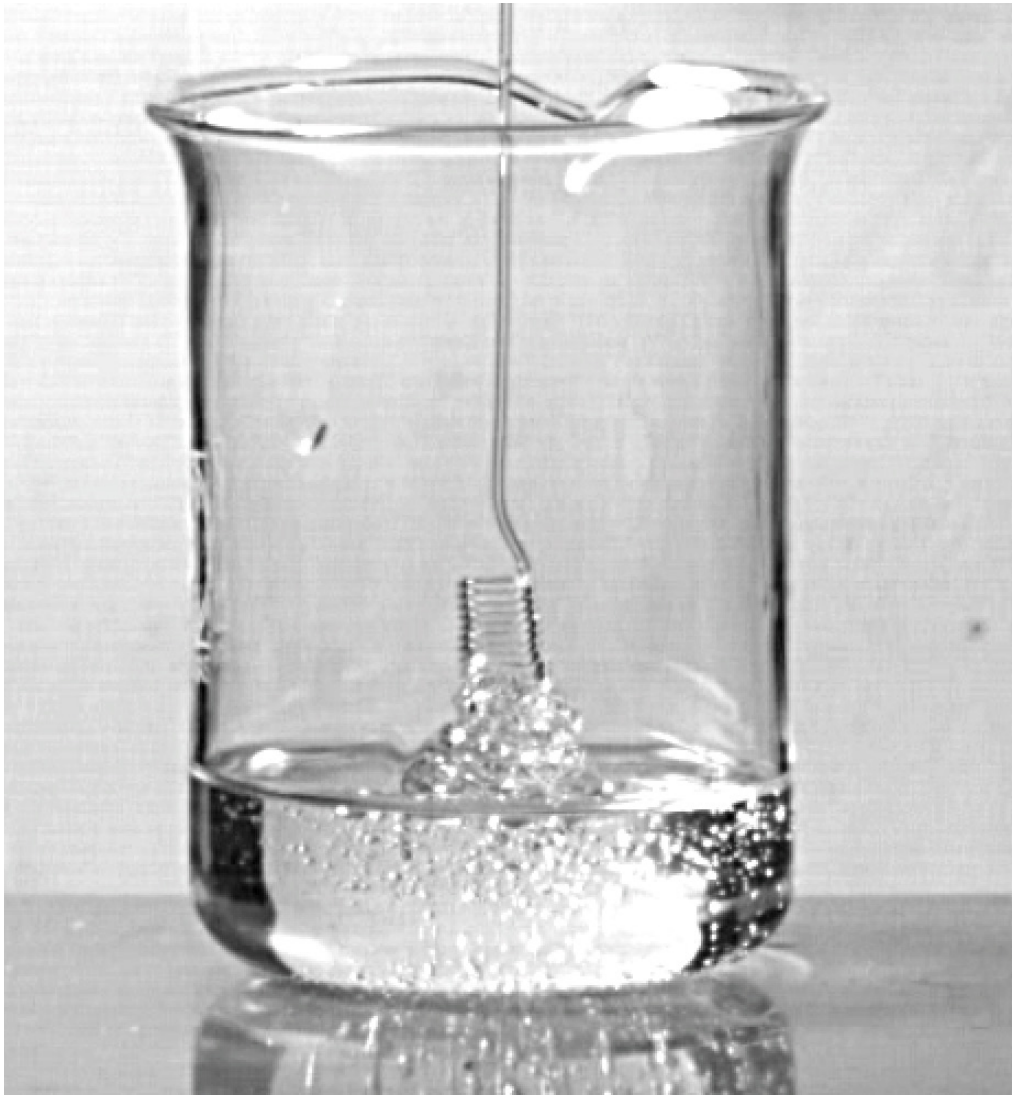


Bulletin

Januar 2015 — Janvier 2015

N° 127

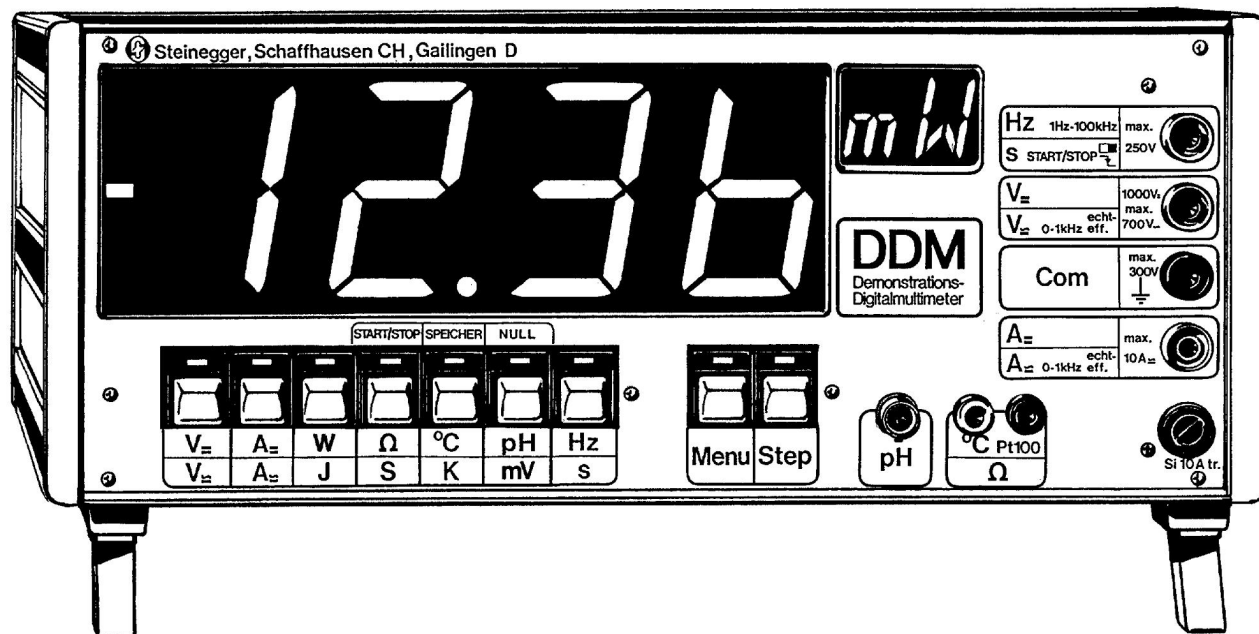


VSMP — SSPMP — SSIMF

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica

Demonstrations-Digitalmultimeter DDM

Art. Nr. 26



- **Misst: Spannung, Strom, Wirkleistung, Energie, Widerstand, Temperatur, pH-Wert, Zeitintervall und Frequenz**
- **56mm hohe LED-Ziffern und 9999 Messpunkte**
- **Automatische und manuelle Bereichsumschaltung**
- **Mehr als 20 Zusatzgeräte direkt anschließbar**
- **Einfacher Datenaustausch mit PC/Mac im Multitasking über die bidirektionale Serieschnittstelle**
- **2 freiprogrammierbare Analog-Ausgänge**
- **Ausführliche 75-seitige Bedienungsanleitung**

Preis inkl MWSt. Fr 2'350.-

Die kostenlose Kurzbeschreibung "Demonstrations-Digitalmultimeter DDM Art. Nr. 26" erhalten Sie direkt vom Hersteller:

Steinegger & Co.
Rosenbergstrasse 23
8200 Schaffhausen



Fax : 052-625 58 60
☎ : 052-625 58 90
Internet: www.steinegger.de

In dieser Ausgabe — *Dans ce numéro*

DPK	Deutschschweizerische Physikkommission	3
	<i>Martin Lieberherr</i> Wackelschwingung	3
	<i>Samuel Lang</i> <i>Buchbesprechung:</i> Norman Sieroka: Philosophie der Physik	5
	<i>Samuel Byland</i> SYPT und IYPT 2015	6
	<i>Patrick Meister</i> Honey Coiling	7
	<i>Juraj Lipscher, Herbert Rubin & Ralph Schumacher</i> Zwei neue Unterrichtseinheiten des MINT-Lernzentrums zum Orbitalmodell und zur Quantenphysik	12
	Deutschschweizerische Mathematikkommission	16
	<i>René Fehlmann</i> Pythagoräische Zahlentripel und Kettenbrüche	16
	<i>H.R. Schneebeli</i> <i>Buchbesprechung:</i> P. Kügler, W. Windsteiger: Algorithmische Methoden	22
	<i>Armin P. Barth, Michael Brunisholz & Ralph Schumacher</i> Wer hat's erklärt? – Wie nachhaltiges Lernen gefördert werden kann	24
	<i>Peter Gallin</i> Eine weitere Aufgabe	31
	<i>H.R. Schneebeli</i> <i>Buchbesprechungen:</i> Ian Stewart: Symmetry. A Very Short Introduction; Hans Walser: Symmetrie in Raum und Zeit	32
	<i>Meike Akveld, Norbert Hungerbühler</i> Autorinnen und Autoren gesucht	35
	Commission Romande de Mathématique	36
	<i>Mireille Schumacher</i> Sangaku (II)	36
	<i>Jean-Daniel Voelke</i> Les origines de notre enseignement de la géométrie analytique	42



Commission Romande de Physique

48

Stéphane Davet

*Livre à recommander: D. Cassidy, G. Holton, J. Rutherford: Comprendre la
Physique* 48

Didier Roulet

Congrès UdPPC Lyon 2014 49

Internet-Adressen — *Adresses Internet*

www.vsmp.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch

Titelseite — *Page de Titre*

Honey Coil (Patrick Meister, Artikel S. 7 in dieser Ausgabe)

Wackelschwingung

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, lieberhm@mng.ch

1 Einleitung

Was ist eine Schwingung? In einem Schulbuch steht “Eine Schwingung ist eine zeitlich periodische Änderung physikalischer Grössen”. Diese “Definition” trifft nicht einmal auf die gedämpfte Schwingung – einen sehr häufigen Fall – zu! Statt die Schulklassen mit überflüssigen Definitionen einzudecken, wäre es wohl besser gewesen, eine Auswahl an Bewegungen vorzuführen, die typische Eigenschaften von Schwingungen zeigen. Auf diese Weise wird vermieden, spezielle Charakteristiken der harmonischen Schwingung fälschlich auf alle Schwingungen zu verallgemeinern. Die folgende Schwingung lässt sich leicht einer Schulklasse demonstrieren (die Bewegung, nicht die Rechnung): Wird eine leere Weinflasche leicht angestossen, siehe Abbildung 1, so vollführt sie eine gedämpfte Wackelbewegung. Die Frequenz nimmt mit abnehmender Amplitude zu. Da Flaschen aber leicht rutschen (Papier unterlegen!) oder in Drehung versetzt werden, habe ich einen ‘Wackler’ aus Legosteinen gebaut und dessen Bewegung experimentell untersucht.

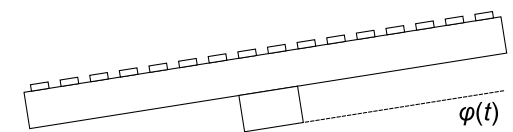
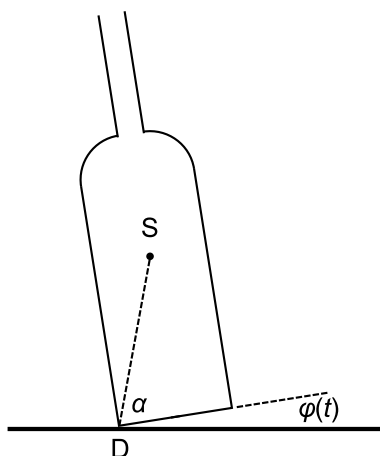


Abbildung 1: Links: Eine versehentlich angestossene Flasche wackelt. Sei $\varphi(t)$ der momentane Kippwinkel um die Drehachse D und α der Winkel Flaschenboden-Drehachse-Schwerpunkt S . Die Bewegung laufe in einer vertikalen Ebene ab und sei links/rechts symmetrisch. Oben: Ein ‘Lego-Wackler’ schwingt kontrollierter und kann durch Aufstecken weiterer Bausteine verändert werden.

2 Theorie

Die Bewegung der Flasche um die momentane, feste Drehachse, siehe Abbildung 1, gehorcht der Differentialgleichung “Trägheitsmoment J mal Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ ist gleich dem Drehmoment M ”, siehe Gleichung (1). Das Drehmoment ist das Gewicht mg der Flasche multipliziert mit dem Hebelarm $\overline{DS} \cos(\alpha + \varphi)$, d.h. mit dem horizontalen Abstand von D und S , siehe Gleichung (2).

$$M = J\ddot{\varphi} \quad (1)$$

$$-mg\overline{DS} \cos(\alpha + \varphi) = J\ddot{\varphi} \quad (2)$$

Gleichung (2) ist äquivalent zu jener des mathematischen Pendels. Sie wird in (3) aber anders als üblich um den Winkel $\varphi = 0$ resp. $\alpha \neq 0$ linearisiert. Die Lösung $\varphi(t)$ der vereinfachten Bewegungsgleichung (4) für eine Halbschwingung ist ein Cosinus hyperbolicus mit zwei freien Parametern (a und t_0), siehe Gleichung (5).

$$J\ddot{\varphi} \approx -mg\overline{DS} \cdot (\cos \alpha - \varphi \sin \alpha) \tag{3}$$

$$\tau^2 \cdot \ddot{\varphi} - \varphi + b = 0 \quad \text{mit} \quad \tau^2 = \frac{J}{mg\overline{DS} \sin \alpha} \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{\tan \alpha} \tag{4}$$

$$\varphi(t) = b - a \cosh\left(\frac{t - t_0}{\tau}\right) \tag{5}$$

3 Experiment

Ich habe verschiedene Wackler aus Lego oder grösseren Duplo gebaut und die Bewegung videographiert. Die Filme wurden mit Logger Pro analysiert und so der Winkel $\varphi(t)$ extrahiert. Dann habe ich Gleichung (5) mit ProFit an die Messpunkte angepasst und für eine Halbschwingung eine gute Übereinstimmung erhalten. Die cosh-Funktion passt besser als ein Cosinus oder eine Parabel.

Um viele Halbschwingungen gemeinsam zu beschreiben, habe ich Gleichung (5) durch die ersten zwei Nullstellen t_1 und t_2 der Bewegung parametrisiert statt durch a und $t_0 = (t_1 + t_2)/2$, siehe Gleichung (6). So lassen sich die Funktionen für die einzelnen Halbschwingungen leicht aneinanderfügen.

$$\varphi(t, t_1, t_2) = \pm b \cdot \left(1 - \frac{\cosh(t/\tau - (t_1 + t_2)/(2\tau))}{\cosh((t_2 - t_1)/(2\tau))}\right) \quad \text{für} \quad t_1 \leq t \leq t_2 \tag{6}$$

$$\hat{\varphi} = b \cdot \left(1 - \frac{1}{\cosh\left(\frac{\Delta t}{2\tau}\right)}\right) \quad \text{mit} \quad \Delta t = t_2 - t_1 \tag{7}$$

Aus Gleichung (6) kann die Amplitude $\hat{\varphi}$ berechnet werden, siehe Gleichung (7). In Analogie zum hüpfenden Ball habe ich die Amplitude von Halbschwingung zu Halbschwingung um denselben Faktor $\delta < 1$ abnehmen lassen: $\hat{\varphi}_2 = \delta \cdot \hat{\varphi}_1$, etc. Aus der neuen Amplitude lässt sich die Dauer Δt der nächsten Halbschwingung und damit die nächste Nullstelle t_3 berechnen, etc. In dieser Weise lässt sich die ganze Bewegung über mehrere Halbschwingungen mit fünf Parametern ($\alpha, \tau, t_1, t_2, \delta$) beschreiben, siehe Abbildung 2.

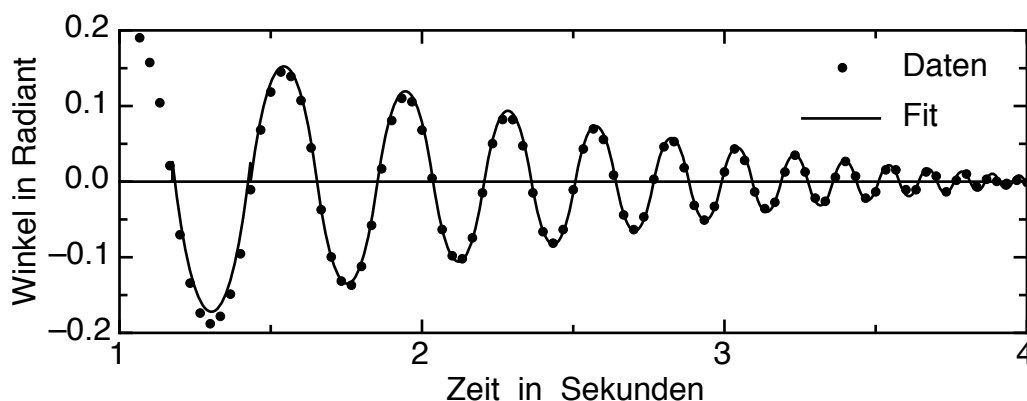


Abbildung 2: Bewegung $\varphi(t)$ eines ‘Lego-Wacklers’ mit Fitfunktion. Die Schwingung wurde mit einem iPhone gefilmt und mit Logger Pro digitalisiert. Der Fit besteht aus zusammengefügteten cosh-Funktionen mit total fünf Fitparametern. Die Wackelfrequenz steigt mit abnehmender Amplitude.

Für kleine Amplituden ($\hat{\varphi} \rightarrow 0$) ist $\Delta t \propto \sqrt{\hat{\varphi}}$, d.h. die momentane Frequenz $f = 1/\Delta t$ variiert umgekehrt proportional zur Wurzel aus der Amplitude. Die Schwingung ist im doppelten Sinn nicht periodisch.

Details und Referenzen findet man unter: The Physics Teacher 51 (4), 231 (2013)

8. Okt. 2014, Lie.

Buchbesprechung

Samuel Lang, Kantonsschule Enge Zürich, las@ken.ch

Philosophie der Physik. Eine Einführung von Norman Sieroka

Im Herbst diesen Jahres erschien in der Reihe „Beck Wissen“ eine lesenswerte Einführung in die „Philosophie der Physik“ von Norman Sieroka. Das schmale Bändchen nimmt sich dem spannenden Verhältnis von Philosophie und Physik an – oder besser: es geht den philosophischen Aspekten der Physik nach und dies in einer erstaunlich klugen Aufteilung in einen historischen sowie einen systematischen Teil.

