass das Protokoll (3) durch folgendes ersetzt wird:

$$v_0 := v, \quad v_1 := \lambda v_0 + \Delta, \quad v_2 := \lambda v_1 + \Delta, \quad \dots \tag{5}$$

Es ist nicht schwer $v_1, v_2, v_3 \dots$ mit Hilfe von v, λ und Δ auszudrücken:

$$\begin{aligned} v_1 &= \lambda v + \Delta \\ v_2 &= \lambda v_1 + \Delta = \lambda(\lambda v + \Delta) + \Delta = \\ &= \lambda^2 v + (1 + \lambda)\Delta \\ v_3 &= \lambda v_2 + \Delta = \lambda^3 v + (1 + \lambda + \lambda^2)\Delta \\ \dots &= \dots \\ v_n &= \lambda^n v + (1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{n-1})\Delta = \\ &= \lambda^n v + \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda} \Delta \end{aligned} \tag{6}$$

Dabei wurde im letzten Schritt die Summenformel für geometrische Reihen benutzt.

Was lernen wir aus dem Resultat (6)?

Zunächst einmal, dass

$$v_n \longrightarrow v_\infty := \frac{1}{1-\lambda} \Delta \text{ für } n \rightarrow \infty \quad (7)$$

gilt (denn λ ist ja eine Zahl zwischen 0 und 1). Das heisst: Die Geschwindigkeit beim Durchgang des Pendels von rechts nach links durch die vertikale Lage strebt im Laufe der Zeit gegen den Wert v_∞ . Und diese Geschwindigkeit hängt von λ ab, und von Δ , aber *nicht* von der Geschwindigkeit $v_0 = v$ beim allerersten Durchgang.

Wie entwickelt sich die Bewegung, wenn die Geschwindigkeit schon im ersten Durchgang durch die vertikale Gleichgewichtslage den Wert v_∞ hat? Aus der ersten Gleichung (6) folgt mit der Wahl

$$v = v_\infty := \frac{1}{1-\lambda} \Delta$$

nach kurzer Rechnung

$$\begin{aligned} v_1 &= \lambda v + \Delta = \lambda v_\infty + \Delta = \lambda \frac{1}{1-\lambda} \Delta + \Delta \\ &= \frac{1}{1-\lambda} \Delta = v_\infty \end{aligned}$$

Folglich liefert der "Startwert" $v = v_\infty$ das Protokoll

$$v = v_\infty = \frac{1}{1-\lambda} \Delta v, \quad v_1 = v_\infty, \quad v_2 = v_\infty, \quad \dots \quad (8)$$

Durch (8) wird *periodisches Verhalten beschrieben*: Das Pendel führt immer die genau gleiche Bewegung aus. Und (7) bedeutet, dass sich die Pendelbewegung der durch (8) definierten periodischen Bewegung nähert, wenn die Bewegung davon abweicht.

Im Jargon der Theorie der Dynamischen Systeme nennt man (8) einen *Fixpunkt* des durch die Abbildung

$$v_0 \longrightarrow \lambda v_0 + \Delta$$

definierten *diskreten dynamischen Systems*, der wegen der Eigenschaft (7) ein *globaler Attraktor* ist.

3

Betrachten wir den Vorgang selbsterregter Schwingungen allgemeiner. Im Zentrum steht eine schwingungsfähige Einheit – zum Beispiel ein Pendel, eine Feder, ... , kurz: ein *Schwinger*. Da die Schwingungen, die der Schwinger ausführt, gedämpft werden, muss die dem System dadurch "verlorengelende" Energie ersetzt werden, wenn die Schwingung nicht de facto zum Erliegen kommen soll. Es braucht eine *Energiequelle* und ein Mechanismus, der *regelt*, wann dem Schwinger *wie* und *wieviel* Energie zugeführt wird. Einen solchen Mechanismus nennt man *Regler*.

Bei selbsterregten Schwingungen ist der *Zustand* des *Systems* massgeblich, *wann* dem Schwinger Energie zugeführt wird. Beim Beispiel in Abschnitt 2 erhält das Pendel den "Kick", wenn es von rechts nach links durch die *untere Gleichgewichtslage* geht (und zwar in Richtung der Bewegung).

Die Anbindung der Energiezufuhr an den Systemzustand nennt man *Rückkopplung*. Und man spricht von einem *rückgekoppelten System*.

4

Wer einen periodischen Vorgang erzeugen kann, hat (im Prinzip) eine *Uhr* erfunden. Insofern stellt das in Abschnitt 2 beschriebene Pendel, dem jeweils beim Durchgang durch die vertikale Gleichgewichtslage von rechts nach links ein Schlag erteilt wird um die Reibung zu kompensieren, den Prototyp einer Uhr dar. Unbefriedigend am Design dieser “Uhr” ist, dass es eine Person braucht, die dem Pendel jeweils den “Kick” gibt, also die Funktion sowohl der Energiequelle als auch des Reglers übernimmt.

Es gibt jedoch sehr wohl elegantere *Realisierungen* des Konzepts aus den Abschnitten 2, 3. Ein schönes Beispiel ist der von K. Magnus in [3] beschriebene “Kippschwinger”, siehe Abbildung 2. Es fließt ständig Wasser mit konstanter Rate (vertikaler Pfeil). Solange das Gefäß des Kippschwingers nur wenig Wasser enthält sorgt das Gegengewicht (in der Abbildung als schwarze Kugel markiert) dafür, dass der Kippschwinger nahezu vertikal steht und Wasser ins Gefäß einfließen kann.

Wenn der Wasserstand im Gefäß ein gewisses Niveau erreicht hat, reicht das Gegengewicht nicht mehr aus, um die “Hantel” in der (fast) vertikalen Position zu halten, sie kippt – sie geht in die in Abbildung 2 gestrichelt gezeichnete Position über. In dieser neuen Position fließt das Wasser aus dem Gefäß aus (schräger Pfeil), bis das Gegengewicht den Kippschwinger in die alte Position zurückdreht, in der wieder Wasser ins Gefäß einfließt. Dieser Vorgang wiederholt sich ad infinitum. Der Kippschwinger ist (im Prinzip) eine Uhr.

Der Kippschwinger ist verwandt mit einem Spielzeug, das unter der Bezeichnung “*Trinkvogel*” in der Literatur verbreitet ist. Dazu die Website:

<http://de.wikipedia.org/wiki/Trinkvogel>

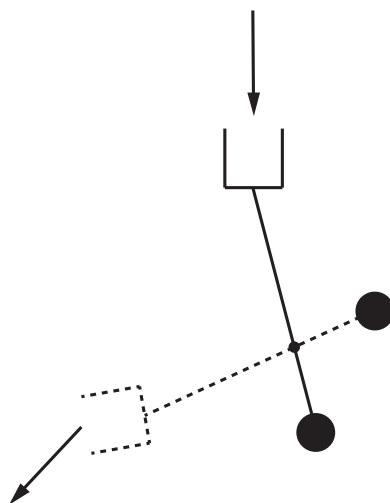


Abbildung 2: Kippschwinger, nach K. Magnus: *Schwingungen - Eine Einführung in die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen*, Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik, Band 3, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft mbH, Stuttgart, 1961, Kapitel 3: *Selbsterregte Schwingungen*, Abbildung 84, p. 91, mit freundlicher Genehmigung durch Springer Science+Business Media.

Anschauliches Beispiel für eine reale Uhr ist Grossmamis prächtige Pendeluhr. Wenn man hinter das Zifferblatt schaut, zeigt sich der (geniale) Mechanismus! Die Kernidee besteht darin, eine Pendelbewegung mit einer Drehbewegung zu koppeln, siehe Abbildung 3. Ein Zahnrad dreht sich, weil es zum Beispiel durch eine Schnur mit einem Gewicht verbunden ist: Die Schnur ist um den Schaft des Zahnrad gewickelt und am Schaft befestigt und wickelt sich ab, wenn sich das Zahnrad dreht.

Der Drehpunkt des Pendels ist zugleich der Mittelpunkt des sogenannten Ankers, der fest mit der Pendelstange verbunden ist. Er koppelt Pendel- und Drehbewegung und hat eine doppelte Funktion: 1) Indem er je nach Auslenkung des Pendels immer wieder zwischen die Zähne des Zahnrads greift, regelt er dessen Drehbewegung und sorgt dafür, dass sich das Zahnrad nicht einfach dreht und die Schnur sich in Nullkommanichts abwickelt, sondern nur schrittweise. 2) Via Zähne des Zahnrads übt das Gewicht Druck auf den Anker aus und wirkt so auf die Pendelbewegung. Es sorgt damit für die Kompensation von Energieverlusten durch Reibung. Die Energiezufuhr wird also vom Gewicht durch Abbau von potentieller Energie geliefert. Es entsteht eine selbsterregte Schwingung.

Der folgende Link führt zu einer Animation, die das Zusammenspiel von Pendel- und Drehbewegung schön illustriert:

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Scappamento.gif?uselang=de>

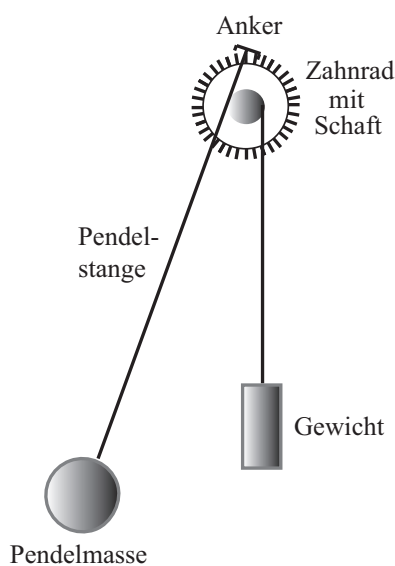


Abbildung 3: Grossmamis Pendeluhr – Das Prinzip. Ein Gewicht ist via eine Schnur, die um den Schaft eines Zahnrads gewickelt ist, fest mit dem Zahnrad verbunden. Ein Anker, der an einem Pendel befestigt ist, koppelt die Drehbewegung des Zahnrads mit der Bewegung des Pendels und sorgt dafür, dass die Schnur nur in kleinen Portionen, die durch den Gang des Pendels bestimmt werden, abgewickelt wird. Umgekehrt wirkt das Gewicht via Zahnradzähne auf den Anker und damit auf die Pendelbewegung und sorgt so für die Kompensation von Reibungsverlusten.

5

Kehren wir einen Moment zur *Kinderschaukel* zurück, siehe Abschnitt 2. Grössere Kinder sind nicht darauf angewiesen, dass Vater oder Mutter mithelfen die Schwingung aufrecht zu erhalten: Sie können ihr durch geeignete Körperbewegungen, zum Beispiel durch passendes Beugen und Strecken der Wadenbeine, selber Energie zuführen, und so die Bewegung aufrecht erhalten. In [3], p. 131, wird dieser Vorgang modelliert und das Modell analysiert.

Auch beim ‘Flugsimulator’, siehe Abschnitt 2, werden die Kinder versuchen die Schwingung durch geeignete Körperbewegung selber aufrecht zu erhalten.

6

Im nächsten Teil dieser kleinen Artikelreihe wird es noch einmal um selbsterregte Schwingungen gehen, dann um Differenzialgleichungsmodelle. Ein weiteres Juwel aus der Sammlung “schöner Probleme” in der Theorie der Differenzialgleichungen und Dynamischen Systeme ist nämlich die sogenannte *van der Pol*-Gleichung. Sie ist benannt nach dem holländischen Physiker und Elektroingenieur *Balthasar van der Pol* (1889-1959), der sie 1927 zur Modellierung eines elektrischen Schwingkreises, in den eine *Elektronenröhre* eingebaut ist, einführte. Die Gleichung lautet:

$$\ddot{x}(t) - \epsilon[1 - x(t)^2]\dot{x}(t) + x(t) = 0 \quad (9)$$

(9) ist wie die Duffing-Gleichung eine Differenzialgleichung 2. Ordnung, aber im Gegensatz zu (1) enthält sie *keinen* in der Zeit t periodischen Anregungsterm und beschreibt trotzdem einen “persistenten” Schwingungsvorgang, wie sich in der Fortsetzung dieses Artikels zeigen wird.