So wird in einem ersten Schritt der Bogen von den Anfängen physikalischen Erklärens in der Antike, über die Physik der Frühen Neuzeit, bis hin zu aktuellen Entwicklungen der Stringtheorie im 20. Jahrhundert aufgespannt. Sieroka beschreibt etwa wie bei den Vorsokratikern erstmals eine Art naturwissenschaftlicher Diskurs entstand, aus dem viele, der auch heute noch wichtigen, physikalischen Erklärungsstrategien hervorgegangen sind; wie die Entwicklung der Physik im 16./17. Jahrhundert entscheidende Impulse durch ihre zunehmende Mathematisierung gewann; und wie schliesslich die moderne Physik geprägt ist durch einen Verlust der Anschaulichkeit. Sieroka wechselt gekonnt den Blick zwischen Detail und Ganzem und beschreibt etwa über wenige Absätze hinweg akribisch Leibniz' Auseinandersetzung mit der Physik Descartes, ohne je die grösseren Entwicklungslinien aus den Augen zu verlieren. Nebst einer wissenschaftshistorischen Perspektive ist für Sieroka dabei immer bereits auch die Dynamik der Erklärungs- und Beschreibungsmerkmale von Interesse. Entsprechend präsentiert sich der zweite Teil des Buches „Erkenntnistheoretische Motive und ihr Wandel“ als logische Fortsetzung des ersten – die aufgedeckten Motive werden hier vertieft, systematisch dargestellt und diskutiert. Sieroka wählt dabei geschickt ein begriffliches Instrumentarium, welches ihm erlaubt, interessante Verbindungslinien zwischen den historischen Positionen aufzudecken und zugleich die subtilen Unterschiede treffend zu benennen. So finde etwa das Symmetrieprinzip sowohl bei Platon als auch in der Quantenchromodynamik Anwendung, fungiere jedoch im ersten Fall als *mereologische*, im zweiten hingegen als *explanatorische* Erklärungsstrategie.

Es kann nicht erstaunen, dass der Verfasser selbst von Haus aus promovierter Physiker wie Philosoph ist. Aufgrund seiner detaillierten Fachkenntnisse vermag er seinen komplexen Gegenstand mit spielerischer Leichtigkeit darzustellen, in einer mühelosen, flüssigen und doch immer präzisen Sprache.

Eine grosse Qualität des Buches ist sicherlich, dass es sich um eine allgemeinverständliche Einführung handelt, welche nicht exklusiv für ein Expertenpublikum verfasst wurde. Sie bietet einen spannenden und klugen Überblick sowie viele wertvolle Denkanstösse zur philosophischen Dimension des Faches Physik, welche vielleicht allzu oft im Unterrichtsalltag zu kurz kommt.

Norman Sieroka, *Philosophie der Physik. Eine Einführung* (C.H. Beck Wissen 2803), Beck: München 2014. 127 S., Fr. 14.90.

SYPT und IYPT 2015

Samuel Byland, Pro IYPT-CH, samuel.byland@sypt.ch

1 Swiss & International Young Physicists' Tournament 2015

Bereits zum achten Mal wird in diesem Jahr der Physikwettbewerb *Swiss Young Physicists' Tournament* (kurz SYPT, [1]) in der Art des internationalen Vorbildes (IYPT, [2]) durchgeführt. Am **27. und 28. März** werden an der **Universität Zürich** Teams mit Schülerinnen und Schülern von Schweizer Gymnasien gegeneinander antreten und ihre Lösungen zu den 17 Problemstellungen präsentieren und in wissenschaftlichen Streitgesprächen diskutieren. Daneben soll bei Laborbesichtigungen und gemeinsamen Mahlzeiten auch der nicht-kompetitive Austausch nicht zu kurz kommen.

Lehrpersonen und SchülerInnen von Schulen, welche nicht aktiv beim Wettbewerb involviert sind, können das SYPT selbstverständlich als Gäste besuchen. Vor allem beim Finale der drei besten Teams würden wir uns über ein zahlreiches Publikum freuen. Informationen zum SYPT finden sich auf der **Website** (www.sypt.ch).

Aus den besten Teilnehmerinnen und Teilnehmern des SYPT wird das Schweizer Team für das *International Young Physicists' Tournament* (IYPT) ausgewählt, welches vom 27. Juni bis 4. Juli 2015 in Nakhonratchasima (Thailand) ausgetragen wird. In den letzten Jahren konnte sich unser Team jeweils unter den Medaillengewinnern einreihen und schaffte 2013 sogar erstmals den Sprung ins Finale der besten drei Teams.

2 Maturitätsarbeiten und weitere Wettbewerbe

Die Problemstellungen beim IYPT sind bewusst offen formuliert, damit Schülerinnen und Schüler, die sich damit auseinandersetzen, mit vielen unterschiedliche Aspekten konfrontiert werden. Dies führt auch dazu, dass beim Wettbewerb häufig neue spannende Fragen aufgeworfen werden, die sehr gut z.B. im Rahmen einer Maturitätsarbeit oder als Projekt bei anderen Wettbewerben wie *Schweizer Jugend forscht* ([3]) weiterverfolgt werden können. In den letzten Jahren sind so diverse hervorragende Arbeiten entstanden, die sowohl national als auch international ausgezeichnet wurden.

Patrick Meister stellt im **folgenden Artikel** seine Arbeit über *Honey Coils* vor. Er war 2012 und 2013 Mitglied des erfolgreichen Schweizer Teams beim IYPT und bearbeitete eines der Probleme für das IYPT 2013 im Rahmen seiner Maturitätsarbeit. Aktuell nimmt er damit am nationalen Wettbewerb von Schweizer Jugend forscht teil und studiert Physik an der ETH Zürich.

Links

- [1] Swiss Young Physicists' Tournament (www.sypt.ch), Turnierbroschüre
- [2] International Young Physicists' Tournament (iypt.org), aktuelle Probleme
- [3] Schweizer Jugend forscht (sjf.ch)

Honey Coiling - A Study on the Gravitational Regime of Liquid Rope Coiling

Patrick Meister, MNG Rämibühl, patrickmeister@ymail.com

1 Introduction

We report on the coiling motion a falling stream of viscous liquid starts to exhibit after the impact on a rigid surface. This phenomenon is often observed in everyday life when pouring shampoo onto one's palm or dripping honey on a toast. The problem was formulated as a task of the *International Young Physicists' Tournament 2013* (brief IYPT) as follows:

“A thin, downward flow of viscous liquid, such as honey, often turns itself into circular coils. Study and explain this phenomenon.”

Experimentally it is easily found that over a broad range of frequencies there appear to be four regimes of coiling. In literature there has already been a great study on the geometry of the viscous jet [1] and on all four regimes, wherefore proportionalities for the characteristic coiling frequencies have been obtained using dimensional analysis [2, 3].

In this article we report our findings on the initial process the stream undergoes in order to start the coiling motion. Furthermore we present an analytical derivation of the frequency relation of the gravitational regime and its physical interpretation. Therefore we introduce the idea of bending torque for viscous liquid jets.

2 Theory

2.1 Regimes of Coiling

A falling stream of viscous liquid that emerges from a nozzle at a fixed height is being accelerated due to gravity as it falls towards the ground. Shortly after the impact the liquid jet turns itself into a stable circular motion that results in building up a coil of viscous liquid which eventually either collapses or gradually flows outwards. In literature the coiling section is named the *coil* and the falling stream of fluid above it is called the *tail*.

It is found that for different release heights there are four distinctively different types of coils that form, which divide the phenomenon into four regimes of coiling. These regimes are characterised by the forces which are dominant in the bending process of the liquid beam. Since they mainly depend on the net acceleration on each segment of the tail right before it is bent into the coil we can discuss the regimes by looking at the geometry of the tail.

As we know from the continuity equation of liquid flow, if the volume flow rate is kept constant as the liquid jet is being accelerated and thus increases its velocity, its cross-sectional area has to decrease. Therefore we can tell by the change in diameter of the tail how high the net acceleration relative to gravity is. It is relatively easy to imagine, that for rather small release heights the liquid jet undergoes little acceleration and thus its cross-section does not decrease by a lot since the tail is still moving at rather low velocities. Therefore viscous forces are dominant in this regime relative to gravitational and

inertial forces ($F_V \gg F_G, F_I$). In literature this regime is called the *viscous* regime. As we increase the height the beam can accelerate more and becomes thinner. In this regime the filament undergoes the greatest change in velocity due to gravity. Therefore upon impact it is mainly the gravitational pull acting on the segment that has to overcome the viscous forces to bend the filament ($F_G \approx F_V \gg F_I$). Hence it is called the *gravitational* regime. Finally, for relatively large release heights the filament reaches such high velocities that viscous friction forces cancel out the gravitational pull and the net acceleration goes towards zero. In this regime we mainly look at the momentum of the segment being bent into the coil and thus inertial forces govern the process ($F_I \approx F_V \approx F_G$). Therefore it is called the *inertial* regime. Furthermore, it is found that at the transition between the gravitational and inertial regime there seems to be an additional regime with chaotic behavior. Thus it is called the *inertia-gravitational* regime.

In this article we will mainly focus on the gravitational regime.

2.2 General Relation for Coiling Motion

In order to make a general prediction for the coiling frequency we will first look at the circular motion of the coil. Generally, the angular frequency of any circular motion is the tangential velocity divided by the trajectory's radius as denoted in (1). For this phenomenon we can say that the velocity of the circular motion is the velocity at which the tail is laid down on the surface, which has to be the same as just above the coil and can therefore be found using the continuity equation as in (2).

$$\omega = \frac{v}{R} \quad (1)$$

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r^2} \quad (2)$$

Where ω is the angular velocity, v the tangential velocity, R the radius of the coil, Q the flow rate and r the radius of the cross-section of the tail. The coiling frequency f is related to the angular velocity by $2\pi f = \omega$. By combining (1) and (2) the following general relation for the coiling motion can be derived.

$$f \propto \frac{Q}{r^2 R} \quad (3)$$

As we will later see in our experimental results this relation holds for any release height and thus for every regime. However, when investigating the coil's radius' dependency on the release height, one finds it to be very nonlinear. In the viscous regime it increases strongly with height and then over the gravitational and inertial regimes it decreases asymptotically. In order to make specific predictions for the coiling frequency of the gravitational regime we have to study the bending process of the filament in greater detail.

2.3 The Bending Torque

When a solid rod is bent over a certain curvature, a torque has to be applied on both ends. This bending torque M can be written as

$$M = \frac{1}{R} Y I, \quad (4)$$

where R denotes the radius of curvature, Y Young's modulus or elastic modulus and I is the moment of inertia of the cross-sectional area of the rod.

In our case the radius of curvature over which the filament is bent is obviously the radius of the coil itself and the second moment of inertia of the area is the one of a circle of radius r of the tail just above the coil.

$$I = \frac{\pi}{4} r^4 \quad (5)$$

However, generally fluids do not have Young's moduli. Nevertheless, when a filament of sufficiently viscous liquid is deformed by stresses, viscoelastic properties of the fluid have to be considered. The viscoelasticity Y_V of such a liquid is proportional to the shear rate the liquid undergoes and of course the dynamic viscosity η .

In the process of bending the filament into the coil the rate of shearing can be described by the change of velocity over the radial distance by the following relation.

$$Y_V \propto \eta \frac{dv}{dR} = \eta \omega = \eta \frac{v}{R} \quad (6)$$

If we now put (5) and (6) into the general equation for the bending torque we can derive a relation for the bending torque of viscous liquids with circular cross-sections.

$$M_V \propto \frac{\pi \eta v r^4}{4 R^2} \quad (7)$$

2.4 The Gravitational Regime

In the gravitational regime the force of gravity is dominant in the process of bending. Therefore, in our theoretical approach we regard the force of gravity, that is acting on the section of the tail that is bent into the coil, to be the driving force that creates the bending torque.

We can say that the power needed for bending is provided by the gravitational pull on it. Including power losses due to viscous friction and heating a proportionality between the potential power stored in the segment by gravity P_G and the power used for bending P_B is formulated.

$$P_G \propto P_B \quad (8)$$

The relation in (8) can be represented using the bending torque and the force of gravity in the following way.

$$F_G \cdot v \propto M \cdot \omega \quad (9)$$

Here, v is the velocity the segment travels at and ω is the angular velocity of the coiling motion the tail is bent into. The length of the segment that is bent has to be the same as the circumference of the coil, as illustrated in Fig.1. We can thereby determine its mass and by using the earlier derived relation (7) for the bending torque of viscous liquids we can obtain the following characteristic relation for the radius R of the coil in the gravitational regime.

$$R \propto \left(\frac{\nu Q}{g} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (10)$$

Here $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ is the kinematic viscosity of the liquid. Now we can use this relation for the radius of the coil to derive the characteristic relation of the coiling frequency f_G in the gravitational regime by inserting it into the general relation for the coiling motion (3). Thereby, we arrive at this final expression.

$$f_G \propto \left(\frac{g Q^3}{\nu r^8} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (11)$$

The characteristic coiling frequency of the other regimes can be found analogously by determining the dependency of the radius of the coil in each regime using the bending torque relation for viscous liquids.

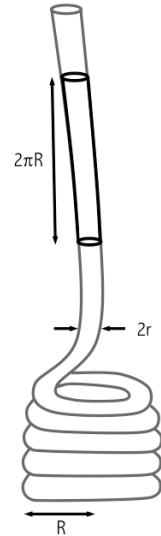


Figure 1: Schematic of tail above coil.

3 Experimental Setup

The experiments were conducted using silicone oil of several viscosities, ranging from $5 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ to $100 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, since it is a newtonian fluid. The liquid was put into an injection upon which weights could be loaded to vary the flowrate out of the injection as can be seen in Fig.2. The falling height could be varied by changing the level of the container that was put onto a scale that was used to measure the flowrate. This was done taking the additional momentum of the tail into account. The phenomenon was filmed with a high-speed camera at up to 500 fps and then analyzed using the video analysis software *Logger Pro*.

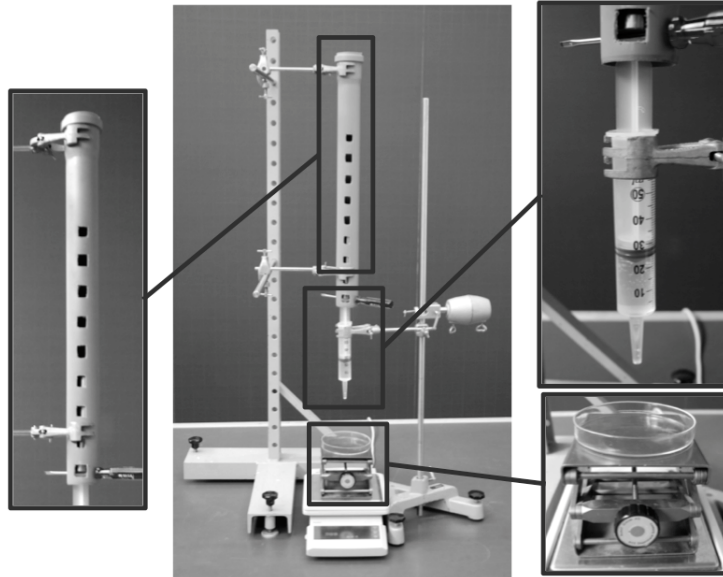


Figure 2: Experimental setup

4 Results and Discussion

In Fig.3 the initial process is split up into the main steps. As the beam falls towards the plate it accelerates (a). When it reaches the surface, it decelerates rapidly, however, due to its relatively high viscosity the fluid can not flow outwards and thus pressure is built up (b). As more liquid flows down that cannot flow away a pressure stasis within the beam is built up. Eventually the liquid filament undergoes self-buckling and bends outwards (c). The stream then falls outwards and the filament is layed onto the surface (d), until it reaches a point where viscous stresses inside the filament pull it backwards and it folds in on itself (e). The tail then starts an oscillatory motion and eventually turns itself into coiling as the circular motion can be regarded to be the optimal distribution of stresses.

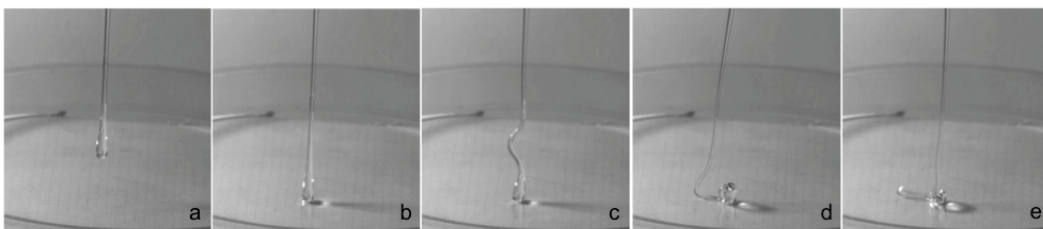


Figure 3: Initial process of liquid rope coiling

With the data obtained from our experiments we could verify our theoretical predictions of the coiling frequencies.

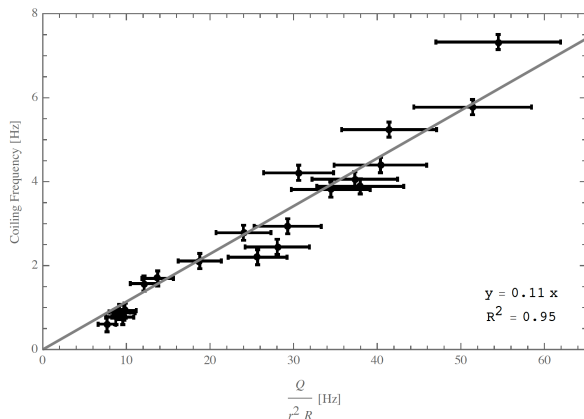


Figure 4: General coiling frequency relation.

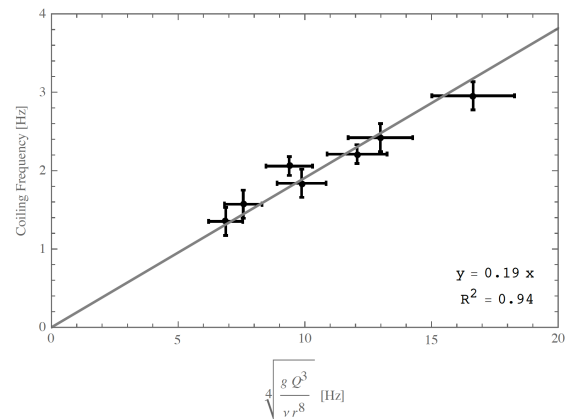


Figure 5: Coiling in gravitational regime.

As we can see in Fig.4 the linear relation that was predicted in (3) for the general coiling motion could be found experimentally. The errors arise mainly from the video analysis, where for very small scales the diameter of the tail could not be measured very accurately. Furthermore, the coiling frequency can be slightly perturbed as well, which is due to geometrical imperfections and the liquid below the coil flowing away. In Fig.5 the relation in (11) could be verified as well, where the errors arise for the same reason.

5 Conclusion

We have been able to explain the phenomenon's initial process that leads to the coiling motion. Furthermore, we have provided a way to derive the characteristic coiling frequency relations, which has so far only been possible using dimensional analysis.

6 Acknowledgement

I would like to address my thanks to Mr Daniel Keller and Mr Samuel Byland, who were my physics teachers in grammar school and also our supervisors during the IYPT 2013 in Taiwan. Having had the chance to take part in the IYPT has given me the possibility to do research on several open-ended physics problems on my own and thereby given me the chance to train my physical intuition already at a very early stage of my education.

References

- [1] Neil Ribe. *Coiling of viscous jets*. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering.
- [2] N.M. Ribe, Mehdi Habibi, and Daniel Bonn. *The cook's instability: Coiling of a thread of honey*. (2007)
- [3] N.M. Ribe, H.E. Huppert, Mehdi Habibi, and Daniel Bonn. *Multiple coexisting states of liquid rope coiling*. (2005)

Zwei neue Unterrichtseinheiten des MINT-Lernzentrums zum Orbitalmodell und zur Quantenphysik

Juraj Lipscher, Herbert Rubin & Ralph Schumacher

MINT-Lernzentrum der ETH Zürich

Ab Herbst 2014 bzw. Frühjahr 2015 werden am MINT-Lernzentrum der ETH Zürich Fortbildungen zu zwei neuen aufeinander aufbauenden Unterrichtseinheiten für den gymnasialen Chemie- und Physikunterricht angeboten. Die Unterrichtseinheit „Das Orbitalmodell und die moderne Quantentheorie“ wurde von Dr. Juraj Lipscher in Zusammenarbeit mit dem MINT-Team für den Chemieunterricht entwickelt. Die Unterrichtseinheit zur Quantenphysik: „Vom Doppelspalt zum Quantencomputer“, hat Herbert Rubin zusammen mit dem MINT-Team erstellt. Beide Unterrichtseinheiten sind sehr gut miteinander kombinierbar, weil in der Einheit zum Orbitalmodell viele Grundlagen vorbereitet werden, auf die in der Einheit zur Quantenphysik vertiefend Bezug genommen wird. Beide Unterrichtseinheiten wurden mit der Unterstützung und in Zusammenarbeit mit dem Nationalen Forschungsschwerpunkt **QSIT** (Quantum Science and Technology) entwickelt, an dem die ETH Zürich als leitende Institution beteiligt ist.

Das Orbitalmodell und die moderne Quantentheorie

Die Auswahl des „richtigen“ Atommodells für den gymnasialen Chemieunterricht ist ein intensiv diskutiertes Thema. Die einfacher verständlichen Atommodelle sind oft nicht korrekt und ermöglichen keine ursächliche Erklärung der nachfolgenden Unterrichtsinhalte wie zum Beispiel der Schalenstruktur der Elektronenhülle. Bei den abstrakteren und komplexeren Modellen befürchten hingegen viele Chemie-Lehrpersonen, dass sie die kognitiven Möglichkeiten unserer Schülerinnen und Schüler übersteigen könnten – insbesondere, weil es dazu bisher wenig ausgearbeitete Unterrichtsmaterialien auf gymnasialer Stufe gibt. Das MINT-Lernzentrum der ETH Zürich stellt daher ein erprobtes und auf neuesten Erkenntnissen der Lernforschung beruhendes Angebot vor, welches es ermöglicht, auf der Grundlage des Orbitalmodells ein gültiges Atommodell in stufengerechter Weise im Gymnasium zu unterrichten.

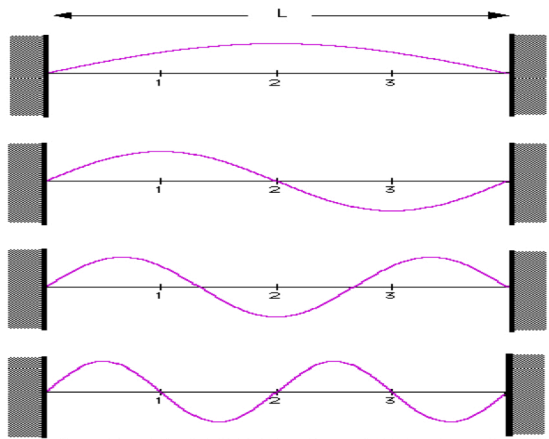
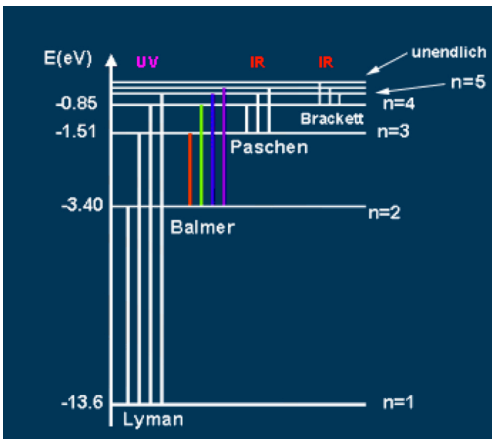
Diese Unterrichtseinheit bietet einen nicht mathematischen Zugang zu diesem faszinierenden, aber auch als abstrakt und anspruchsvoll geltendem Gebiet. Will man den Aufbau der Elektronenhülle, das Periodensystem der Elemente und nicht zuletzt chemische Bindungen im Grundlagenfach Chemie ursächlich erklären, so muss man dem Orbitalmodell Platz einräumen. Sorgfältige didaktische Bearbeitung, lernwirksame Unterrichtsmethoden, ausgesuchte und teilweise auch neu entwickelte Experimente machen es der Lehrperson möglich, diesen Lerninhalt stufengerecht und mit Erfolg zu behandeln.

Die Unterrichtseinheit wird in zwei verschiedenen Versionen angeboten: Eine einfachere Version für das Grundlagenfach Chemie (10. Schuljahr Gymnasium) sowie eine anspruchsvollere und erweiterte Version für das Schwerpunktfach Chemie / Biologie und für das Ergänzungsfach Chemie (12. bis 13. Schuljahr).

Die Grundlagenfachversion umfasst die folgenden Sequenzen: (1) Was ist Licht? Welle-Teilchen-Dualismus, (2) Schalenstruktur der Elektronenhülle, Bohr'sches Atommodell, (3) Unzulänglichkeiten des Bohr'schen Atommodells, Unschärfebeziehung, (4) Elektron als Welle, Welle-Teilchen-Dualismus, diskretes Verhalten stehender Wellen, (5) Orbitalbegriff, Born'sche Wahrscheinlich-

keitsinterpretation der Wellengleichung, (6) Besetzung der Orbitale mit Elektronen, Energieprinzip, Pauli-Prinzip, Hund'sche Regel, Elektronenkonfiguration der Elemente.

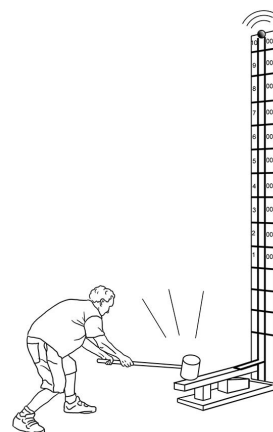
Die Schwerpunktfachversion enthält zusätzlich die folgenden Sequenzen: (7) Licht und Materie: Entstehung des Lichts, Flammenfarben, Emissionsspektroskopie, Leuchterscheinungen mit Anwendungen: Fluoreszenz, Phosphoreszenz, Chemilumineszenz und Biolumineszenz, (8) Philosophische Aussagen der Quantenmechanik: Doppelspaltversuch mit einzelnen Teilchen, Schrödinger'sche Katze, Natur der Wirklichkeit.

	
<p>Die diskreten Elektronenzustände in Atomen und Molekülen lassen sich erklären, wenn man Elektronen als Wellen auffasst.</p>	<p>Damit können sowohl die Struktur der Elektronenhülle als auch die Eigenschaften von Atomen ursächlich erklärt werden – wie beispielsweise die Absorption oder Emission von Licht.</p>

Vom Doppelspalt zum Quantencomputer

Das Ziel dieser Unterrichtseinheit besteht darin, den Schülerinnen und Schülern im Physikunterricht ausgewählte Konzepte der Quantenphysik so zu vermitteln, dass sie in der Lage sind, die Grundprinzipien von Quantencomputern bzw. der Quanteninformatik zu verstehen. Im Mittelpunkt der Unterrichtseinheit stehen neben ausgewählten Konzepten und Theorien der Quantenphysik auch Inhalte und Experimente, die im Rahmen von QSIT entwickelt wurden und den Lernenden einen Einblick in aktuelle Forschungen bieten. Die Unterrichtseinheit besteht aus vier Modulen mit jeweils drei Lektionen. Die Module befassen sich mit folgenden Inhalten und können in dieser Reihenfolge unterrichtet werden:

Modul 1: Die Eigenschaften des Lichts. In diesem geht es zunächst um die Frage, wie bereits bekannte Phänomene wie die Reflexion und die Brechung des Lichtes erklärt werden können. Dazu werden zwei konkurrierende Erklärungsmodelle, die Teilchenvorstellung von Newton und die Wellentheorie von Huygens diskutiert. Dabei zeigen Beugungs- und Interferenzphänomene sowie der Fotoelektrische Effekt die Problematik der beiden Erklärungsmodelle des Lichtes auf. Bei der Gestaltung von Aufträgen und Arbeitsblättern kommen besonders lernwirksame Unterrichtsmethoden zum Einsatz, um sicherzustellen, dass anspruchsvolle Inhalte wie der fotoelektrische Effekt und seine Bedeutung für die Theorie des Lichts von den Lernenden wirklich verstanden werden. Dazu wird dieser Effekt unter anderem mit einer „Hau den Lukas“-Analogie veranschaulicht (siehe die Abbildung rechts).



Das Modul 1 besteht aus drei Lektionen:

(1) Reflexion und Brechung; (2) Interferenzerscheinungen; (3) Fotoelektrischer Effekt.

Modul 2: Die Eigenschaften der Materie. In diesem Modul geht um die Frage, aufgrund von welchen Beobachtungen welche Rückschlüsse auf die Struktur der Atome gezogen werden können. Die Unterrichtseinträge und Arbeitsaufträge sind daher so gestaltet, dass die Lernenden konstruierend mitvollziehen können, welche Experimente Aufschluss über welche Eigenschaften von Atomen geben. In Analogie zur klassischen Mechanik wird gezeigt, wie die quantenhafte Energieaufnahme und -abgabe der Atome durch ein Wellenmodell der Elektronen verständlich wird.

Das Modul 2 besteht aus den drei Lektionen:

(4) Atommodelle; (5) Spektrallinien; (6) Die Wellennatur der Materie

Modul 3: Die Eigenschaften von Quantenobjekten. Haben die beiden vorangehenden Module die Schwierigkeiten beleuchtet, zu denen die klassischen Teilchen- und Wellenvorstellungen bei der Beschreibung der atomaren Vorgänge führen, werden in diesem Modul neue Denkkonzepte vorgestellt, welche auch zu neuartigen Eigenschaften der Quantenobjekte führen, die in unserer Alltagserfahrung keine Entsprechungen finden. Dabei wird ersichtlich, wie mit der Einführung der Wellenfunktion einerseits Paradoxien wie sie z. B. beim Doppelspaltversuch bei der Interferenz mit Einzelphotonen auftreten, beseitigt werden können, dafür aber neue Eigenschaften wie Unbestimmtheit, Superposition und Verschränkung in Kauf genommen werden müssen. Hierbei werden besonders der statistische Charakter der Vorhersagen der Quantentheorie sowie der Messprozess (Dekohärenz) und das Messproblem vertieft diskutiert.

Zu den Materialien gehören ebenfalls Beschreibungen und Filme eines Doppelspalt-Vorführ-experiments von QSIT, das sich besonders gut eignet, um den Quantencharakter des Lichtes zu zeigen und die punktweise Entstehung des Interferenzmusters zu demonstrieren.

Das Modul 3 besteht aus den Lektionen:

(7) Unbestimmtheit; (8) Superposition; (9) Verschränkung

Modul 4: Quanteninformatik. Die Informationseinheit der klassischen Informatik, das Bit, wird hier zunächst der entsprechenden Einheit der Quanteninformatik, dem Qbit gegenüber gestellt. Damit lässt sich bereits eine erste einfache Anwendung eines Quantencomputers, eines *echten* Zufalls-generators, veranschaulichen und diskutieren. Mehrere Qbits bilden ein Quantenregister. Analog zur klassischen Informatik bedient man sich hier zur Beschreibung des Verhaltens von Quantenre-gistern Schaltkreisen bestehend aus Quantengattern sowie einer formalen Beschreibungssprache, der Dirac Notation. Besprochen werden grundlegende Operationen auf Qbits wie die Hadamard-Transformation und das CNOT-Gatter und die damit mögliche Verschränkung von Qbits. Damit wird es den Schülerinnen und Schülern grundsätzlich bereits möglich, aktuelle Aufsätze zu lesen und zu verstehen, was man z. B. unter Quantenteleportation versteht und wie das BB84-Protokoll der Quantenkryptografie arbeitet. Schliesslich wird auch auf die Realisierungsmöglichkeiten von Quantencomputern und den Stand der Technik eingegangen. Mit einfachsten Mitteln und einer An-leitung von QSIT können die Schülerinnen und Schüler selbst Graphen herstellen.

Dieses Modul besteht aus den Lektionen:

(10) Vom klassischen Bit zum Qbit; (11) Einfache Schaltkreise; (12) Kryptographie und Teleporta-tion

Die Module sind so gestaltet, dass die Unterrichtseinheit sowohl als Ganzes als auch in Teilen im Physikunterricht eingesetzt werden kann.

Weitere Informationen zum MINT-Lernzentrum sowie zu unseren Fortbildungen finden Sie auf unseren Webseiten:

<http://www.educ.ethz.ch/mint>

Auf diesen Webseiten finden Sie auch zu jeder Unterrichtseinheit exemplarische Arbeitsaufträge.



Pythagoräische Zahlentripel und Kettenbrüche

René Fehlmann, Gymnasium Neufeld, rene.fehlmann@gymneufeld.ch

1 Einleitung

Bekanntlich schrieb Pierre de Fermat in seine Ausgabe der “Arithmetika” des Diophantos von Alexandria folgende Zeilen als Randbemerkung:

“Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere. Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.”

Das Beispiel illustriert sehr schön, dass zahlentheoretische Problemstellungen oft sehr einfach zu verstehen sind (sobald die sprachlichen Hürden überwunden wurden). Darunter befinden sich aber oftmals – nicht nur für die Lernenden in der Schule – zu hoch hängende Früchte. Umso mehr lohnt es sich, die Lernenden diejenigen Früchte ernten zu lassen, die einfach zu erreichen sind. Hier sollen deshalb ein paar Aspekte der diophantischen Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (1)$$

besprochen werden, die durchaus Platz in einem gymnasialen Unterricht finden.

2 Pythagoräische Zahlentripel

Lösungen der diophantischen Gleichung (1) nennt man *pythagoräische Zahlentripel*. Falls (x, y, z) solch eine Lösung ist, dann löst auch jedes Vielfache (nx, ny, nz) mit $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung (1). Es genügt deshalb diejenigen Lösungen zu suchen, die keinen gemeinsamen Teiler haben. Solche Lösungen heissen *primitive* pythagoräische Zahlentripel.

Bekannt ist die babylonische Tontafel mit dem Namen “Plimpton 322” aus der Zeit zwischen 1800 und 1650 v.u.Z., die an der Columbia University in New York aufbewahrt wird.

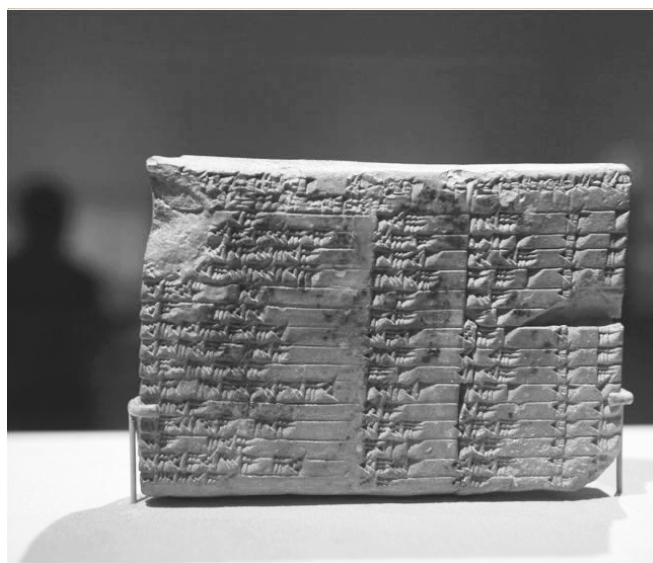


Abbildung 1: Plimpton 322. Ausgestellt an der Columbia University in New York.

Auf dieser Tafel findet man mehrere Zahlentripel. Darunter:

56	90	106
119	120	169
12 709	13 500	18 541

Anscheinend stand bereits den Babyloniern eine Methode zur Verfügung, um Lösungen der diophantischen Gleichung (1) zu finden. Nur ist nicht überliefert, wie sie auf diese Lösungen kamen.

2.1 Die Methode des Pythagoras

Es wird Pythagoras zugeschrieben, dass er sich Gleichung (1) widmete, indem er aufeinanderfolgende Quadratzahlen untersuchte. Vielleicht tatsächlich mittels folgender figurierter Zahlen:

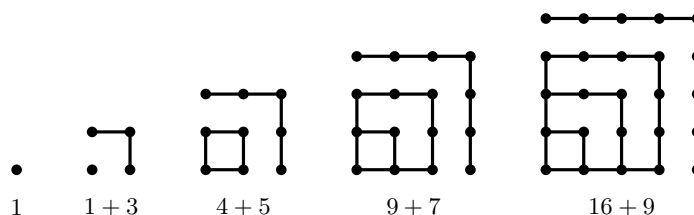


Abbildung 2: Figurierte Darstellung aufeinanderfolgender Quadratzahlen.

Man erkennt eine graphische Darstellung der binomischen Formel $(n + 1)^2 = n^2 + (2n + 1)$ und der Tatsache, dass sich zwei aufeinanderfolgende Quadratzahlen um eine ungerade Zahl unterscheiden. Wenn die Differenz zweier aufeinanderfolgender Quadratzahlen selbst eine Quadratzahl ist, hat man eine Lösung der diophantischen Gleichung (1) gefunden. Sei also $y^2 = (2k + 1)^2$ eine ungerade Quadratzahl, welche der Differenz der aufeinanderfolgenden Quadratzahlen x^2 und z^2 entspricht. Der Abbildung 2 entnimmt man dann, dass die Hälfte von $y^2 - 1$ gerade x ergibt. Das heisst

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{(2k + 1)^2 - 1}{2} = 2k(k + 1) \\
 y &= 2k + 1 \\
 z &= \frac{(2k + 1)^2 - 1}{2} + 1 = 2k(k + 1) + 1
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

ist ein pythagoräisches Zahlentripel. Offensichtlich ist solch ein Tripel sogar primitiv ($\text{ggT}(x, z) = 1$). Pythagoras entdeckte damit, dass es unendlich viele primitive pythagoräische Zahlentripel gibt.

Die ersten pythagoräischen Zahlentripel, die man nach dieser Methode erhält, sind:

k	x	y	z
1	4	3	5
2	12	5	13
3	24	7	25

Tabelle 1: Die ersten pythagoräischen Zahlentripel nach Pythagoras.

Die gerade Zahl (also x) jedes Tripels in (2) und z unterscheiden sich um 1. Das Zahlentripel (119, 120, 169) auf der babylonischen Tontafel wird mit der Methode des Pythagoras nicht entdeckt. Es existieren also noch mehr primitive pythagoräische Zahlentripel als diejenigen in (2). Allerdings sind alle pythagoräischen Tripel mit $z - x = 1$ in (2) enthalten.