In einer weiteren Folge soll dann noch etwas zur Gleichung (1) von Duffing gesagt werden.

7

Der Autor dankt N. Hungerbühler, M. Lieberherr, W. Schiehlen (Stuttgart) und D. Stoffer herzlich für wertvolle Bemerkungen, die er gerne eingearbeitet hat, M. Lieberherr für die Erlaubnis, Abbildung 1 wiedergeben zu dürfen, und A. Nüesch für seine Hilfe bei der Beschaffung der Erlaubnis zur Publikation von Abbildung 2.

Notes

^aDiese Annahme kann man leicht durch ein Differenzialgleichungsmodell stützen. Die Differenzialgleichung des Pendels mit linearer Dämpfung lautet:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \frac{g}{\ell} \sin x = 0$$

Dabei bezeichnet x die Auslenkung des Pendels gegenüber der Vertikalen, ℓ die Länge der Pendelstange, g die Erdbeschleunigung. Wählt man die Einheiten so, dass $g/\ell = 1$ gilt und ersetzt $\sin x$ für geringe Pendelauslenkungen durch x , lautet die Gleichung

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + x = 0$$

Die Lösung zur Anfangsbedingung $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = -v_0$ ist

$$x(t) = -\frac{1}{\omega} e^{-\delta t} \sin(\omega t) v_0, \quad \omega = \sqrt{1 - \delta^2}$$

Hieraus folgt

$$\dot{x}(0) = -v_0, \quad \dot{x}(2\pi/\omega) = e^{-\delta \frac{2\pi}{\omega}} (-v_0)$$

Dieses Modell liefert also $\lambda = e^{-\delta \frac{2\pi}{\omega}}$.

Literatur

- [1] G. Duffing: *Erzwungene Schwingungen bei veränderlichen Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*, 1918.
- [2] M. Lieberherr: *Duffing-Oszillator*, VSMP-Bulletin Nr. 119, Juni 2012, p. 30-32.
- [3] K. Magnus: *Schwingungen*, 1961, 1976³.

Mathematik- und Physikunterricht zwischen heute und morgen Welche Bedeutung kommt dabei dem Einsatz von Technologie zu?

Samstag, 9. Mai 2015, 10:00 bis 16:15 Uhr

Kantonsschule am Burggraben St. Gallen, Burggraben 21, 9000 St.Gallen

<p>Norbert Hungerbühler Professor für Mathematik und Ausbildung, ETH Zürich</p>	<p>«CAS, Taschenrechner, Tablets und Laptops» oder «Back to the Roots» – Herausforderungen für den Mathematikunterricht</p> <p>Das Für und Wider des Einsatzes von CAS im gymnasialen Mathematikunterricht wird seit gut zwei Jahrzehnten diskutiert. Wir versuchen im Vortrag eine Bestandsaufnahme der Argumente zu machen und die unterschiedlichen Standpunkte darzulegen. Ein Aspekt ist dabei die Sichtweise der Hochschulen.</p> <p>In einem zweiten Teil wollen wir auch ein wenig Mathematik betreiben und das Problem der inversen Kaustik betrachten. Dabei kommen CAS und numerische Rechnungen zum Einsatz.</p>
<p>Hans Peter Dreyer em. Mathematik- und Physiklehrer, em. Fachdidaktiker ETH und UNI Zürich</p>	<p>MINT in Schweizer Gymnasien aus der Sicht von MUPET* Mathematik- (Physik- und Informatik-) Unterricht zwischen IST und SOLL</p> <p>Der Fachkräftemangel brachte das Thema auch in der Schweiz auf die bildungspolitische Tagesordnung. Über unbefriedigende Kompetenzen der MINT-Studienanfänger klagen manche Hochschulen. Geringe Akzeptanz der MINT-Fächer als Teil der Allgemeinbildung ist ein dritter Problemkreis. - Die Situation in den vier Fachbereichen, die mit der Abkürzung MINT angesprochen sind, ist im Gymnasium je nach Zielgruppe sehr unterschiedlich. Deshalb ist eine differenzierte Betrachtung nötig.</p> <p>Einführend werden einige MINT-relevanten Ergebnisse aus früheren Studien dargelegt. Sie werden ergänzt durch die Antworten der rund 8000 Lernenden im 9. und 12. Schuljahr aus allen Sprachregionen, die 2012 und 2013 im Rahmen des MUPET-Projekts zu Mathematik, Physik und Informatik, der Schwerpunkt- und der Studienfachwahl usw. befragt worden sind. Auf dieser Basis wird eine Reihe von Massnahmen auf verschiedenen Ebenen und für verschiedene Schülerpopulationen skizziert. Der Schwerpunkt liegt auf der Mathematik, jedoch auch die Physik und die Informatik werden angesprochen.</p>

*) MUPET = Mathematik und Physik Entwicklung im Gymnasium unter Berücksichtigung von Beziehungen zur Technik

Programm

10:00 Uhr	Begrüssung
10:10 Uhr	Referat N. Hungerbühler
11:00 Uhr	Pause
11:20 Uhr	Referat H. P. Dreyer
12:00 Uhr	Fragen, Diskussion, Erfahrungsaustausch
12:15 Uhr	Mittagessen
13:30 Uhr	
14:20 Uhr	Parallel-Workshops mit TI-NspireCAS
15:10 Uhr	
16:00 Uhr	Plenum
16:15 Uhr	Schluss der Tagung

Hinweis:

In den Workshops wird mit TI-Nspire-Technologie gearbeitet. Bringen Sie deshalb Ihren Laptop mit der installierten Software und, falls vorhanden, Ihr Handheld (aktuelles OS 4.0) mit.