2.2 Alle primitiven pythagoräischen Zahlentripel

Wie man alle pythagoräischen Zahlentripel findet, ist bereits bei Euklid im Buch X der Elemente beschrieben (siehe [1]). Eine etwas modernere Formulierung als bei Euklid lautet folgendermassen: Man wählt zwei

teilerfremde natürliche Zahlen $m > n$, so dass $m + n$ ungerade ist. Dann liefert

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2 \tag{3}$$

ein primitives pythagoräisches Zahlentripel und alle primitiven Zahlentripel sind (bis auf Vertauschung von x und y) von dieser Form.

Es gibt algebraische und geometrische Herleitungen von (3). Eine algebraische Herleitung sei hier kurz skizziert: Aus $x^2 + y^2 = z^2$ folgt $y^2 = z^2 - x^2 = (z - x)(z + x)$ und damit

$$\frac{y}{z - x} = \frac{z + x}{y} = t,$$

wobei t eine rationale Zahl ist. Eine Umformung liefert

$$\frac{y}{z} = t \left(1 - \frac{x}{z}\right) \quad \text{und} \quad 1 + \frac{x}{z} = \frac{y}{z}t$$

und damit erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} t \frac{x}{z} + \frac{y}{z} &= t \\ -\frac{x}{z} + t \frac{y}{z} &= 1 \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$\frac{x}{z} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \quad \text{und} \quad \frac{y}{z} = \frac{2t}{t^2 + 1}.$$

Mit $t = \frac{m}{n}$ ($\text{ggT}(m, n) = 1$) ist jedes ganzzahlige Vielfache von

$$x = (m^2 - n^2), \quad y = 2mn, \quad z = (m^2 + n^2)$$

ein pythagoräisches Zahlentripel. Wenn wir $m = k + 1$ und $n = k$ wählen, erhalten wir alle pythagoräischen Zahlentripel aus Abschnitt 2.1.

2.3 Näherungen für $\sqrt{2}$

Wir betrachten folgende speziellen Tripel:

m	n	x	y	z
2	1	3	4	5
5	2	21	20	29
12	5	119	120	169

Tabelle 2: Pythagoräische Zahlentripel mit $|x - y| = 1$.

Allen diesen Tripeln ist gemeinsam, dass $|x - y| = 1$ gilt. Diese Beispiele eignen sich gut, um Näherungen für $\sqrt{2}$ zu bestimmen. Man erhält aus diesen Zahlentripeln Folgen von oberen und unteren Schranken von $\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{5}{4} &< \sqrt{2} < \frac{5}{3} \\ \frac{29}{21} &< \sqrt{2} < \frac{29}{20} \\ \frac{169}{120} &< \sqrt{2} < \frac{169}{119} \end{aligned}$$

Wie kommt man aber auf die Werte für m und n in Tabelle 2, so dass $|x - y| = 1$ gilt?

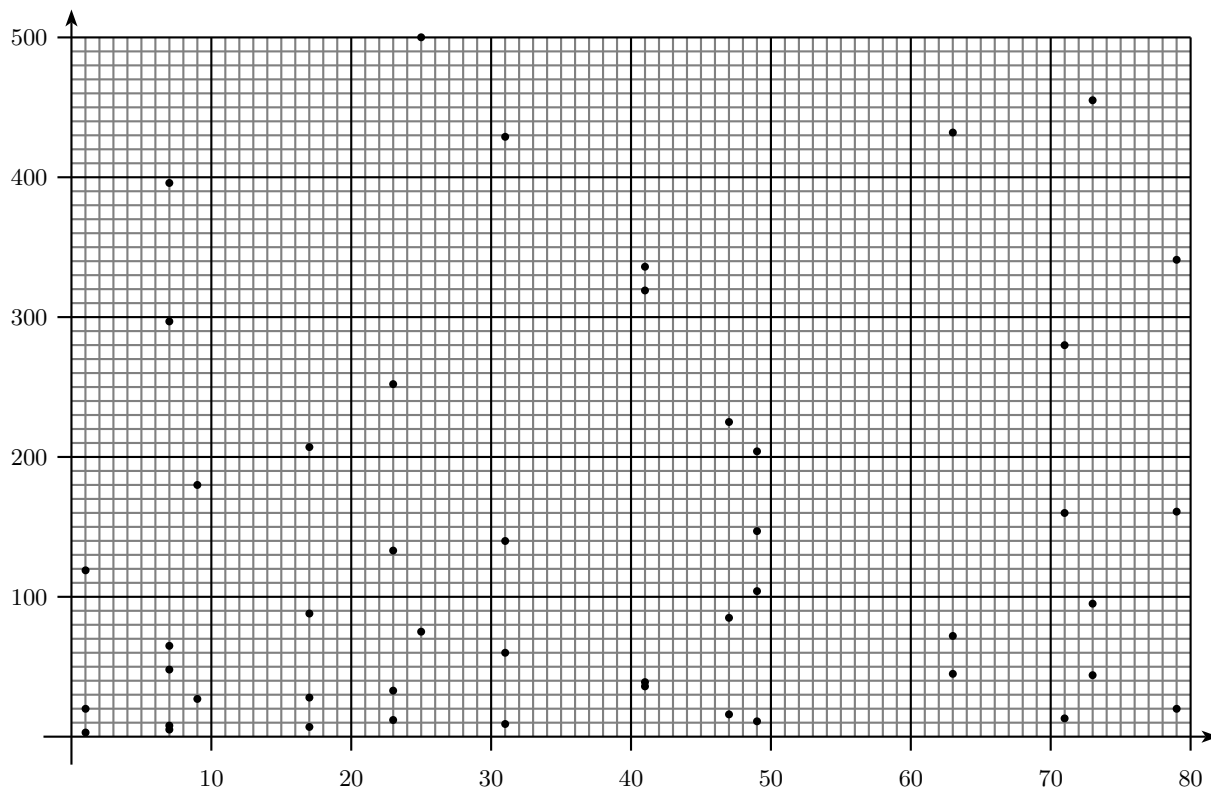


Abbildung 3: Pythagoräische Zahlentripel (x, y, z) geordnet nach $|x - y|$. Es wurde $\min(x, y)$ gegen $|x - y|$ aufgetragen.

3 Pythagoräische Zahlentripel und Pell'sche Gleichung

Wir haben im vorherigen Abschnitt Tripel betrachtet, für die $|x - y| = 1$ galt. Welche Werte kann nun die Differenz $x - y$ annehmen? Mit der Darstellung der primitiven pythagoräischen Tripel wie in (3) erhalten wir:

$$x - y = m^2 - n^2 - 2mn = (m - n)^2 - 2n^2.$$

Eine diophantische Gleichung der Form

$$u^2 - dv^2 = a$$

mit $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{N}$ nennt man eine Pell-artige Gleichung bzw. eine Pell'sche Gleichung, falls $a = 1$ ist. Es war Euler, der diese Gleichung wohl fälschlicherweise mit John Pell (1611 – 1685) in Verbindung brachte und als erster alle Lösungen dieser Gleichung mit Hilfe der Kettenbruchentwicklung von \sqrt{d} fand. Die Bedingung, $x - y = 1$ für pythagoräische Zahlentripel liefert die Pell'sche Gleichung

$$u^2 - 2v^2 = 1 \quad \text{mit} \quad u = m - n, \quad v = n.$$

Die Differenz $x - y$ kann nur dann $\pm a$ mit $a \in \mathbb{N}$ ergeben, wenn die Pell-artige Gleichung

$$u^2 - 2v^2 = \pm a \tag{4}$$

eine Lösung hat. In Abbildung 3 ist $\min(x, y)$ gegen $|x - y|$ für die pythagoräischen Zahlentripel dargestellt. Man erkennt, dass die Pell-artige Gleichung (4) z.B. keine Lösung für $a = 3$ oder $a = 5$ hat.

Zusammenfassend: Die Suche nach pythagoräischen Zahlentripeln (x, y, z) , für welche $x - y = 1$ gilt, führt uns also auf eine Pell'sche Gleichung, die mit Hilfe des Kettenbruchs

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

gelöst werden kann. Der Fall $x - y = -1$ ist allerdings gesondert zu behandeln.

Dieses Vorgehen, um systematisch alle pythagoräischen Tripel zu finden, für welche sich die beiden kleineren Zahlen nur um 1 unterscheiden, ist für den gymnasialen Unterricht kaum geeignet. Wir verfolgen hier deshalb ein alternatives Vorgehen, das für den Unterricht eher geeignet ist: Wenn $x = m^2 - n^2$ und $y = 2mn$ zu einem pythagoräischen Zahlentripel gehören, mit $|x - y| = 1$ dann sind also x und y "fast" gleich und damit ist

$$\frac{m^2 - n^2}{2mn} = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{n} - \frac{n}{m} \right)$$

"fast" gleich 1. Wir untersuchen deshalb die quadratische Gleichung

$$\frac{1}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right) = 1.$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind

$$s_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Hier interessiert uns nur die positive Lösung $s = 1 + \sqrt{2}$. Die Kettenbruchentwicklung dieser Zahl lautet:

$$s = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}}}$$

Es handelt sich hier um einen unendlichen Kettenbruch. Wir verwenden die übliche Notation für einen Kettenbruch mit Hilfe von eckigen Klammern:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$$

Man nennt die Zahl $C_i = [a_0; a_1, \dots, a_i]$ die i -te Konvergente des Kettenbruchs. Für unseren obigen Kettenbruch von s gilt z.B. $C_0 = 2$, $C_1 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, etc.

Die i -te Konvergente ist eine Näherung des Kettenbruchs, die sich auch als gekürzter Bruch $C_i = \frac{p_i}{q_i}$ darstellen lässt. Mit Hilfe eines Induktionsbeweises kann man zeigen, dass sich diese Zähler und Nenner rekursiv folgendermassen berechnen lassen:

$$p_i = a_i \cdot p_{i-1} + p_{i-2} \quad \text{bzw.} \quad q_i = a_i \cdot q_{i-1} + q_{i-2}; \quad p_{-2} = 0, \quad p_{-1} = 1, \quad q_{-2} = 1, \quad q_{-1} = 0.$$

Für die Lernenden ist es oft hilfreich, Zähler und Nenner der Konvergenten zu berechnen, indem sie folgende Tabelle nach den obigen Rekursionsregeln ausfüllen:

i	-2	-1	0	1	2	3	4	5
a_i			2	2	2	2	2	2
p_i	0	1	2	5	12	29	70	169
q_i	1	0	1	2	5	12	29	70

Für unseren unendlichen Kettenbruch von $1 + \sqrt{2}$ erhält man folgende Rekursionsformel für Zähler und Nenner der Konvergenten:

$$p_i = 2p_{i-1} + p_{i-2}; \quad p_0 = 2, p_1 = 5$$

und $q_i = p_{i-1}$ für $i > 0$ und $q_0 = 1$. Bei der Folge 0, 1, 2, 5, 12, 29, ... handelt es sich um die sogenannte Pell-Folge. Eine Analogie zur Fibonacci-Folge ist offensichtlich. Der Grenzwert zweier aufeinanderfolgender Pell-Zahlen ist

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{p_i}{p_{i-1}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{p_i}{q_i} = 1 + \sqrt{2}$$

also wieder die positive Lösung unserer quadratischen Gleichung. Diese Zahl ist auch unter dem Namen ‘‘silberner Schnitt’’ bekannt (siehe z.B. [4]). Entsprechend kann man auch eine explizite Darstellung der Pell-Zahlen angeben. Eine schöne Herleitung der Formel von Binet, die für den gymnasialen Unterricht durchaus geeignet ist, habe ich von Peter Gallin gelernt [2]. Diese Methode lässt sich analog auf die Pell-Zahlen und den silbernen Schnitt übertragen und man erhält

$$p_i = \frac{(1 + \sqrt{2})^{i+2} - (1 - \sqrt{2})^{i+2}}{2\sqrt{2}}.$$

Wir nutzen nun die Eigenschaften der Konvergenten eines Kettenbruchs. Die Konvergenten des Kettenbruchs einer irrationalen Zahl stellen ‘‘beste’’ Näherungen der Zahl dar und damit sind p_i und q_i die gesuchten Kandidaten für m und n , um daraus pythagoräische Zahlentripel zu berechnen, für welche $|x - y| = 1$ gilt. Wir können also unsere Tabelle 2 beliebig fortsetzen:

m	n	x	y	z
2	1	3	4	5
5	2	21	20	29
12	5	119	120	169
29	12	697	696	985
70	29	4059	4060	5741
169	70	23661	23660	33461
408	169	137903	137904	195025

Tabelle 3: Die ersten pythagoräischen Zahlentripel mit $|x - y| = 1$ erzeugt mit Hilfe der Pell-Zahlen.

Tatsächlich kommt man auf das gleiche Resultat wie in Tabelle 3, indem man die Pellsche bzw. Pell-artige Gleichung

$$u^2 - 2v^2 = \pm 1$$

löst.

4 Weitere Resultate

Zuletzt sei noch erwähnt, dass pythagoräische Zahlentripel, obwohl sie seit tausenden von Jahren bekannt sind, einige Schätze in sich bergen, die erst in jüngster Zeit entdeckt wurden. Eine etwas überraschende Beobachtung stammt von D.N. Lehmer (siehe [3] auf Seite 328):

Satz 4.1. *Es bezeichne $\alpha(n)$ die Anzahl primitiver pythagoräischer Tripel mit $c < n$. Dann gilt:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi\alpha(n)}{n} = 1$$

Es bezeichne $\beta(n)$ die Anzahl primitiver pythagoräischer Tripel mit $(a + b + c) < n$. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2\beta(n)}{n \log 2} = 1$$

Literatur

- [1] Euklid. Die Elemente. Buch X, § 28a.
- [2] Peter Gallin. Die Wiedergeburt der Fibonacci-Zahlen. *Bulletin des VSMP*, 105:20, 2007.
- [3] D.N. Lehmer. Asymptotic evaluation of certain totient sums. *Am. J. Math.*, 22:293–335, 1990.
- [4] Hans Walser. *DIN A4 in Raum und Zeit, Silbernes Rechteck – Goldenes Trapez – DIN-Quader*. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig, 2013.

Kügler, P., Windsteiger, W., Algorithmische Methoden, Band 2: Funktionen, Matrizen, Multivariate Polynome. [Mathematik kompakt], 160 Seiten, EUR 18.90, CHF ca 23.-, Birkhäuser/Springer, Basel, 2012, ISBN 978-3-7643-8515-6.

Die Autoren haben 2009 mit Band 1 gezeigt, wie eine Einführungsvorlesung Mathematik mit algorithmischen Fokus für das erste Studiensemester an der Hochschule aussehen kann. Nun liegt eine Fortsetzung für das zweite Semester vor. Sie umfasst Themen, die sonst unter Analysis, Linearer Algebra oder Algebra angeboten werden. Durchwegs dominiert ein konstruktivistischer Ansatz mit algorithmischer oder numerischer Ausrichtung und unterstützt durch den Einsatz von wissenschaftlicher Software (z.B. Mathematica[®] oder Matlab[®]). Die Hauptabschnitte behandeln:

- reellwertige Funktionen, Gleichungen, Ableitungen, Integrale.
- Matrizen über \mathbb{R} und Operationen der numerischen linearen Algebra auf Matrizen
- Multivariate Polynome, speziell den Buchbergeralgorithmus, Gröbnerbasen und polynomiale Gleichungssysteme.
- Funktionen $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, speziell nichtlineare Gleichungssysteme und nichtlineare Ausgleichsprobleme

Es folgen einige ausgewählte Kommentare, die den Charakter dieses Textes umreißen sollen.

Die klassischen Definitionen von Ableitung und Riemann-Integral folgen je auf 1 bis 2 Seiten. Dafür wird die Darstellung von Funktionen am Computer wichtig mit black-box-Funktionen oder als termdefinierte Funktionen. Es wird gezeigt, wie algorithmisches Differenzieren funktioniert, wie numerische Ableitungen gewonnen werden können. Beispiele zum numerischen Integrieren folgen.

Zu nichtlinearen Gleichungen werden numerische Näherungsmethoden bereitgestellt und ihre Eigenschaften diskutiert.

Analog ist das Vorgehen in den anderen Kapiteln: Zu Matrizen werden Operationen bereitgestellt, um Matrizen im Computer effizient darzustellen und lineare Gleichungssysteme und lineare Ausgleichsprobleme zeitgemäss zu handhaben: Matrixfaktorisierungen, LR-Zerlegung, QR-Zerlegung, Verfahren von Gauss, Seidel, Jacobi, Cholesky mögen als Stichworte genügen. Wichtig ist, dass zu jeder Methode eine Fehleranalyse gemacht und ein Algorithmus in Pseudocode notiert wird.

Das Kapitel über multivariate Polynome und algebraische Gleichungen zeichnet sich aus durch die Behandlung des Buchbergeralgorithmus zur Herstellung von Gröbnerbasen. Dieser Algorithmus wurde 1965 entwickelt. Er hat sich seither in zahlreichen wichtigen Anwendungen bewährt. Darum gehört er nun zum Rüstzeug in der Algorithmik und in vielen praktischen Anwendungen.

Mehrdimensionale Analysis rundet den Kurs ab. Sie beschränkt sich im wesentlichen auf den Begriff der Ableitung von Funktionen $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Die

Stichworte partielle Ableitung, Gradient, Jacobimatrix mögen genügen. Wieder werden Gleichungen und numerische Näherungsverfahren untersucht, nun für Systeme der Art $F(x) = 0$.

Die Vektoranalysis mit Vektorfeldern und den Integralsätzen fehlt.

Der Text wird ergänzt durch gut gewählte Übungsaufgaben, wobei sehr oft mit einem Mathematik- oder einem Numerikprogramm gearbeitet werden muss.

Der kompakte Schreibstil der Autoren erfordert Aufmerksamkeit und Konzentration. Kurz, wer aus diesem Text den grössten Nutzen ziehen will, muss hart arbeiten.

Im Literaturverzeichnis wird unter [13] F. Henrici genannt, das ist eine Verwechslung, denn der Autor des Textes heisst F. Tisseur.

Wenn Sie sich mit der Frage befassen, welche Anforderungen in den Anfangssemestern einer Hochschule an die Studierenden gestellt werden und wie sich der Mathematikunterricht im 21. Jahrhundert weiter entwickeln muss, dann finden Sie in diesem Text viele nützliche Wegweiser und Sie werden verstehen, warum Papier und Bleistift nicht genügen werden, um den Zugang zur lebendigen und zeitgenössischen Mathematik und ihren Anwendungen in bloss zwei Semestern zu erlangen.

H.R. Schneebeli, Wettingen

Wer hat's erklärt?