30 Tage-Testversion:

<http://education.ti.com/de/schweiz/software/search/ti-nspire-cas>

Anmeldung

über die WBZ oder Webpalette:

<https://www.wbz-cps.ch/de/angebote-fachkurse#>

unter 04 Mathematik oder 05 Physik

Weiterbildung: 26. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht

Die SMG, die DMK und die ETH Zürich laden Sie herzlich zu dieser Weiterbildungsveranstaltung ein.

Kursdaten:

Ort: Freies Gymnasium, Zürich

Datum: Mittwoch, 9. September, 2015

Organisation: Meike Akveld (ETH), Hansruedi Guggisberg (FGZ), Norbert Hungerbühler (ETH)

Programm:

09:30 Uhr	Check-in in der Aula
10:00 Uhr	Begrüssung
10:15 Uhr	Vortrag: Walter Farkas (ETH und UZH) <i>Die Mathematik des Risikomanagements</i>
11:00 Uhr	Kurze Pause
11:15 Uhr	Podiumsdiskussion geleitet durch Daniela Grawehr <i>“CAS, Taschenrechner, Tablets und Laptops” oder “Back to the Roots”: Herausforderungen für den Mathematikunterricht</i>
12:45 Uhr	Mittagessen
14:00 Uhr	Workshop I
15:00 Uhr	Kaffeepause
15:15 Uhr	Workshop II
16:15 Uhr	Ende der Veranstaltung

Die hier angekündigten 6 Workshops finden je zweimal parallel an den im Programm aufgeführten Zeiten statt:

- **Gemeinsames Prüfen:** Marco Manni (KS Solothurn) in Zusammenarbeit mit Romano Mero und Dieter Schindler (WBZ)
- **Numerik von Differentialgleichungen im Schwerpunktfach:** Ralf Massjung (KS Wettingen)
- **Neues ZH Sek I Lehrmittel: Erfahrungen, Alternativen, Massnahmen:** Moderator: Martin Huber (ZHAW, ETH, PHZH)
- **Masstab eins zu eins:** Hans Walser (Universität Basel)
- **Stichprobenverteilungen in der Statistik mittels simulierter Wahlumfragen:** Marloes Maathuis (ETH)
- **Beweisen ohne Sorgen:** Roman Meier (RG Rämibühl), Armin Barth (KS Baden und MINT Lernzentrum)

Bitte melden Sie sich bis spätestens 31.08.2015 auf der folgenden Webseite an:

www.math.ch/TMU2015

Dort finden Sie weitere Informationen zu den Workshops und der Anreise.



Cours de formation continue 2015: La physique des phénomènes atmosphériques

Davet Stéphane, davet.stephane@lyca.eduvs.ch

Informations générales:

- **Objectifs:**

1. Présenter les différents phénomènes physiques à l'oeuvre dans notre atmosphère, la manière avec laquelle ces processus interagissent ensemble pour générer la complexité de notre environnement et les méthodes utilisées pour effectuer des mesures et des prévisions.
2. Sensibiliser les professeurs de lycée-collège-gymnase à la problématique des manifestations chaotiques de l'atmosphère, à la difficulté des prédictions météorologiques ainsi qu'au réchauffement climatique mondial et ses conséquences locales.
3. Permettre un recyclage des informations dans nos cours à l'avantage des élèves.

- **Date:** 22-23-24-25 septembre 2015

- **Lieu:** Champéry (VS)

- **Inscription:** Dès fin avril 2015

Description du cours:

Tous les jours, d'innombrables scientifiques tentent de prévoir le temps qu'il va faire les jours suivants. Les météorologues utilisent souvent des modèles, enrichis de leur expérience, face aux données expérimentales, pour effectuer ce travail. Des phénomènes complexes encore mal compris sont par ailleurs à l'oeuvre autour de nous, comme la formation des orages, de la foudre ou la dynamique des tornades. D'autres essayent d'anticiper les modifications atmosphériques globales à long terme, notamment pour étudier les conséquences de l'activité humaine sur notre environnement.

Ce cours de formation a l'ambition de proposer un état des lieux de nos connaissances sur l'ensemble de ces questions. Pour nous aider à y voir plus clair, la CRP a invité une brochette remarquable de spécialistes qui, nous l'espérons, pourront nous proposer quelques réponses.

Afin de tenir compte des différentes remarques et conseils que nous avons pu récolter lors de notre dernier cours de formation en 2014, nous avons décidé d'ajouter un jour pour éviter les trop longues journées. Nous espérons que ce nouveau programme vous conviendra et que vous aurez autant de plaisir à suivre ce cours que nous en avons eu à le préparer pour vous.

Pour la CRP
Stéphane Davet

Weiterbildungsangebote zur Nanoscience

Die Weiterbildungsangebote zur Nanoscience werden im Rahmen des EU-Projekts *Quantum Spin-Off* angeboten. Kennen Sie eine Physik-Lehrperson, die Interesse hat, am *Quantum Spin-Off* Projekt teilzunehmen? Oder haben Sie selber Interesse an der Nanoscience?

Es gibt die Möglichkeit, als Lehrperson an der Sommerakademie in Griechenland (12. – 17. Juli 2015) teilzunehmen. Die Weiterbildungsveranstaltung findet am 24. Oktober 2015 in Basel statt.

Webseite zum Projekt: www.quantumspinoff.eu

Kontakt

Miriam Herrmann

Zentrum für Naturwissenschafts- und Technikdidaktik

Pädagogische Hochschule der FHNW

miriam.herrmann@fhnw.ch

T: 061 228 50 13



DPK

Swiss Young Physicists' Tournament 2015

Samuel Byland (Pro IYPT-CH, samuel.byland@sypt.ch), Fiona Streif

Beim *Swiss Young Physicists' Tournament* (SYPT), der „Physik-Schweizermeisterschaft“ traten am 27. und 28. März an der Universität Zürich Irchel 45 Schülerinnen und Schülern von Schweizer Gymnasien in Dreier-Teams zu so genannten *Physics Fights* an. Alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer übernahmen je einmal die Rolle des *Reporter* (präsentiert eine im Vorfeld erarbeitete Lösung zu einem der 17 vorgegebenen Probleme), *Opponent* (führt die Diskussion über die zuvor präsentierte Lösung) und *Reviewer* (beurteilt die Leistungen von *Reporter* und *Opponent* kritisch). Im Final der besten drei Teams nach der Vorrunde setzte sich mit den *Doped Quasiparticles* mit Lioba Heimbach (Zürich International School), Cesare Villiger (Literargymnasium Rämibühl Zürich) und Michael Rogenmoser (MNG Rämibühl Zürich) erstmals ein schulübergreifendes Team durch.



Abbildung 1: Höchste Konzentration während eines *Physics Fights*



Abbildung 2: Physik-Schweizermeister 2015: *Doped Quasiparticles* mit (v.l.n.r.) Michael Rogenmoser, Lioba Heimbach, Cesare Villiger

Die Teilnehmerin Fiona Streif (MNG Rämibühl) hat freundlicherweise einen Text über ihre Eindrücke vom SYPT verfasst:

„Im November starteten wir mit den Vorbereitungen aufs SYPT und bekamen zum ersten Mal ein Gefühl dafür, was „wahre“ Physik ist. Jeder von uns wählte eine der 17 durch das internationale Komitee vorgegebenen Problemstellungen aus. Ab jetzt gab es kein Zurück mehr. Die Forschung hatte uns vollkommen in ihren Bann gezogen, und für die nächsten fast fünf Monate zählte nichts anderes mehr. Jeden Donnerstagnachmittag, und nicht selten auch an anderen Tagen oder sogar am Wochenende, suchten wir gemeinsam nach Erklärungen und Lösungen für unsere jeweiligen Probleme. Unterstützt wurden wir dabei von unseren Physiklehrern S. Byland und D. Keller und einigen ehemaligen Teilnehmern. Immer wieder offenbarten sich uns neue Hindernisse, doch wir gaben nicht auf. Das SYPT kam immer näher und wir legten zum Schluss sogar Nachtschichten ein.“

Am 27. März war der erste Wettkampftag. In angespannter Erwartung irrten wir über das riesige Uni-Gelände auf der Suche nach unseren Mitstreitern. Erst später bemerkten wir, dass wir den Plakaten hätten folgen können, die wir in unserer Aufregung natürlich komplett übersehen hatten. Dennoch schafften wir es alle rechtzeitig zu Kaffee und Gipfeli und der offiziellen Begrüssung durch den Leiter der naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Zürich.

Die erste Fightrunde begann mit etwas Verspätung. Unsere Aufregung war aber nicht minder gross, als es schliesslich losging. Dennoch, oder vielleicht sogar gerade deswegen, waren wir voll konzentriert und gaben unser Bestes. Zu Mittag assen wir in der Uni-Mensa mit Gutscheinen, die wir, neben anderen Geschenken, am Morgen beim Einschreiben bekommen hatten. Vor der Nachmittagsrunde erhielten wir auf einer Führung Einblicke in verschiedene Forschungslabors der Uni. Es war sehr spannend, aber leider bekamen wir nicht immer alles mit, weil wir mit den Gedanken schon wieder in den nächsten Fights steckten. Auch diese überstanden wir ohne grössere Zwischenfälle, und so konnten wir alle ein feines, vom Science Lab der Uni offeriertes Abendessen im Restaurant Neubühl geniessen.

Am Samstag ging es wieder mit Kaffee und Gipfeli los, worauf dann auch gleich die dritte Runde folgte. Diesmal verbreitete sich die grosse Aufregung allerdings erst nach den Fights, als es ans Zusammenzählen der Punkte ging. Welche Teams hatten es ins Finale geschafft? Nachdem die drei besten Teams feststanden, gab es Sandwiches und andere Häppchen – zumindest für all diejenigen, die sich nicht auf die Finalfights vorbereiten mussten.

Beim Final fieberten nochmals alle Dagebliebenen fleissig mit. Ich war richtig froh, dass mein Team sich auf dem vierten Rang klassiert hatte, denn mit diesen Darbietungen hätte ich nicht mithalten können. Auch wenn es nicht alle ins Final geschafft haben, haben alle Teilnehmer viel Mühe und Zeit investiert, was bei der Siegerehrung entsprechend gewürdigt wurde. Das Turnier haben zwar nicht alle gewonnen, aber neue Erfahrungen und Einblicke in die Physik ganz bestimmt.

Für die Besten geht es nun weiter mit der Vorbereitung auf die Endausscheidung für das Team, das ans internationale Turnier (IYPT) nach Thailand fliegen darf. Alle anderen fiebern gespannt der Bekanntgabe der Problemstellungen fürs nächste Jahr entgegen.“

Im Namen von Pro IYPT-CH möchte ich allen teilnehmenden Schülerinnen und Schülern zu den teilweise erstaunlich hochstehenden Präsentationen und Diskussionen gratulieren. Wir bedanken uns herzlich bei den Jurymitgliedern, den vielen freiwilligen Helferinnen und Helfern und bei den Sponsoren, welche das SYPT grosszügig unterstützen.