- Wie nachhaltiges Lernen gefördert werden kann

Armin P. Barth, Michael Brunisholz & Ralph Schumacher

Kennen Sie das auch aus eigener Erfahrung? Man führt gut strukturiert in ein neues Thema ein und bietet die besten Erklärungen auf, zu denen man fähig ist, und eine Woche später ist die Leistung der Schülerinnen und Schüler so bescheiden, als hätte die letzte Lektion nie stattgefunden. Gerade kürzlich war ich (A. Barth) Zeuge einer Lektion, in der eine Einführung in die Exponentialfunktion stattfand. Die Klasse war überaus kooperativ und konzentriert, und der Lehrer erklärte, was unter einer Exponentialfunktion zu verstehen ist, welche Eigenschaften sie besitzt und wie der Graph aussieht. Er besprach typische Beispiele und leistete sich überdies keinen einzigen mathematischen Fehler. Eine rundum gelungene Lektion, könnte man sagen. Als die Jugendlichen in der darauffolgenden Woche gebeten wurden, in einem klaren, prägnanten Satz zu charakterisieren, was es heisst, dass eine Grösse exponentiell von einer anderen Grösse abhängt, herrschte langes Schweigen. Dann einige zaghafte Versuche. Ein Schüler sagte, exponentiell bedeute, dass die Kurve immer steiler und steiler werde. Und auf die Bemerkung des Lehrers, das treffe auch auf die Funktion $f : x \mapsto x^2$ zu, entgegnete er, das sei ja schliesslich auch eine Exponentialfunktion.

Was lief schief? Warum wirkte eine scheinbar gut gemachte Lektion nicht nachhaltig? Guter Unterricht soll dazu führen, dass intelligentes Wissen entsteht, das sich auf Neues anwenden lässt (Stern, 2011). In diesem Artikel wird dargestellt, was der Lehrer versäumt hatte und was man besser machen kann, um intelligentes Wissen zu erreichen. Dabei greifen wir zurück auf einige gut belegte Erkenntnisse der Lehr- und Lernforschung: Es ist wichtig, das Vorwissen zu erfassen, die Lernenden kognitiv zu aktivieren, Aufträge zur Selbsterklärung und Metakognition zu geben, geistige Werkzeuge einzusetzen und die Methoden im Hinblick auf optimale Lernförderung zu variieren; in gewissen Fällen verspricht etwa das „Erfinden mit kontrastierenden Fällen“ oder der „Holistische Vergleich von Modellen“ einen besonders guten Lernerfolg.

Vorwissen erfassen

Um Unterricht lernwirksam gestalten zu können, müssen Lehrpersonen wissen, an welche Schülervorstellungen sich neue Informationen anknüpfen lassen und welche Vorstellungen zu Verständnisschwierigkeiten führen können. Es empfiehlt sich daher, ihr Verständnis zentraler Konzepte sowie das Vorliegen möglicher Fehlvorstellungen vor dem Unterricht zu einem grösseren Thema anhand spezifischer Vortests zu erfassen. Auf diese Weise lässt sich herausfinden, welche anschlussfähigen Schülervorstellungen sich im Unterricht zum Beispiel für Analogien nutzen lassen. Denn je besser es gelingt, neue Informationen an bestehendes Vorwissen anzuschliessen, umso grösser wird der Lernerfolg sein.

Angenommen, Lehrer Meier möchte, dass die Schülerinnen und Schüler als nächstes Grundlegendes zum Thema Exponentialfunktionen lernen. Er muss sich also fragen, welches Vorwissen dazu unbedingt vorhanden sein muss und welche Lernhürden und Misskonzepte das Lernen erschweren könnten.

Zum Beispiel müssen alle Definitionen und Gesetze im Zusammenhang mit Potenzen und Wurzeln gut verankert sein. Indem Meier also vor der Behandlung des neuen Themas Fragen wie etwa Nr. 1.) stellt, erfährt er, ob dieses Wissen tatsächlich vorhanden ist oder eventuell nachbe-

handelt werden muss. Natürlich sollten die falschen Antwortoptionen nicht einfach leicht durchschaubarer Unsinn sein; vielmehr sollten sie gerade die häufigsten Fehler aufnehmen und damit die Lernenden sozusagen „in Versuchung führen“.

Vielleicht möchte Meier die neu behandelten Exponentialfunktionen in Kontrast setzen zu den bereits behandelten linearen Funktionen. In diesem Fall kann eine Frage wie Nr. 2.) sinnvoll sein, um zu testen, ob die Lernenden lineares Verhalten wirklich noch erkennen. Weiter plant er sicherlich, die charakteristische Eigenschaft der Funktion $\exp_a(x)$ (Jede Erhöhung von x um 1 bewirkt eine Ver- a -fachung des Funktionswertes) zu thematisieren. Wenn dies reibungslos gelingen soll, dürfen die Lernenden aber nicht am Einsetzen des Terms $x+1$ in die Funktion scheitern; darum ist eine Frage wie etwa Nr. 3.) sinnvoll.

1.) Statt $10 \cdot (\sqrt[3]{6})^t$ könnte man auch schreiben:

- a) $10 \cdot 6^{-3t}$
- b) $10 \cdot 2^t$
- c) $10 \cdot 6^{\frac{t}{3}}$

2.)

Die aufeinanderfolgenden Daten dieser Listen wurden in gleichen Zeitabständen erhoben. Bei welchen Datenlisten handelt es sich um einen linearen Prozess?

- a) 243, 81, 27, 9, 3, 1, $0.\bar{3}$, ...
- b) 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, ...
- c) 5, 2, -1, -4, -7, -10, -13, ...

3.)

Setzt man in der Funktion $f: x \mapsto 0.1 \cdot 2^x$ den Input $x+1$ ein, so erhält man:

- a) $0.1 \cdot 2^{x+1}$
- b) $0.2 \cdot 2^x$
- c) $0.1 \cdot 2^x + 1$

Kognitive Aktivierung

Am Beginn des Lernens steht die Einsicht, dass einem die Konzepte fehlen, um bestimmte Zusammenhänge erklären zu können. Um diese Einsicht zu fördern, sollte daher am Anfang jeder Lektion als kognitiv aktivierender Einstieg eine Fragestellung präsentiert werden, die so gut auf den Kenntnisstand der Lernenden abgestimmt ist, dass sie dabei bemerken, welches Wissen ihnen noch fehlt. Damit soll nicht nur ihr Interesse am Unterricht geweckt werden, sondern sie sollen zudem verstehen, worin der Nutzen der im Unterricht angebotenen Inhalte besteht.

Angenommen, Lehrerin Meier möchte als nächstes in die Integralrechnung und speziell die Riemann-Summe einführen. Sie sollte also eine gute (anregende, herausfordernde) Frage stellen, und es sollte den Lernenden deutlich werden, dass ihr bisheriges Wissen nicht ausreicht, um die Frage befriedigend zu beantworten. Sie könnte etwa die Geschichte vom Filmfestival der langweiligsten Filme aller Zeiten erzählen (Katz & Starbird, 2013):

Aktuell läuft gerade das *Festival der langweiligsten Filme aller Zeiten*. Jeder der an diesem Festival ausgestrahlten Filme dauert genau eine Stunde und handelt von einer Autofahrt. Um Kosten zu sparen, hat der Regisseur nur mit einer einzigen Kamera gearbeitet, und diese hat während der ganzen Fahrt immer nur den Tacho des Fahrzeuges gefilmt. Beim ersten Film zeigt der Zeiger des Tachos die ganze Stunde lang immer nur auf die Position 14 m/s. Während der Vorführung ist Gähnen und vereinzelt sogar Schnarchen zu hören.

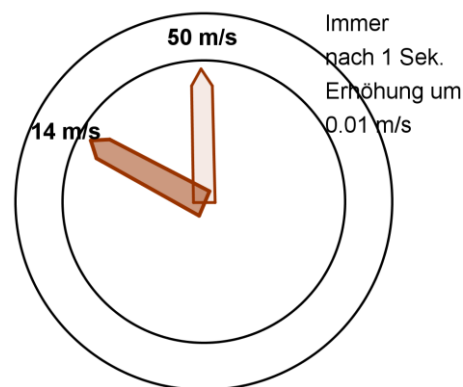


Abb. 1

Als Mitten im Film die ersten Zuschauer aufstehen und den Saal verlassen, bekommt es der Veranstalter mit der Angst zu tun, tritt kurz vor die Leinwand und stellt den Zuschauern, um diese bei Laune zu halten, eine Frage: Welche Strecke legt das Auto während der Stunde zurück? Die Zuschauer werden damit keine Mühe haben, aber immerhin werden sie, wenn auch nur kurz, zum Nachdenken angeregt. Die wenigen Zuschauer, die zum zweiten Film überhaupt erscheinen, bekommen Folgendes zu sehen: Zu Beginn des Films steht der Zeiger auf 14 m/s, dann aber rückt er immer weiter und zwar immer nach einer Sekunde um 0.01 m/s (Abb. 1). Vorsorglich stellt der Veranstalter schon zu Beginn dieselbe Frage wie beim ersten Film.

Trotz des Versprechens des Veranstalters, ab sofort gratis Getränke und Popcorn auszuschenken, erscheinen zum dritten Film nur noch wenige hartgesottene Fans. Diese bekommen Folgendes zu sehen: Der Zeiger des Tachos vollführt eine stetige Aufwärtsbewegung und zwar gemäss der in Abb. 2 angegebenen Funktion. Welche Strecke legt das Fahrzeug nun in der einen Stunde zurück?

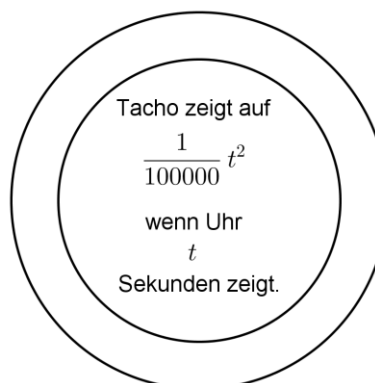


Abb. 2

Hier sehen die Lernenden deutlich, dass ihr bisheriges Wissen zur Lösung nicht ausreicht, dass die Frage aber sinnvoll ist und offenbar ein neues Konzept nötig macht.

Erfinden mit kontrastierenden Fällen

Eine weitere Möglichkeit, die Schülerinnen und Schüler auf das Lernen vorzubereiten, besteht darin, als Einstieg mit ihnen zu erarbeiten, worin das Grundproblem besteht, für das später eine bestimmte Theorie eine Lösung präsentiert (Schwartz et al., 2011). Dazu hat es sich bewährt, ihnen Fälle vorzugeben, die so ausgewählt sind, dass sie sich zwar in Oberflächenmerkmalen unterscheiden beziehungsweise im Kontrast zueinander stehen, dass sie aber eine abstrakte Gemeinsamkeit aufweisen. Diese Gemeinsamkeit sollen die Schülerinnen und Schüler – unterstützt durch Aufträge und Hilfestellungen – herausfinden. Erst nachdem sie selber Vorschläge formuliert haben, wird ihnen das wissenschaftliche Konzept vorgestellt. Sie können dann einschätzen, wie nah sie mit ihren eigenen Vorschlägen der korrekten Lösung gekommen sind.

Dieses Vorgehen wird als „Erfinden mit kontrastierenden Fällen“ bezeichnet. Die Lernform hat sich in Vergleichsstudien bei manchen Inhalten gegenüber dem herkömmlichen Vorgehen – erst den Lerninhalt darstellen, dann Übungsaufgaben bearbeiten – als überlegen erwiesen. Denn die Schülerinnen und Schüler zeigten in anschliessenden Transferaufgaben deutlich bes-

sere Leistungen als die Vergleichsgruppe. Dieser Vorsprung wird damit erklärt, dass sie beim Bearbeiten der kontrastierenden Fälle ein tieferes Verständnis des Grundproblems erlangten als die Vergleichsgruppe mit herkömmlichem Unterricht.

Angenommen, Lehrer Meier möchte, dass die Schülerinnen und Schüler das Konzept der Steigung einer Geraden erlernen. Anstelle des herkömmlichen Vorgehens könnte er den Jugendlichen die Abbildung 3 vorlegen und sie bitten, in folgender Geschichte Alice zu unterstützen:

Alice hat vor sich eine Anzahl von Geraden. Sie ruft gleich Bob an und möchte ihm mitteilen, wie steil diese Geraden sind. Sie möchte durch Nennen einer einzigen Zahl und ohne weitere Hinweise erreichen, dass Bob eine präzise Vorstellung von der Steilheit der Geraden gewinnt und dann die Geraden selber bis auf Parallelverschiebung korrekt aufzeichnen kann. Können Sie Alice helfen? Nach welcher Regel könnte sie diese Masszahl bilden? Und wie müsste sie für die abgebildeten Geraden lauten?

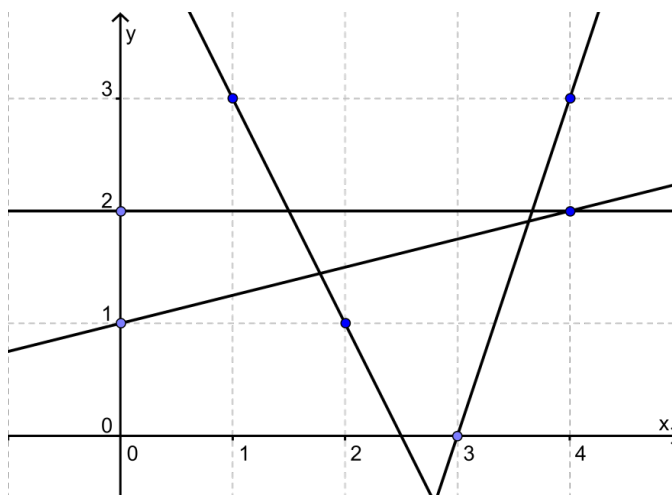


Abb. 3

Aufträge zum Erstellen von Selbsterklärungen

Wie lässt sich im Unterricht oder im Anschluss daran das Gelernte vertiefen? Eine Lernform, die sich in zahlreichen experimentellen Studien als besonders lernwirksam erwiesen hat, besteht darin, die Lernenden durch Erklärungsaufträge gezielt dazu anzuleiten, zentrale Lerninhalte noch einmal zu durchdenken (Berthold et al., 2008; Chi et al., 1994; Schworm & Renkl, 2007). Die Schülerinnen und Schüler erhalten den Auftrag, sich zu überlegen, wie sie beispielsweise ein Konzept, einen Zusammenhang oder einen Lösungsweg erklären würden. Solche Erklärungen, die man für sich selber konstruiert, werden in der Lehr- und Lernforschung als „Selbsterklärungen“ (self-explanations) bezeichnet. Da Schülerinnen und Schüler anspruchsvolle Selbsterklärungen nur selten spontan konstruieren, müssen sie durch geeignete Aufträge regelmässig dazu aufgefordert werden. Diese Aufträge können sowohl im Unterricht als auch zur Vertiefung bei den Hausaufgaben eingesetzt werden. Wichtig ist, dass die Aufträge anspruchsvoll sind und die Lernenden geistig herausfordern. Wenn Schülerinnen und Schüler Selbsterklärungsaufträge bearbeiten, wird dadurch erstens ihr Verständnis des Lernstoffs vertieft. Zweitens erwerben sie, wenn sie regelmässig mit solchen Aufträgen konfrontiert werden, die Kompetenz, sich selber solche Erklärungen abzuverlangen.

Angenommen, Lehrerin Meier hat soeben das Thema Logarithmen behandelt. Bevor sie die Lernenden mit Anwendungsaufgaben konfrontiert, die ein gutes Verständnis des Stoffes bereits voraussetzen, möchte sie sich ein Bild machen davon, wie gut das Verständnis bei den Lernenden tatsächlich ist und von welcher Qualität die Erklärungen sind, die sie selber leisten können. Darum stellt sie Selbsterklärungsaufgaben wie etwa die folgenden:

- 1.) Ohne vorne nachzuschlagen, definieren Sie bitte, was man unter dem Logarithmus der Zahl c zur Basis A versteht. Welche Bedingungen müssen an diese Zahlen gestellt werden, damit „es geht“?

2.) Bob behauptet: „ $\ln(19)$ ist gleich e^x , wobei x gesucht ist.“ Stimmt das?

3.) Bitte formulieren Sie eine gute Erklärung für das Logarithmusgesetz

$$\log_B(u \cdot v) = \log_B(u) + \log_B(v)$$

Insbesondere: Welche Voraussetzungen an die vorkommenden Zahlen müssen erfüllt sein? Und an welcher Stelle spielt welches Potenzgesetz eine entscheidende Rolle?

Und so weiter...

Holistischer Vergleich von Modellen

Obwohl das Bearbeiten von Selbsterklärungs-Aufträgen die Umstrukturierung des Begriffswissens effizient unterstützt, gibt es eine Lernform, die unter bestimmten Voraussetzungen noch lernwirksamer sein kann. Geht es nämlich um das Verständnis komplexer Modelle, dann hat es sich bewährt, den Lernenden sowohl das korrekte Modell als auch ein teilweise inkorrektes Laienmodell zu präsentieren und sie anzuleiten, alle wichtigen Unterschiede zwischen diesen Modellen herauszuarbeiten. Auf diese Weise konnte beispielsweise das Verständnis des menschlichen Blutkreislaufes noch lernwirksamer gefördert werden als mit Selbsterklärungs-Aufträgen (Gadgil et al., 2012). Das Besondere eines solchen Vergleichs liegt darin, dass damit gezielt Fehlvorstellungen angesprochen sowie die Vorteile des korrekten Modells hervorgehoben werden können.

Angenommen, Lehrer Meier behandelt Extremwertprobleme als Anwendung zur Differentialrechnung. Er stört sich daran, dass seine Schülerinnen und Schüler den Lösungsweg oft überaus knapp und konfus und dazu noch unvollständig notieren. Anstatt den Lernenden immer neue Extremwertprobleme zu präsentieren in der vergeblichen Hoffnung, dass sich das irgendwann von selber bessern wird, könnte er zu der Methode „Holistischer Vergleich von Modellen“ greifen. Dazu notiert er für eine konkrete Extremwertaufgabe sowohl den aus seiner Sicht idealen Lösungsweg sowie einen Lösungsweg, wie Jugendliche ihn typischerweise notieren. Beide Wege präsentiert er den Lernenden und weist deutlich darauf hin, bei welchem es sich um das Experten- und bei welchem um ein Laienmodell handelt. Dann bittet er sie, die beiden Modelle vergleichend zu beurteilen und jeweils Vor- oder Nachteile zu notieren. Typische Fragen könnten dann also etwa so lauten:

1.) Was lässt sich über die Strukturierung der Lösungswege sagen?

2.) Wie gut ist jeder der beiden Wege kommentiert? Wie leicht kann man dem Weg folgen?

3.) Welche Bemühungen um Ökonomie sind wo ersichtlich? Und warum ist das vorteilhaft?

4.) Welche Rückschlüsse lassen sich ziehen auf das Konzept, das der Autor oder die Autorin des Lösungsweges im Kopf hat?

5.) Was für Mittel helfen dem Leser oder der Leserin, sich im Lösungsweg zurechtzufinden?

Und so weiter.

Auf diese Weise denken die Lernenden über Darstellung, Strukturierung, Ökonomie, Argumentationstiefe und so weiter bei Lösungswegen nach.

Einsatz geistiger Werkzeuge

Um Wissen anhand abstrakter Kriterien repräsentieren zu können, muss man über Darstellungsformen verfügen, die theoretische Zusammenhänge veranschaulichen (Schneider et al., 2010; Stern et al., 2003). Zu diesen Darstellungsformen, die in der Lehr- und Lernforschung auch als „geistige Werkzeuge“ (mental tools) bezeichnet werden, gehören beispielsweise Diagramme, Formeln, Graphen und schriftliche Symbole. Sie erleichtern das Verständnis theoretischer Zusammenhänge, indem sie die Aufmerksamkeit auf abstrakte Merkmale lenken. Wer zum Beispiel gelernt hat, quantitative Zusammenhänge mittels linearer Graphen darzustellen, dem wird es leichter fallen, zu erkennen, dass sich bestimmte Zusammenhänge in der Biologie, der Chemie und der Physik mit der gleichen Funktion darstellen lassen, als jemandem, der im Umgang mit linearen Graphen nicht geübt ist.

Das Verfügen über solche Repräsentationswerkzeuge ist deshalb eine wesentliche Voraussetzung für die Konstruktion intelligenten Wissens, das nach abstrakten Kriterien geordnet ist. Daher spielen geistige Werkzeuge beim Transfer von Wissen eine zentrale Rolle (Hardy et al., 2005; Mähler & Stern, 2006). Denn nur, wer erkannt hat, dass zwei Situationen in ihren abstrakten Merkmalen übereinstimmen, wird in der Lage sein, Gelerntes auf neue Situationen zu übertragen. Deshalb spielt der Einsatz von Repräsentationswerkzeugen eine besonders wichtige Rolle.

Angenommen, Lehrerin Meier möchte mit ihrer Klasse in die Trigonometrie einsteigen. Sie weiss, dass die Definition der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis als geistiges Werkzeug von zentraler Bedeutung für die ganze Trigonometrie ist. Darum denkt sie sich Aufträge aus, die den Lernenden helfen, sich dieses „mental tool“ besonders gut einzuprägen. Zum Beispiel:

Hugo besteigt ein Riesenrad mit Radius 1. Nun legen wir ein Koordinatensystem in das Riesenrad, so dass der Mittelpunkt des Kreises im Koordinatenursprung $(0,0)$ liegt. Zudem definieren wir den Winkel zwischen der Horizontalen (in Richtung der positiven x -Halbachse) und dem Radius OP als α .

Hugo sitzt in der Kabine, während sich das Riesenrad im Gegenuhrzeigersinn dreht. Der Winkel α nimmt laufend zu, wodurch sich auch die Koordinaten von Hugos Kabine ständig ändern. Das bedeutet, wir können die Koordinaten x und y als Funktionen des Winkels auffassen: $y:=f(\alpha)$ und $x:=g(\alpha)$.

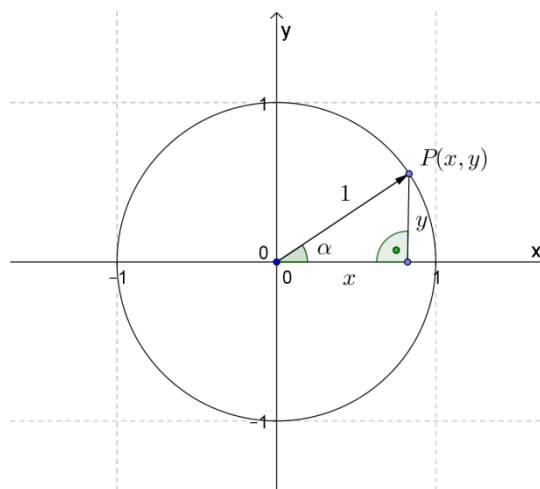


Abb. 4

Anschliessend bittet sie die Lernenden, die Graphen dieser Funktionen zu skizzieren, über ihre Eigenschaften nachzudenken und sich zu fragen, für welche Winkel eine präzise Angabe der Funktionswerte mit dem aktuellen Vorwissen möglich ist. Später wird es möglich sein, fast jede neu zu erarbeitende Erkenntnis zur Trigonometrie auf dieses ursprüngliche Riesenrad-Erlebnis zurückzuführen. Als geistiges Werkzeug können es die Schülerinnen und Schüler immer wieder heranziehen, wenn es darum geht, sich Erklärungen für elementare trigonometrische Sachverhalte zurechtzulegen.

Metakognitive Fragen

Erfolgreiches Lernen erfordert die Kontrolle der eigenen Fortschritte. Um gezielt neues Wissen aufbauen zu können, ist es entscheidend, dass man weiss, was man bereits verstanden hat

und in welchen Bereichen man an seinem Verständnis noch arbeiten muss. Deshalb ist es wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler lernen, sich selber Fragen zu ihrem eigenen Verständnis zu stellen, wie zum Beispiel:

„Habe ich verstanden, worin der Unterschied zwischen einer Exponential- und einer Potenzfunktion besteht? Könnte ich diesen Unterschied anderen Personen erklären?“

Um diese Kompetenz zu vermitteln, müssen ihnen regelmässig Aufträge zur Reflexion ihres Lernstands: so genannte „metakognitive Fragen“ vorgegeben werden (Mevarech & Fridkin, 2006). Diese Fragen können im Unterricht sowie zur Nachbereitung als Hausaufgaben bearbeitet werden und müssen gut auf die Unterrichtsinhalte abgestimmt sein. Metakognitive Fragen dürfen nicht zu leicht sein und müssen zentrale Konzepte betreffen, bei denen tatsächlich Verständnisschwierigkeiten auftreten können.

Aufgaben und Angebote des MINT-Lernzentrums

Im MINT-Lernzentrum der ETH Zürich entwickeln Lehr- und Lernforscher gemeinsam mit erfahrenen Gymnasiallehrpersonen Unterrichtseinheiten zu zentralen Themen der Schulfächer Biologie, Chemie, Mathematik und Physik, um die naturwissenschaftliche Allgemeinbildung zu verbessern. Die Unterrichtseinheiten zeichnen sich durch den Transfer von der Lehr- und Lernforschung in die schulische Praxis aus. Naturwissenschaftliche und mathematische Themen werden mit Lernformen unterrichtet, die sich in experimentellen Vergleichsstudien als besonders lernwirksam erwiesen haben. Die Themen der Unterrichtseinheiten sind auf zentrale Inhalte des mathematisch-naturwissenschaftlichen Curriculums von Schweizer Gymnasien ausgerichtet. Zu jeder Unterrichtseinheit werden regelmässig jedes Jahr zwei Fortbildungstermine angeboten. Weitere Informationen finden Sie auf unseren Webseiten:

<http://www.educ.ethz.ch/mint/fort>

Quellenangaben:

Berthold, K., Eysink, T. H. S., & Renkl, A. (2008). Assisting self-explanation prompts are more effective than open prompts when learning with multiple representations. *Instructional Science*, April 2008.

Chi, M. T. H., de Leeuw, N., Chiu, M. H., & Lavancher, C. (1994). Eliciting self-explanations improves understanding. *Cognitive Science*, 18, 439 – 477.

Gadgil, S., Nokes-Malach, T. J., & Chi, M. T. H. (2012). Effectiveness of holistic mental model confrontation in driving conceptual change. *Learning and Instruction*, 22, 47 – 61.

Hardy, I., Schneider, M., Jonen, A., Stern, E., & Möller, K. (2005). Fostering Diagrammatic Reasoning in Science Education. *Swiss Journal of Psychology*, 64 (3), 207 – 217.

Katz, B., & Starbird, M. (2013). Distilling Ideas. An Introduction To Mathematical Thinking. MAA The Mathematical Association of America, 135 – 137.

Mähler, C., & Stern, E. (2006). Transfer. In D. Rost (Ed.), *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (pp. 782-793), Weinheim: Beltz.

Mevarech, Z., & Fridkin, S. (2006). The effects of IMPROVE on mathematical knowledge, mathematical reasoning and meta-cognition. *Metacognition and Learning*, 1, 85 – 97.

Schneider, M., Rode, C., & Stern, E. (2010). Secondary school students' availability and activation of diagrammatic strategies for learning from texts. In L. Verschaffel, E. De Corte, T. De Jong & J. Elen (Eds.), *Use of external representations in reasoning and problem solving: Analysis and improvement* (pp. 112-130). London: Routledge.

Schwartz, D. L., Chase, C. C., Oppezzo, M. A., & Chin, D.B. (2011). Practicing Versus Inventing With Contrasting Cases: The Effects of Telling First on Learning and Transfer. *Journal of Educational Psychology*, 103, 1 – 17.

Schworm, S., & Renkl, A. (2007). Learning argumentation skills through the use of prompts for self-explaining examples. *Journal of Educational Psychology*, 99, 285 – 296.

Stern, E. (2011). Intelligentes Wissen als Schlüssel zum Können. In Phillipp Aerni, Fritz Oser (Eds), *Forschung verändert Schule: Neue Erkenntnisse aus den empirischen Wissenschaften für Didaktik, Erziehung und Politik*. Seismo Verlag (S. 27-35).

Stern, E., Aprea, C. & Ebner, H. G. (2003). Improving cross-content transfer in text processing by means of active graphical representation. *Learning and Instruction*, 13(2), 191-203.

Autoren: Armin Barth, Michael Brunisholz & Ralph Schumacher

Eine weitere Aufgabe

Peter Gallin

Der Mathematikerkollege Winfried Müller von der Universität Potsdam hat mir folgendes Problem gestellt:

Zwei halbe Pizzas auf dem rechteckigen Backblech

Peters Fertigpizza hat einen Durchmesser von 35 cm und passt daher nicht aufs Backblech von 31.5 cm auf 38 cm. “Kein Problem”, sagt Freundin Uta, “halbiere sie doch und ...”. Welchen Tipp Uta hatte, wissen wir nicht. Mit welchen Maßen eines Bleches kannst du zwei halbe Pizzas auf dem Blech unterbringen?

Natürlich können die obigen realistischen Maße variiert oder sogar durch Variable ersetzt werden; gefragt ist bei einem Kreisradius r generell nach den möglichen Seitenlängen l und b des umbeschriebenen Rechtecks.

Im nächsten Bulletin des VSMP wird ein Lösungsvorschlag publiziert.

Zwei Neuerscheinungen zum Thema Symmetrie

Die beiden hier besprochenen Texte befassen sich mit demselben Thema: *Symmetrie*. Ein Thema, zwei Standpunkte, zwei verschiedene Ziele in der Wissensvermittlung.

Ian Stewart lädt ein zu einer Besichtigungstour. Eine mathematische Traumlandschaft wird unter seiner Führung gleichsam im Heissluftballon überflogen und erkundet, ohne dass die Erde je betreten wird. Diese Reise bietet grandiose Impressionen, Überblicke, Faktenwissen und Zusammenhänge.

Hans Walser organisiert vergleichsweise eine Schulreise als Wanderung. Die Klasse erkundet das mathematische Wunderland der Symmetrie soweit es die eigenen Kräfte zulassen. Er vermittelt auf gymnasialer Stufe Gelegenheiten, mathematische Erfahrungen mit einem anschauungsnahen Symmetriebegriff zu sammeln und mathematische Kompetenz zu erwerben und zu vertiefen.

Für Lehrkräfte ist es lohnend, sich mit beiden Texten auseinanderzusetzen, denn beide Autoren sind grosse Könner, die viel zu bieten haben, jeder auf seine Art.

Stewart Ian, *Symmetry, A Very Short Introduction*, 144 Seiten, GBP 7.99, Oxford University Press, 2013, ISBN 978-0-19-965198-6.

Oxford University Press bietet einer interessierten Öffentlichkeit mit dem Format [THEMA XY – A Very Short Introduction] anregende Einladungen zur Beschäftigung mit verschiedensten Themen aus den Wissenschaften. Ian Stewart ist als Mathematiker und über die Fachkreise hinaus auch wegen seiner kommunikativen Sonderbegabung bekannt. Im vorliegenden Text wird er diesem Ruf gerecht. Er hat die Fähigkeit so zu schreiben, dass ausgebildete Mathematiker die mathematisch wesentlichen Charakteristiken der behandelten Themen ohne formalen Ballast in grossen Zügen wiedererkennen, während mathematisch weniger erfahrene Leser sehr geschickt an die Mathematik herangeführt werden in einer Weise, dass sie vieles in Umrissen erahnen und einiges wirklich einsehen können. Wenn Sie eine Schülerin entdecken, die vielleicht Mathematik studieren will, schenken Sie ihr dieses Büchlein. Sie wird wohl nicht ganz alles begreifen, aber sie wird neugierig werden und Stewart wird sie nie vor den Kopf stossen. Wenn Sie sich selbst über Symmetrie aus mathematischer Sicht informieren wollen, so werden Sie diesen Text geniessen können: sprachlich, mathematisch und inhaltlich – und Sie werden feststellen, dass dies kein Text ist für immersiven Mathematikunterricht im Gymnasium.

Symmetrie als sinnlich erfahrbares Phänomen ist der Ausgangspunkt. In der Analyse von Beispielen steuert Stewart zielstrebig auf die algebraische Struktur im Hintergrund hin. Er zeigt, wie die mathematische Struktur von Gruppen und Symmetrien sich gegenseitig bedingen. Gruppentheorie hat sich im 19. Jahrhundert kräftig entwickelt und bei wichtigen Beweisen eine entscheidende

Rolle gespielt, so in der Theorie der Lösbarkeit von Polynomgleichungen mit Radikalen bei Abel und Galois. Klein hat bemerkt, dass verschiedene Arten von Geometrien sich durch die Isometriegruppen – allgemeiner die strukturerhaltenden Selbstabbildungen – charakterisieren lassen. Reguläre Polyeder oder Kristalle und andere Muster lassen sich mit Gruppentheorie klassifizieren. Wen wundert es, dass Gruppen auch die Beziehungen unter Elementarteilchen regeln sollen?

Wer Stewart auf seinem Ausflug von der Symmetrie zur Gruppentheorie und zurück folgt, wird Bekanntschaft mit allerlei mathematischen Strukturen machen: Zahlen, aber auch Matrizen, Matrixgruppen, Spiele, Muster, Musterbildungsprozesse. Nicht immer realisiert die Natur Symmetrien perfekt. Symmetrien können auch gebrochen werden. Wer würde in einem Knoten Symmetrien vermuten? Die Knotengruppe weist auf weniger offensichtliche Symmetrien hin.

Physiker versuchen, den Zoo der Elementarteilchen zu verstehen und zu ordnen. Dabei werden erneut Gruppen ins Spiel gebracht. Stewart berichtet über diesen Ansatz verständlich in grossen Zügen. Dabei kommt er auf klassische Liegruppen zu sprechen. Das gerät dann zur Besichtigung aus der Nähe, aber nicht zum Kontakt mit der Sache an sich.

Zuletzt mutet sich Stewart einen Bericht über die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen zu. Das war vor rund 30 Jahren eine Grosstat, die einer Gruppe von Spezialisten gelang. Ihre Spur in der Fachliteratur umfasst mehr als 10000 Seiten Beweise. Nur wenige Mathematiker fühlen sich kompetent, darüber zu urteilen. Stewart tut es nicht, er berichtet. Ob die intelligente Leserin, der aufgeweckte Leser ihm da auf Seite 133 bis zum Monster und zum Babymonster folgen werden und was ihnen die Faktorzerlegung der Gruppenordnungen sagt, müssen diese selbst beurteilen.

Der Text schliesst mit Berichten zu neusten Entwicklungen der Gruppentheorie und der Graphentheorie, Expander, die für Informatikanwendungen wesentlich sind. Vielleicht heisst Stewarts Botschaft hier: Vertraut darauf, dass die abstrakteste Theorie immer wieder die Spitzentechnologie befruchtet, selten aber umgekehrt!

Das Buch ist faszinierend und informativ, aber es ist kein mathematisches Lehrbuch. Stewart konfrontiert seine Leser implizit mit pädagogisch relevanten Fragen zum Sinn und zu den Grenzen der Popularisierung zeitgenössischer Mathematik und Wissenschaft überhaupt. Wer hier mitreden will, muss Bücher wie dieses lesen, sich vielleicht auch der analogen Frage nach der Vermittlung zeitgenössischer Kunst stellen. Ich ermuntere Sie: Tun Sie beides! Sie werden durch dieses kleine Büchlein auf jeden Fall bereichert.

Walser, Hans. Symmetrie in Raum und Zeit. 179 Seiten, EUR 19.50, Edition am Gutenbergplatz Leipzig EAGLE, 2014, EAGLE 046, ISBN 978-3-937219-46-2

Dieser Text ist eine komplette Neubearbeitung des Themas *Symmetrie*, zu dem Hans Walser schon 1998 bei B. G. Teubner ein bemerkenswertes Lehrbuch

veröffentlicht hat.

Der frühere Text wurde auf Anregung von Peter Hilton auch in englischer Übersetzung von MAA herausgegeben [*Symmetry* by Hans Walser, translated from the German by Peter Hilton and Jean Pedersen, published by The Mathematical Association of America (Spectrum Series), 2001, ISBN 0-88385-532-1].

Hans Walser behandelt Symmetrie von einem Standpunkt, der dem Gymnasium angemessen ist. Daher sucht man ‘Gruppe’ oder ‘Gruppentheorie’ in seinem Stichwortverzeichnis umsonst. Symmetrie wird als vorerst undefinierter Begriff in Beispielen beobachtet und abgegrenzt gegen Asymmetrie. Der Mensch muss sich an der Schönheit nahezu symmetrischer Erscheinungen längst vor der Entwicklung der Geometrie erfreut haben. Während Jahrtausenden wurden Gärten, Gebäude, Städte, Texte, Choreografien oder Melodien symmetrisch angelegt, vielleicht weil Symmetrie auch ein ökonomisches Prinzip sein kann, dem es genügt, nur einen Teil explizit zu erdenken und den Rest durch Symmetrie fortzusetzen.

Erst im 18. Jahrhundert begann die Gruppentheorie zu keimen, die im 19. Jahrhundert den intuitiven Symmetriebegriff zu formalisieren vermochte. Es ist ein didaktisch weiser Entscheid, diese abstrakte algebraische Formalisierung der Symmetrie im allgemeinbildenden Gymnasium auszusparen.

Die *Kapitelüberschriften* lauten: Symmetrie und Gleichmass – Spieglein, Spieglein – Symmetrisches Vorgehen – Ornamente – Parkette und Gitter – Spiralen – Regelmässige Vielecke – Platonische Körper – Periodizität.

Beispiele und Begriffe, die Walser’s didaktischen Kosmos bevölkern, treten in verschiedenen Rollen auch in diesem Text auf: Goldener Schnitt, DIN A4, Faltsmodelle und Origami, Schliessungsfiguren, Konstruktionen mit Zirkel und Lineal und mehr.

Der Text gewinnt durch die vielen sehr sorgfältig erzeugten und aussagekräftigen Illustrationen.

Die Rolle als Lehrtext wird unterstrichen durch das didaktische Lehrgespräch, das sich im Umkreis von Fragen und Antworten virtuell entspinnen kann, wenn die Leser sich auf die Intention des Autors einlassen. Durch die Fragen und Antworten wird der Text getaktet, insbesondere, wenn die Leserin sich die Zeit gönnt, ihren eigenen Weg selbst zu suchen und auch zu gehen. In dieser Anlage von Fragen und Antworten vermittelt der Lehrer Hans Walser einen Einblick in seinen Unterrichtsstil und in sein Können.