Links

- [1] Swiss Young Physicists' Tournament (www.sypt.ch)
- [2] International Young Physicists' Tournament (iypt.org)

Wurfellipse

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, lieberhm@mng.ch

1 Einleitung

An einer Sitzung bemerkte ein Kollege, dass es ja gar keine Wurfparabeln gäbe, denn die Bahnen wären Stücke von keplerschen Ellipsen. Das ist wohl wahr, wenn man stark idealisiert (kugelsymmetrische Erde, kein Luftwiderstand, keine Erdrotation etc.), aber ist der Unterschied zwischen Wurfparabel und “Wurfellipse” auch bedeutsam? Für kleine Startgeschwindigkeiten sollte die Ellipse in eine Parabel übergehen. Die Ellipse kann aus den Startwerten (Betrag der Anfangsgeschwindigkeit v_E an der Erdoberfläche und Winkel α_E gegen die Tangentialebene an der Abwurfstelle) berechnet werden. Lässt sich diese Ellipse einfach und schön darstellen? Gibt es wie bei der Wurfparabel im homogenen Schwerefeld eine hübsche Einhüllende, wenn man die Wurfellipsen mit verschiedenen Abschusswinkeln zeichnet?

2 Horizontaler Wurf

Zum Aufwärmen betrachten wir den horizontalen Wurf mit kleiner Anfangsgeschwindigkeit (Abbildung 1).

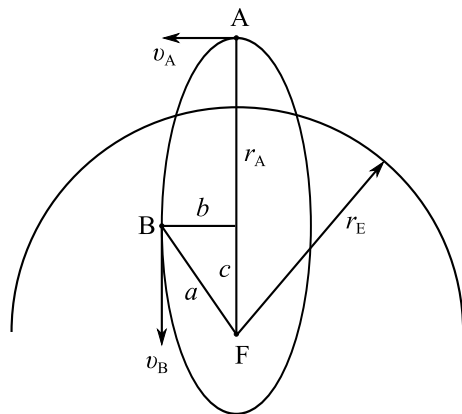


Abbildung 1: Der horizontale Wurf startet im Apogäum A der Bahnellipse mit Geschwindigkeit v_A . Der Startpunkt hat Abstand $r_A > r_E$ vom Schwerpunkt F der Erde. Die Erde hat Radius r_E . Der irdische Schwerpunkt ist ein Brennpunkt F der Ellipse. Um die Ellipse zu beschreiben, wollen wir die grosse Halbachse a und die kleine Halbachse b bestimmen. Die Zeichnung ist nicht massstäblich.

Die potentielle Energie eines Wurfkörpers der Masse m im Abstand r vom Schwerpunkt des Zentralkörpers mit Masse M ist $-GMm/r$, wobei G die newtonsche Gravitationskonstante ist. Die Gesamtenergie ist $-GMm/(2a)$. Wir können also mit Hilfe des Energiesatzes aus den Startwerten die grosse Halbachse berechnen:

$$\frac{1}{2}v_A^2 - \frac{GM}{r_A} = -\frac{GM}{2a} \Rightarrow a = \frac{r_A}{2} \cdot \left(1 - \frac{r_A v_A^2}{2GM}\right)^{-1} \quad (1)$$

Ebenso können wir die Geschwindigkeit v_B im Abstand a vom Brennpunkt F berechnen (Abbildung 1).

$$\frac{1}{2}v_A^2 - \frac{GM}{r_A} = \frac{1}{2}v_B^2 - \frac{GM}{a} \Rightarrow v_B^2 = \frac{2GM}{r_A} \cdot \left(1 - \frac{r_A v_A^2}{2GM}\right) \quad (2)$$

Der Nebenscheitel B hat den Abstand b vom Ellipsenmittelpunkt. Die kleine Halbachse b bestimmen wir mit Hilfe des zweiten keplerschen Gesetzes (Drehimpulserhaltung):

$$r_A v_A = b v_B \Rightarrow b = \frac{r_A v_A}{v_B} \quad (3)$$

Diese Bahnellipse, deren Hauptscheitel A wir in den Nullpunkt eines kartesischen Koordinatensystems legen, ist der Graph folgender Funktion:

$$y = a \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}} - 1 \right) \rightarrow y = -\frac{x^2 g}{2v_A^2} + \dots \quad (4)$$

Die Ellipsenfunktion geht für kleine x und kleine v_A in die übliche Darstellung der Parabel für den horizontalen Wurf im homogenen Schwerfeld über, wenn man die Abkürzung $g = GM/r_A^2$ (Fallbeschleunigung, Gravitationsfeldstärke im Punkt A) verwendet. Beim Übergang von der Wurfellipse im newtonschen Gravitationsfeld zur Wurfparabel im homogenen Schwerfeld sind noch einige Feinheiten zu beachten. Wer sich dafür interessiert, möge sich an Am. J. Phys. 73 (June 2005), 516 orientieren.

3 Schiefer Wurf

Die Wurfellipse ist eine Ellipse mit grosser Halbachse a und kleiner Halbachse b , deren einer Brennpunkt F mit dem Schwerpunkt der Erde zusammen fällt, siehe Abbildung 2. In Polarkoordinaten wird sie üblicherweise durch die numerische Exzentrizität ε sowie das Quermass p parametrisiert:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_E)} \quad p = b^2/a = a \cdot (1 - \varepsilon^2) \quad \varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2} \quad (5)$$

Die Ellipse ist gegen die Polachse (in Abb. 2 aufwärts) um den Winkel φ_E gedreht. Das Ziel der Rechnung ist, a , ε und φ_E aus den Abwurfsdaten v_E und α_E zu bestimmen.

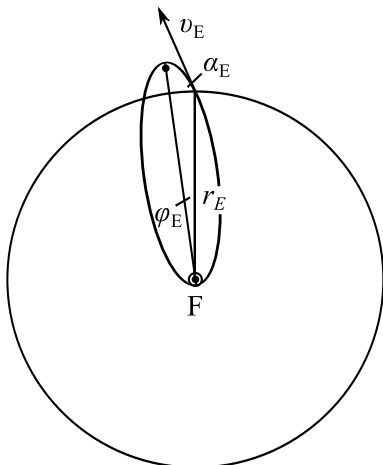


Abbildung 2: Die Wurfellipse startet im Abstand r_E (Erdradius) unter dem Winkel α_E zur Erdoberfläche mit Geschwindigkeit v_E . Die Ellipse hat den einen Brennpunkt F im Schwerpunkt der Erde. Die lange Achse der Ellipse ist um den Winkel φ_E gegen die Verbindungslinie Brennpunkt-Abwurfstelle geneigt.