Beim Thema ‘Symmetrisches Vorgehen’ wird die Konstruktion von Eckenschwerpunkten, Kantenschwerpunkten, Flächenschwerpunkten allein mit Zirkel und Lineal konstruiert. Die Vektorgeometrie würde hier eine viel engere Anlehnung an die physikalische Argumentation erlauben. Allgemein lassen sich Schwerpunkte mit Vektorgeometrie unabhängig von der Dimension und der Anzahl der geometrischen Komponenten unmittelbar aus der physikalischen Definition des Schwerpunktes herleiten. Allerdings nutzt dieser Zugang die ‘Symmetrie der Daten’ so wirkungsvoll, dass die Methode des ‘symmetrischen Vorgehens’ gar nie auftaucht.

Ich empfehle dieses bemerkenswerte und schöne Buch von Hans Walser wärm-

stens und zwar als anregende Lektüre für Unterrichtende oder in der Lehrerausbildung ebenso wie als Jungbrunnen für einen beziehungsreichen Mathematikunterricht im Gymnasium, dessen Legitimation und Relevanz durch Sachverstand, didaktisches Vorgehen und Wahl der Inhalte autonom gesichert werden.

H.R. Schneebeli, Wettingen

Autorinnen und Autoren gesucht

Der "Katalog Grundkenntnisse" in Mathematik wurde in den letzten zwei Jahren von einer breit aufgestellten Gruppe überarbeitet. Im Moment werden die Vernehmlassungsantworten eingearbeitet. Der aktuelle Stand ist ersichtlich auf

<http://math.ch/kanon>

Eine wesentliche Neuerung des Katalogs besteht darin, das Thema Differentialgleichungen und Modellierung im Grundlagenfach zu verankern. Dabei geht es darum, im Unterricht das Verständnis für die Grundkonzepte des Modellierens mit Differentialgleichungen anhand einfacher Beispiele aus den Anwendungen zu wecken. An vielen Schulen wird dieses Thema bereits behandelt, in anderen ist es derzeit dem Schwerpunkts- oder Ergänzungsfach vorbehalten. Um die breite Einführung des Themas zu erleichtern suchen wir nun Autorinnen und Autoren mit Unterrichtserfahrung, die entsprechende Unterrichtsmaterialien für das Grundlagenfach verfassen und zu einem schlüssigen Konzept verbinden: Text, Theorie, Beispiele, Illustrationen, Animationen. Die Arbeit kann im Rahmen des Programms *ETH für die Schule* finanziell unterstützt werden. Bei Interesse melden Sie sich bitte bei norbert.hungerbuehler@math.ethz.ch

Herzliche Grüsse,
Meike Akveld, Norbert Hungerbühler

Sangaku (II)

par

Mireille Schumacher

Gymnase d'Yverdon mireille.schumacher@gmail.com



La première partie de cet article **Sangaku (I)** est parue en mai 2014, dans le numéro 125 du Bulletin de la SSPMP p.5-8.

Résumé : Réaliser un sangaku à partir d'un modèle donné, n'est pas toujours une tâche facile. L'observation de la figure géométrique peinte (Figure 1) permet de déduire les informations principales concernant l'énoncé du problème posé. Pour certains sangaku, la résolution de l'énigme proposée relève de simples calculs, alors que la construction à la règle et au compas est d'un tout autre ordre de difficultés. La réciproque est aussi vraie. Les exemples présentés ci-dessous illustrent ce propos.

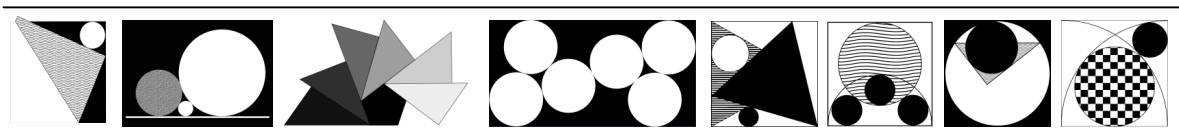
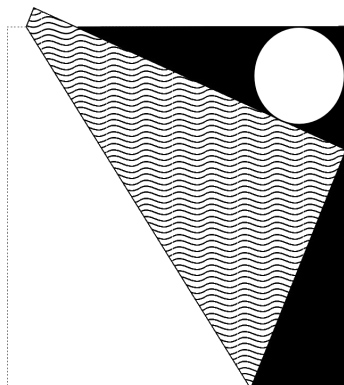


Figure 1.-Galerie de sangaku.

DES PROBLEMES EPURES

Résolution de l'énigme du sangaku Origami



Le sangaku *Origami* (Figure 2) accompagné de seize autres problèmes ainsi que du nom de l'auteur, Akama Chû est peint sur une tablette datée de 1813, toujours exposée dans un temple Mangan-ji de la préfecture de Fukushima. L'énigme du sangaku *Origami* invite à prouver le résultat suivant :

« Prendre une feuille de papier carrée. La plier de manière à amener un des coins sur le côté opposé. La mesure du rayon du cercle inscrit dans le triangle supérieur est égale à la mesure d'un des côtés du triangle en débord de la feuille ».

Figure 2.-Sangaku *Origami*.

i) *Lemme préparatoire* : Dans un triangle rectangle, le diamètre du cercle inscrit vaut la somme des longueurs des cathètes diminuée de la longueur de l'hypoténuse.

Démonstration (Figure 3)

Soit r le rayon du cercle inscrit dans un triangle rectangle d'hypoténuse c et de cathètes a et b avec $0 < a < b < c$. Il s'en

suit que $0 < r < \frac{a}{2}$.

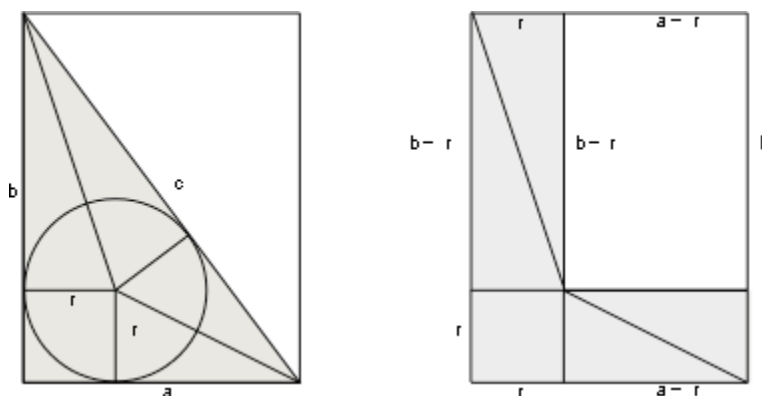


Figure 3.-Lemme Sangaku *Origami*.

La mesure de l'aire ombrée du dessin de gauche (Figure 3) vaut :

$$\sigma = r^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} r(a-r) + \frac{1}{2} r(b-r) \right) \Leftrightarrow \sigma = r^2 + r(a-r) + r(b-r) \Leftrightarrow \sigma = r(a+b-r)$$

En déplaçant les triangles ombrés de ce premier dessin, on obtient une aire ombrée d'égale mesure à la précédente, les deux aires blanches restant égales (dessin de droite Figure 3) :

$$r(a+b-r) = (a-r)(b-r) \Leftrightarrow 2r^2 - 2(a+b)r + ab = 0$$

Les solutions de cette équation sont $r = \frac{(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 2 \cdot ab}}{2} = \frac{(a+b) \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.

La solution $r = \frac{(a+b) + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ est à rejeter, car plus grande que $\frac{a}{2}$. L'autre solution dans

laquelle on substitue $a^2 + b^2$ par c^2 , donne $2r = (a+b) - \sqrt{a^2 + b^2} = (a+b) - c$ ce qui démontre le lemme.

ii) *Démontrons que* : la mesure du rayon du cercle inscrit dans le triangle supérieur du sangaku Origami est égale à la mesure d'un des côtés du triangle en débord de la feuille carrée pliée.

Soit $ABCD$ un carré de côté 1 (Figure 4). Plier ce carré de manière à ce que le sommet A se situe sur le côté BC . Notons X et I les images respectives des points A et D lors de ce pliage ; K est le point d'intersection du segment XI avec le côté CD du carré, U est le point du pli du segment AB .

Notons $k = BX$ la distance de B à X , avec $k \neq 1$ et $B \neq X$, $x = CK$ et $y = AU$.

Il s'agit de démontrer que $r = KI$.

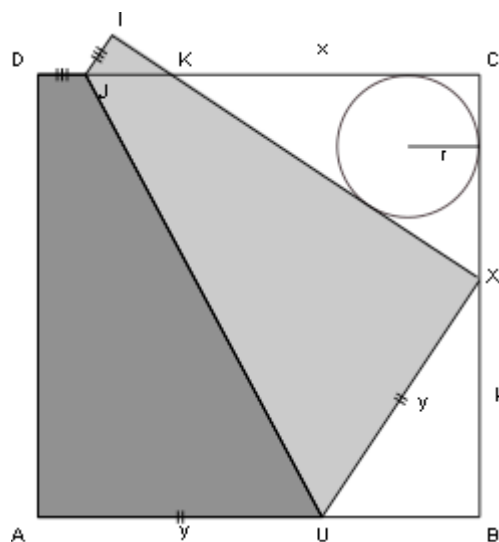


Figure 4.-Le rayon du cercle $r = KI$.

Par similitude des triangles rectangles XCK et UBX , on établit la relation : $\frac{x}{1-k} = \frac{k}{1-y}$ (1)

Le théorème de Pythagore s'applique au triangle UBX : $k^2 + (1-y)^2 = y^2$ (2)

Résoudre le système de deux équations à deux inconnues (1) et (2) :

$$\begin{cases} \frac{x}{1-k} = \frac{k}{1-y} \\ k^2 + (1-y)^2 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{1-k} = \frac{k}{1-y} \\ k^2 + 1 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{1-k} = \frac{k}{1 - \frac{1+k^2}{2}} \\ y = \frac{1+k^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{x}{1-k} = \frac{k}{\frac{1-k^2}{2} - \frac{k^2}{2}} \\ y = \frac{1+k^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{1-k} = \frac{2k}{1-k^2} \\ y = \frac{1+k^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2k}{1+k} \\ y = \frac{1+k^2}{2} \end{cases} \text{ pour } k \neq 1$$

En appliquant le théorème de Pythagore au triangle XCK , on obtient :

$$XK^2 = (1-k)^2 + x^2 \Leftrightarrow XK^2 = (1-k)^2 + \left(\frac{2k}{1+k}\right)^2 \text{ par ce qui précède } \Leftrightarrow$$

$$XK^2 = \frac{[(1-k)(1+k)]^2 + 4k^2}{(1+k)^2} \Leftrightarrow XK^2 = \frac{[(1-k^2)]^2 + 4k^2}{(1+k)^2} \Leftrightarrow$$

$$XK^2 = \frac{1-2k^2+k^4+4k^2}{(1+k)^2} \Leftrightarrow XK^2 = \frac{1+2k^2+k^4}{(1+k)^2} \Leftrightarrow XK^2 = \frac{(1+k^2)^2}{(1+k)^2}$$

D'où $XK = \frac{1+k^2}{1+k}$. Puisque $KI = 1 - XK$, alors $KI = 1 - \frac{1+k^2}{1+k} = \frac{k-k^2}{1+k}$ (3)

En appliquant le lemme démontré ci-dessus, le diamètre $2r$ du cercle inscrit dans le triangle XCK

est égal à $2r = (1-k) + x - XK = (1-k) + \frac{2k}{1+k} - \frac{1+k^2}{1+k} = \frac{2k-2k^2}{1+k} \Leftrightarrow r = \frac{k-k^2}{1+k}$ (4)

Les formules (3) et (4) étant identiques, on en déduit que $r = KI$ CQFD

Résolution du sangaku Les trois cercles

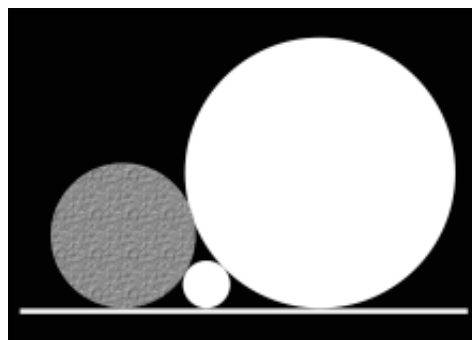


Figure 5.- Sangaku Les trois cercles

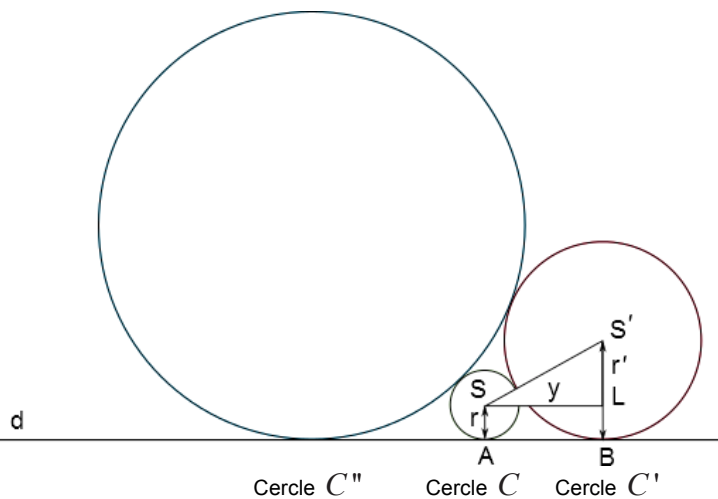


Figure 6.- Lemme Sangaku Les trois cercles

Le plus célèbre des sangaku, *Les trois cercles* (Figure 5), est peint sur une tablette datée de 1824 exposée au Japon dans la préfecture de Gunma. L'énigme consiste à établir un lien entre les rayons de trois cercles tangents entre eux extérieurement, ainsi qu'à une droite.

i) Lemme préparatoire (Figure 6)

Soit C et C' deux cercles tangents extérieurement, de rayon respectif r et r' . La distance entre les points de contact d'une tangente commune à ces cercles est égale à $2\sqrt{r \cdot r'}$.

Démonstration : Soit C le cercle de centre S et de rayon r ; C' le cercle de centre S' et de rayon r' ; y la distance entre les points de contact A et B d'une tangente commune d à ces cercles ; L la projection orthogonale du point S sur le segment BS' .

Par le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle SLS' , on a : $y^2 + (r - r')^2 = (r + r')^2$
 $\Leftrightarrow y^2 + r^2 - 2r \cdot r' + r'^2 = r^2 + 2r \cdot r' + r'^2 \Leftrightarrow y^2 = 4r \cdot r' \Leftrightarrow y = 2\sqrt{r \cdot r'}$.

ii) On considère C , C' et C'' trois cercles de rayon respectif r , r' et r'' , tangents entre eux extérieurement, ainsi qu'à une droite d (Figure 6).

En appliquant le lemme aux cercles C' et C'' , C et C' , C et C'' , on obtient la relation :

$2\sqrt{r' \cdot r''} = 2\sqrt{r \cdot r'} + 2\sqrt{r \cdot r''}$ qui, lorsqu'on divise chacun de ses membres par $2\sqrt{r \cdot r' \cdot r''}$ démontre que les rayons de ces trois cercles sont liés par la relation $\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r'}} + \frac{1}{\sqrt{r''}}$.

Construction du sangaku Les trois cercles

A lui seul, ce sujet mériterait qu'on lui consacre un riche article. Aborder la **construction à la règle et au compas** de ce sangaku n'est pas sans rappeler les dix problèmes d'Apollonius de Perge (262 – 190 av. J.-C.) géomètre et astronome grec. Le *Traité des contacts*, ouvrage perdu d'Apollonius, se proposait de déterminer des cercles astreints à trois conditions prises parmi celles qui consistent à passer par *un point* donné, ou à *être tangent à une droite* ou à *un cercle* donné, ce qui correspond à dix problèmes désignés par les symboles PPP, DDD, PPD (Figure 7), PPC, PDD, PCC, PDC, DDC, DCC et CCC en représentant un point par P, une droite par D et un cercle par C. Le problème CCC, des trois cercles, a été présenté par Pappus (IV^{ème} siècle après J.-C.) comme étant le dixième et le plus difficile. C'est un des grands problèmes de l'Antiquité grecque. Dans *l'Apollonius Gallus*, François Viète (1540 – 1603) va résoudre les dix problèmes de contact.

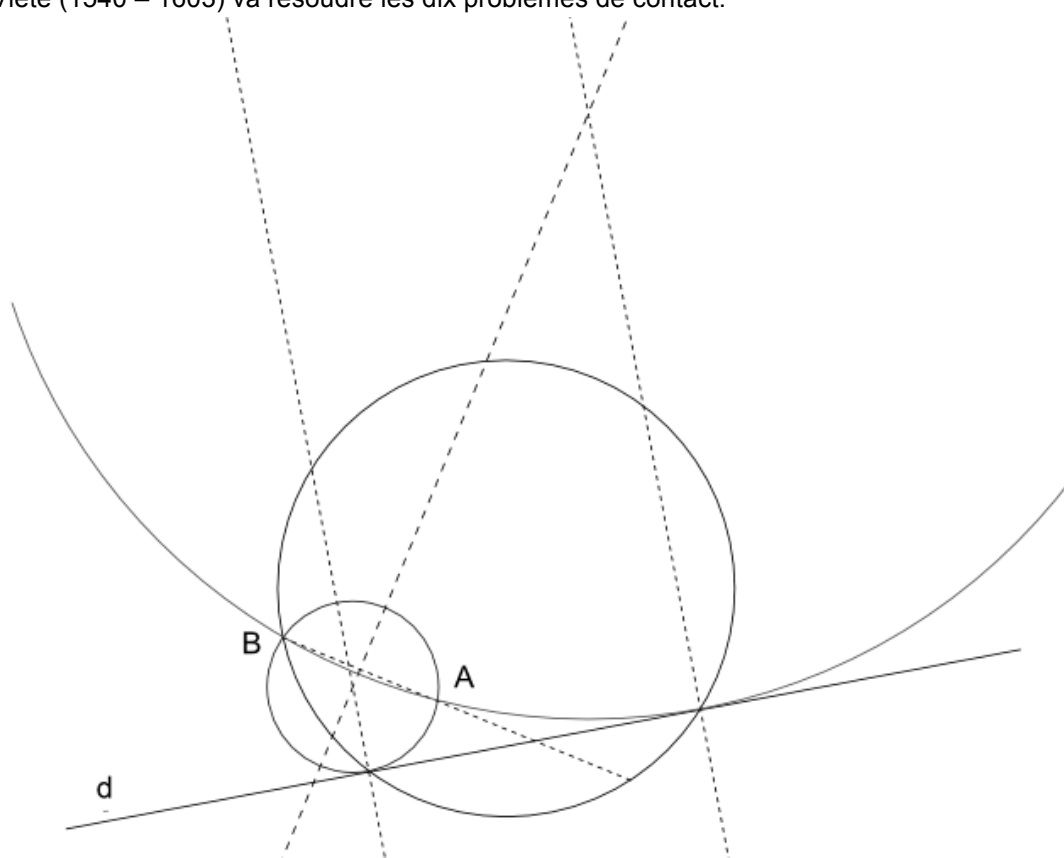


Figure 7.-Construction d'un cercle astreint aux trois conditions : tangent à une droite d , passant par deux points A et B .