Mit Hilfe des Energiesatzes können wir die grosse Halbachse a der Wurfellipse berechnen:

$$\frac{1}{2}mv_E^2 - \frac{GMm}{r_E} = -\frac{GMm}{2a} \Rightarrow a = \frac{r_E}{2} \cdot \left(1 - \frac{r_E v_E^2}{2GM} \right)^{-1} \quad (6)$$

Die grosse Halbachse legt über das dritte keplersche Gesetz die Umlaufzeit T fest (wenn der Wurfkörper denn einen ganzen Umlauf machen könnte).

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (7)$$

Die Exzentrizität können wir über das zweite keplersche Gesetz bestimmen: Die Verbindungslinie Erdmittelpunkt-Wurfkörper überstreicht in gleichen Zeiten dt gleiche Flächen dA respektive während der Umlaufzeit T die ganze Ellipsenfläche πab :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r_E v_E \cos \alpha_E = \frac{\pi ab}{T} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{T} \quad (8)$$

Eliminieren wir mit Hilfe des dritten keplerschen Gesetzes die Umlaufzeit, so erhalten wir

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{(r_E v_E \cos \alpha_E)^2}{GMa}} \quad (9)$$

Den Kippwinkel φ_E der Ellipse erhalten wir aus Gleichung (5) mit $r = r_E$ und $\varphi = 0$. Ich habe davon Abstand genommen, alle diese Formeln zusammenzuführen, um eine geschlossene Darstellung der Wurfellipse als Funktion von r_E , v_E , α_E und GM zu erhalten.

4 Hüllkurve

Zeichnet man viele Wurfellipsen mit gleicher Energie und gleichem Startort übereinander, so ergibt sich eine Hüllkurve, siehe Abbildung 3. O. Emersleben (Math. Nachr., Berlin 3 (1949), 62-70) und Th. Pöschl (Einführung in die analytische Mechanik, Karlsruhe, 1949) haben unabhängig von einander bewiesen, dass die Hüllkurve eine Ellipse ist. Diese Hüllellipse hat den einen Brennpunkt im Schwerpunkt der Erde und den anderen am Abschussort auf der Erdoberfläche.

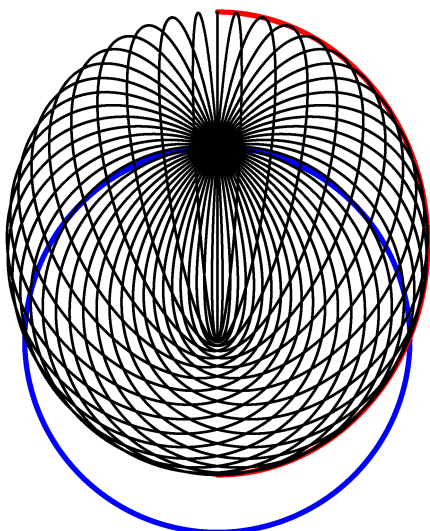


Abbildung 3: Lässt man viele Wurfellipsen mit gleicher Anfangs-Bahngeschwindigkeit v_E und verschiedenen Abschusswinkeln im Intervall $0 \leq \alpha_E \leq \pi$ übereinander zeichnen, so sieht man eine Hüllkurve. Die Hüllkurve ist eine Ellipse mit dem einen Brennpunkt im irdischen Schwerpunkt und dem anderen am Abschussort. Die Hüllkurve ist in der rechten Hälfte eingezeichnet. Der Kreis stellt die Erde dar. Die Bahnellipsen sind vollständig gezeichnet, aber die Wurfkörper können die Erde natürlich nicht durchdringen.

Die Hüllellipse hat die Hauptscheitel bei x_A und x_P , wobei die x -Achse aufwärts orientiert ist und den Nullpunkt im irdischen Schwerpunkt hat. Die Koordinate des oberen Hauptscheitels folgt aus dem Energiesatz für den vertikalen Wurf ($\alpha_E = \pi/2$). Bei x_A ist die Geschwindigkeit Null und die Gesamtenergie ist gleich der potentiellen Energie:

$$-\frac{GM}{2a} = \frac{-GM}{x_A} \Rightarrow x_A = 2a \quad (10)$$

Die Koordinate x_P des unteren Hauptscheitels stimmt mit dem Perigäum des horizontalen Wurfs ($\alpha_E = 0$) überein. Das Apogäum des horizontalen Wurfs befindet sich bei $x = r_E$. Da auch diese Ellipse eine grosse Achse der Länge $2a$ hat, ist der untere Hauptscheitel der Hüllellipse bei $x_P = r_E - 2a < 0$.

Die Hüllellipse hat also die grosse Halbachse $a_H = (x_A - x_P)/2 = 2a - r_E/2$ sowie den Mittelpunkt bei $x = r_E/2 = c_H$ (lineare Exzentrizität). Da der Brennpunkt der Hüllellipse im Schwerpunkt der Erde liegt, folgt für die kleine Halbachse $b_H^2 = a_H^2 - c_H^2$. Der zweite Brennpunkt der Hüllellipse liegt bei $x = 2c_H = r_E$ an der Abwurfstelle.

4. Januar 2015, Lie.

DIE NEUEN VERNIER-PRODUKTE JETZT BEI EDUCATEC BESTELLEN

shop.educatec.ch/vernier

EMISSIONS SPECTROMETER



Das Emissionsspektrometer VSP-EM von Vernier ist ein perfektes Messgerät zur optischen Spektralanalyse im Wellenlängenbereich von 350-900 Nanometer, also von UVA bis ins nahe Infrarot. Emissionsspektren von Glüh- und Spektrallampen oder der Sonne können direkt gemessen, die Daten über ein USB-Kabel zu Ihrem Computer oder einem Datenerfassungsgerät, z. B. dem LabQuest 2 von Vernier, weitergeleitet und ausgewertet werden.



DIREKT
ZUM SHOP

SPECTRUM TUBE SINGLE POWER SUPPLY

Das Sicherheits-Netzgerät ST-SPS zum Betrieb einzelner Spektrallampen (H₂, He, Ne, CO₂, Luft, Ar, N₂) erlaubt die Untersuchung von Spektrallinien mit dem Emissionsspektrometer VSP-EM von Vernier oder mit jedem anderen optischen Spektrometer. Im Unterschied zu anderen Geräten hat das Sicherheits-Netzgerät ST-SPS keine ungeschützten Hochspannungsanschlüsse. Das Gerät erlaubt den Betrieb einer einzelnen Spektrallampe und bietet Platz zum Aufbewahren von 6 weiteren Spektrallampen.



DIREKT
ZUM SHOP



SPECTRUM TUBE CAROUSEL POWER SUPPLY

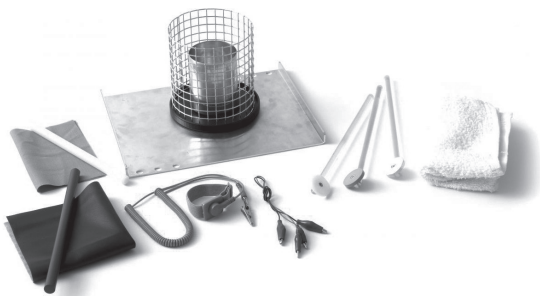
Das komfortablere Sicherheits-Karussell-Netzgerät ST-CAR enthält 8 Spektrallampen. Durch Drehen am Karussell kann bei eingeschaltetem Netzgerät ohne Umbau direkt von einer Spektrallampe zur anderen umgeschaltet werden. Das Sicherheitsdesign des Karussell-Netzgeräts ST-CAR entspricht demjenigen des einfacheren Modells ST-SPS. Es kann ebenfalls mit dem Emissionsspektrometer VSP-EM von Vernier oder jedem anderen optischen Spektrometer eingesetzt werden.



DIREKT
ZUM SHOP



ELECTROSTATICS KIT



Der «Electrostatics Kit» ESK-CRG ist ein Zubehör zum extrem hochohmigen Ladungssensor CRG-BTA von Vernier ($I_b = 10^{-15} A$), einem «elektronischen Elektroskop», das im Gegensatz zum traditionellen Elektroskop auch quantitative Ladungsmessungen erlaubt. Der «Electrostatics Kit» umfasst eine Reihe von elektrostatischen Experimenten mit Faraday'schem Becher und Gitterkäfig, zur Ladung durch Reibung, durch Direktkontakt und durch Induktion.



DIREKT
ZUM SHOP



Measure. Analyze. Learn.™

Möchten Sie mit uns in Kontakt bleiben und über unsere neusten Aktivitäten informiert werden? Dann registrieren Sie sich unter www.educatec.info für unseren Newsletter.

Alle unsere Kataloge finden Sie online unter shop.educatec.ch/werbematerial

EducaTec AG

Altes Schulhaus, Kanzleigasse 2
Postfach, 5312 Döttingen

T +41 56 245 81 61, F +41 56 245 81 63
contact@educatec.ch, www.educatec.ch



Herausgeber — Éditeur

VSMP – SSPMP–SSIMF

Korrespondenz — Correspondance

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
 Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
 6005 Luzern

Layout — Mise en page

Samuel Byland samuel.byland@mng.ch
 Rain 14 Tel. 032 512 50 84
 5000 Aarau

Inserateverwaltung — Publicité

Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch
 Weinbergstrasse 3 Tel. 055 410 62 36
 8807 Freienbach

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

— *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:
 ganzseitig Fr. 500.–
 halbseitig Fr. 300.–
 Beilagen:
 bis 20 g Fr. 500.–
 über 20 g nach Vereinbarung

Adressänderungen — Changement d'adresse

VSMP Mitglieder — *Membres de la SSPMP:*
 VSG – SSPES – SSISS
 Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)
 3000 Bern
 Tel. 056 443 14 54 / Fax. 056 443 06 04
 information@vsg-sspes.ch

übrige Abonnenten — *autres abonnées:*
 Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
 Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
 6005 Luzern

Auflage — Tirage

900 Exemplare
 erscheint dreimal jährlich

Präsident VSMP — SSPMP — SSIMF

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
 Via Domenico Galli 44
 6600 Locarno-Solduno Tel. 091 751 14 47

Deutschschweizerische Mathematischkommission

Daniela Grawehr grawehr@kfanet.ch
 Schützenstrasse 36 Tel. 041 810 49 88
 6430 Schwyz

Deutschschweizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@gymburgdorf.ch
 Pestalozzistrasse 17 Tel. 034 423 46 43
 3400 Burgdorf

Commission Romande de Mathématique

José Luis Zuleta joseluis.zuletaestrugo@epfl.ch
 Avenue de Rumine 42 Tél. 021 624 25 46
 1005 Lausanne

Commission Romande de Physique

Stéphane Davet davet.stephane@lyca.eduvs.ch
 Av. Plantaud 28B Tél. 024 471 21 83
 1870 Monthey

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Luca Rovelli lucarovelli@ticino.com
 Via Pedmunt 10 Tel. 091 825 76 69
 6513 Monte Carasso

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

— *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 129	31.07.2015 (20.09.2015)
Nr. 130	30.11.2015 (20.01.2016)
Nr. 131	31.03.2016 (20.05.2016)

Druck und Versand — Imprimerie

Niedermann Druck AG
 Letzistrasse 37
 9015 St. Gallen
 www.niedermanndruck.ch