CHERCHER ET APPROFONDIR

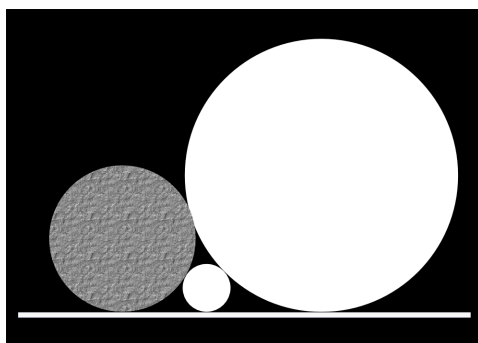
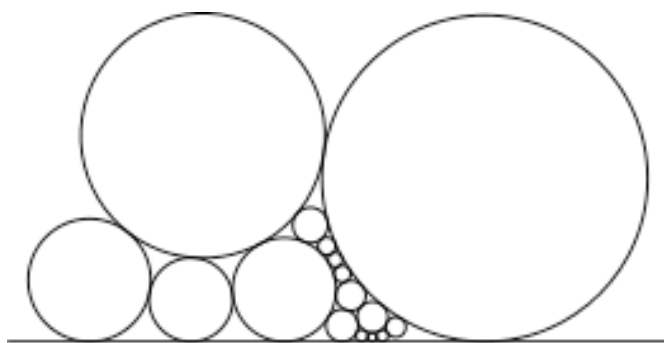
Figure 5.- Sangaku *Les trois cercles*

Figure 8.- © R. W. Brooks « circle packings »

La juxtaposition des figures 5 et 8 laisse penser que ces deux compositions géométriques datent de la même époque. La figure 8 est extraite des travaux d'*empilement de cercles* ou *circle packings* du mathématicien Robert W. Brooks (Washington 1952 – Montréal 2002). Le célèbre « Brook's circle packing parameter theorem » joue un rôle important dans les travaux contemporains de recherche pour l'approche de l'uniformisation des surfaces de Riemann. Dans un article en hommage à Robert Brooks, le professeur Peter Buser donne une nouvelle preuve de ce théorème et présente cet élégant empilement de cercles (Figure 8) (BUSER P., 2005).

CONCLUSION

Proposer des sangaku à ses élèves c'est :

- Disposer d'un support pédagogique stimulant pour explorer de belles mathématiques
- Observer. Conjecturer, analyser, chercher, comprendre
- Entrer dans une autre géométrie du triangle dans laquelle un triangle est avant tout un polygone plein, avec pour objets fondamentaux son aire, son périmètre et son cercle inscrit
- Mettre en évidence le cheminement vers une démonstration
- Utiliser des transformations géométriques : homothéties, inversion
- Aborder des problèmes historiques

Le livre « *Sangaku. Le mystère des énigmes géométriques japonaises* » de Géry Huvent (HUVENT G., 2008) qui m'a permis de découvrir les sangaku est une source d'applications géométriques que je vous recommande vivement.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Mesdames et Messieurs : Muriel Bovey, Peter Buser, Olivier Desponds, Géry Huvent, Anne-Marie Naudy et Alain Schumacher, pour leur diligence, leur précieuse aide ainsi que pour leurs conseils avisés, lors de la conception de ce manuscrit.

BIBLIOGRAPHIE

- BUSER P., 2005. *On the mathematical work of Robert Brooks, Dedicated to the memory of Robert Brooks*. Geometry, spectral theory, groups, and dynamics, pages 1-35, Contemp. Math., 387, Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- DELERUE N., 2008. *Mathématiques japonaises*. Tangente 125 : 44-46.
- HUVENT G., 2008. *Sangaku. Le mystère des énigmes géométriques japonaises*. Dunod, Paris.
- HUVENT G., 2013. http://gery.huvent.pagesperso-orange.fr/index_explorer.htm Rubrique math-art
- INTERACTIVE MATHEMATICS MISCELLANY AND PUZZLES, 1997-2013. <http://www.cut-the-knot.org/> Rubrique sangaku : Thoughts&Problems.
- STEPHENSON K., 2005. *Introduction to Circle Packing. The theory of discrete analytic functions*. Cambridge University Press.

DIE NEUEN VERNIER-PRODUKTE JETZT BEI EDUCATEC BESTELLEN

shop.educatec.ch/vernier

VERNIER DYNAMICS SYSTEM



Mit dem Vernier Dynamics System, einer für den Physikunterricht konzipierten Fahrbahn, wird es einfach Newtons zweites Gesetz, die Beschleunigung auf der schiefen Ebene und vieles mehr zu demonstrieren.

Vernier-Sensoren wie Bewegungsdetektor, Zweibereichkraftsensor, Wireless Dynamics Sensor System, Lichtschranke und Beschleunigungsmesser können leicht am Dynamics System befestigt werden. Weiterhin können Sie die Schiene zu einer optischen Bank verwandeln oder mit dem Schienenverbinder beliebig verlängern.



DIREKT
ZUM SHOP

VERNIER MOTION ENCODER SYSTEM

Der Motion Encoder Wagen ersetzt den Ultraschall-Entfernungsdetektor im Einsatz bei Versuchen zur Dynamik mit Wagen und Schiene. Ein optischer Sensor erfasst die Bewegung des Wagens über einen Lineal auf der Schiene. Die Position wird über ein kodierte Infrarot-Signal an einen Empfänger am Ende der Schiene übermittelt. Dieses Verfahren eliminiert Störungen durch Reflexionen und Störgeräusche, wie sie bei Ultraschallmessungen auftreten. Das optische System garantiert genaue und wiederholbare Ergebnisse.



DIREKT
ZUM SHOP

worlddidac
AWARD 2014

VERNIER OPTIK-SYSTEM

Mit dem Erweiterungssatz Optik wird die Vernier-Schiene zur optischen Bank. Damit sind Experimente bis hin zum Aufbau eines einfachen Teleskops möglich. Das Optik-System kann zudem mit einem Farbmisch-Kit, einem Spiegel-Set, einem Apparat zur Lichtbrechung sowie einem Polarisator/Analysator-Set erweitert werden.



DIREKT
ZUM SHOP



Measure. Analyze. Learn.™

Möchten Sie mit uns in Kontakt bleiben und über unsere neusten Aktivitäten informiert werden? Dann registrieren Sie sich unter www.educatec.info für unseren Newsletter.

Alle unsere Kataloge finden Sie online unter shop.educatec.ch/werbematerial

EducaTec AG
Altes Schulhaus, Kanzleigasse 2
Postfach, 5312 Döttingen

T +41 56 245 81 61, F +41 56 245 81 63
contact@educatec.ch, www.educatec.ch

educaTEC

Les origines de notre enseignement de la géométrie analytique

Jean-Daniel Voelke, Gymnase Auguste Piccard, Lausanne

2^{ème} partie¹

Le traité de Lacroix

Le texte de Monge est concis et traite essentiellement de géométrie analytique dans l'espace. Il appartiendra à ses élèves de diffuser sa méthode et de développer dans le même esprit la géométrie analytique plane en commençant par les figures les plus simples: la droite et le cercle. Sylvestre Lacroix est le premier à effectuer ce travail dans son *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'algèbre à la géométrie* [Lacroix, 1798]². Les deux premiers chapitres sont consacrés à la trigonométrie; l'application de l'algèbre à la géométrie fait l'objet du troisième chapitre. Ce dernier est loin d'être homogène. Lacroix mélange en effet des problèmes issus de la tradition cartésienne comme la construction des solutions d'une équation du 2^e degré avec des problèmes et des techniques de résolution dus à Lagrange et Monge. Il serait vain de vouloir présenter de manière exhaustive le contenu des 140 pages de ce chapitre et je me concentrerai sur les aspects les plus en rapport avec l'enseignement gymnasial actuel.

Lacroix commence par quelques considérations générales sur l'application de l'algèbre à la géométrie. Il insiste sur le mouvement de va-et-vient entre l'algèbre et la géométrie qui caractérise cette discipline: elle consiste d'une part à rechercher les «propriétés de l'étendue» au moyen des procédés algébriques et d'autre part à représenter une «expression algébrique quelconque» par ces propriétés. Lacroix montre ensuite que c'est l'introduction de coordonnées qui permet de caractériser une courbe par une équation algébrique. Il donne deux exemples: les points d'une droite passant par l'origine satisfont à une équation de la forme $y = ax$ et les points d'un cercle centré à l'origine à une équation de la forme $x^2 + y^2 = r^2$. Il est donc possible d'exprimer analytiquement les propriétés d'une courbe par une équation. Mais on peut procéder inversement:

« Réciproquement, une équation quelconque, considérée en elle-même, donne aussi naissance à une courbe dont elle fait connaître les propriétés. Ce dernier point de vue étant le plus général, et le plus fécond, c'est désormais de la considération des équations que nous déduirons les lignes.» [Lacroix, 1798, 74]

¹ La première partie de cet article a été publiée dans le précédent numéro du *Bulletin*. L'intégralité de l'article est disponible à l'adresse www.sspmp.ch/crm/article.

² Cet ouvrage a connu de nombreuses rééditions durant la première partie du 19^e siècle. Lacroix avait auparavant publié son *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* [Lacroix, 1797], ouvrage également régulièrement réédité et dont quelques pages sont déjà consacrées à l'équation de la droite dans le plan. C'est dans la préface de cet ouvrage qu'on rencontre probablement pour la première fois l'appellation «géométrie analytique». Lacroix écrit en effet: « En écartant avec soin toutes les constructions géométriques, j'ai voulu faire sentir au Lecteur qu'il existait une manière d'envisager la Géométrie, qu'on pourrait appeler *Géométrie analytique*, et qui consisterait à déduire les propriétés de l'étendue du plus petit nombre possible de principes, et par des méthodes purement analytiques, [...]» [Lacroix, 1797, xxv] C'est le point de vue déjà défendu par Lagrange dans son mémoire sur les pyramides triangulaires.

C'est le point de vue développé par Fermat au début de son mémoire. Lacroix l'applique immédiatement à l'équation la plus simple, $y = ax + b$, et démontre qu'elle représente une droite. Il calcule les coordonnées des points d'intersection de la droite avec les axes de coordonnées et discute du signe des coordonnées x et y suivant la position du point sur la droite. Il explique pourquoi les abscisses et les ordonnées négatives doivent être prises du côté opposé par rapport aux abscisses et ordonnées positives. L'attention accordée à la question des signes montre que celle-ci était peut-être encore problématique pour certains lecteurs. Remarquons à ce propos que Lacroix conserve l'habitude ancienne de noter $-x$ une abscisse négative.

Lacroix donne ensuite l'équation d'une droite passant par deux points ainsi que la formule de la distance de deux points dans le plan. Il donne aussi le critère de perpendicularité de deux droites déjà énoncé par Monge. Reprenant la méthode de ce dernier, il établit la formule de la distance d'un point P à une droite d en calculant la distance de P à sa projection P' sur d . Il ne se préoccupe pas du signe de l'expression obtenue³. Cette formule lui permet de calculer l'angle de deux droites. Sa méthode est semblable à celle utilisée par Monge pour calculer l'angle de deux plans. Lacroix considère des parallèles aux deux droites passant par l'origine A . Les équations de ces droites sont $y = ax$ et $y = a'x$. Soit $M'(\alpha; \beta)$ un point sur la seconde droite. La distance de ce point à la première droite est $\frac{\beta - a\alpha}{\sqrt{1 + a^2}}$. Soient M la projection de

M' sur la première droite et r la longueur AM' . On a $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$ et $\beta = a'\alpha$. Lacroix en déduit l'égalité $\sin(MAM') = \frac{a' - a}{\sqrt{1 + a^2} \sqrt{1 + a'^2}}$, d'où $\cos(MAM') = \frac{1 + aa'}{\sqrt{1 + a^2} \sqrt{1 + a'^2}}$ et enfin

$\tan(MAM') = \frac{a' - a}{1 + aa'}$. Au terme de ces calculs, Lacroix remarque que la dernière égalité

aurait pu être déduite immédiatement de la formule $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$ établie au

début du manuel, dans le chapitre consacré à la trigonométrie. Il écrit à ce propos:

« Mais cette formule repose sur celles du n° 11, que nous avons obtenues par le moyen d'une construction, et nous nous sommes proposés de tirer des seules équations des lignes tout ce qui est nécessaire pour l'application de l'algèbre à la géométrie. » [Lacroix, 1798, 81]

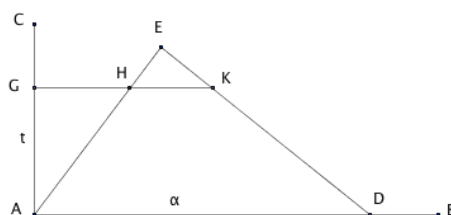
Les formules auxquelles Lacroix fait allusion sont celles donnant le sinus et le cosinus d'une somme ou d'une différence de deux angles. Afin d'établir celles-ci, Lacroix doit effectivement introduire des triangles rectangles et, par conséquent, tracer des droites et construire des perpendiculaires. Cette démarche n'est, selon lui, pas compatible avec l'idéal de pureté analytique revendiqué en particulier dans la préface de son *Traité du calcul différentiel et intégral* (cf. note 2).

Après avoir exposé ces différents résultats, Lacroix passe à des exemples. Voici le premier:

« Deux lignes droites, AE et DE , étant données par les angles qu'elles font avec une troisième AB , et par la partie AD qu'elles interceptent sur cette troisième, trouver sur une

³ Lagrange et Monge ne se préoccupaient pas non plus du signe en calculant la distance d'un point à un plan. Cette question est discutée plus loin lorsque Lacroix calcule le rayon du cercle inscrit à un triangle.

ligne AC , perpendiculaire à AB , un point G , par lequel, menant une droite GK , parallèle à AB , la partie HK , comprise entre AE et DE , soit d'une grandeur donnée.» [Lacroix, 1798, 84-85]



La droite AB est l'axe des abscisses et A est l'origine. Lacroix note α la longueur AD , a la tangente de l'angle EAD , a' la tangente de l'angle EDA et t la longueur AG . Les équations des droites AE et DE sont $y = ax$ et $y = -a'(x - \alpha)$. Comme les points H et K ont une ordonnée égale à t , l'abscisse de H est égale à $\frac{t}{a}$ et celle de K à $\frac{\alpha a' - t}{a'}$. Comme la

longueur HK doit être égale à une longueur m donnée, on a $t = \frac{(\alpha - m)aa'}{a + a'}$.

L'intérêt de ce problème ne réside pas dans son énoncé mais dans la manière dont il est résolu. Le raisonnement n'est pas fondé sur la considération de triangles semblables mais est entièrement analytique. Lacroix écrit les équations des différentes droites et calcule les coordonnées des points d'intersection comme nous le faisons aujourd'hui. Il ne lui suffit cependant pas d'obtenir la valeur numérique de t . Il doit encore, conformément à la tradition cartésienne, construire la ligne AG à partir des lignes AE , DE , AD et HK . Après avoir donné la solution, Lacroix propose encore une autre résolution du problème, fondée sur la considération de triangles semblables. En dépit de ce qu'il a affirmé précédemment, Lacroix ne paraît pas entièrement satisfait par la méthode purement analytique. A côté de la nouvelle méthode, il se sent obligé de donner également l'ancienne.

Lacroix entreprend ensuite d'appliquer les formules trouvées pour la ligne droite à la recherche des principales propriétés des triangles. Il s'inspire de près des méthodes utilisées par Lagrange dans son mémoire sur les pyramides triangulaires. Lacroix considère un triangle AMM' dont le sommet A est l'origine. Les deux autres points sont $M(\alpha; \beta)$ et $M'(\alpha'; \beta')$.

Les équations des droites AM et AM' sont donc $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ et $y = \frac{\beta'}{\alpha'}x$. En utilisant la formule

du cosinus de l'angle de deux droites, il démontre que $\cos(MAM') = \frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2cc'}$ où c , c' et c'' sont les longueurs des côtés du triangle. En calculant la distance de A à la droite MM' , il

obtient la valeur de l'aire du triangle AMM' : $\frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{2}$. On reconnaît dans cette expression

un déterminant⁴. Lacroix calcule ensuite comme Lagrange les coordonnées du centre ainsi que le rayon du cercle circonscrit au triangle. Sa méthode repose uniquement sur la formule de la distance de deux points. Il calcule aussi le rayon du cercle inscrit.

⁴ Lacroix ne se préoccupe à nouveau pas du signe.

Examinons pour terminer comment Lacroix détermine les points d'intersection d'une droite et d'un cercle. C'est la partie la plus originale de son exposé. Il démontre d'abord que les coordonnées d'un point P quelconque de la droite d d'équation $y - \beta = a(x - \alpha)$ peuvent être

mises sous la forme $x = \alpha + \frac{z}{\sqrt{1+a^2}}$, $y = \beta + \frac{az}{\sqrt{1+a^2}}$ où z est la distance entre le point P et

le point $E(\alpha; \beta)$ de la droite⁵. Lacroix donne donc des équations paramétriques de d . Si l'on veut trouver les points d'intersection M et M' de la droite d avec le cercle $x^2 + y^2 = r^2$, il

faut résoudre l'équation $z^2 + \frac{2(\alpha + \beta a)}{\sqrt{1+a^2}}z + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$. Comme le produit des racines est

constant, le produit des segments EM et EM' ne dépend pas de la droite d passant par E ; c'est le théorème du produit constant. Lacroix suppose que le point E est sur l'axe des

abscisses. On a donc $\beta = 0$ et $MM' = EM' - EM = \frac{2\sqrt{r^2(1+a^2) - a^2\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}}$. Si $MM' = 0$, la droite

est tangente en un point N et $a = \frac{r}{\sqrt{\alpha^2 - r^2}}$. Lacroix obtient ainsi la tangente trigonométrique

de l'angle entre la tangente EN au cercle issue de E et l'axe des abscisses. Il a donc résolu algébriquement le problème suivant: mener par un point pris hors d'un cercle une tangente à ce cercle. Il montre ensuite comment déterminer une tangente en un point $N(\alpha; \beta)$ du cercle

$x^2 + y^2 = r^2$ centré à l'origine A . On a $\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$ et la longueur d'une sécante comprise dans le cercle est égale à $\frac{2(\alpha + \beta a)}{\sqrt{1+a^2}}$. Pour qu'elle soit tangente, il faut que $\alpha + \beta a = 0$ ou

$a = -\frac{\alpha}{\beta}$. La droite est alors perpendiculaire au rayon AN . Ce résultat conclut la partie

consacrée aux problèmes d'intersection d'un cercle et d'une droite. La suite du chapitre est consacrée à la construction de diverses expressions algébriques et en particulier à la construction des solutions d'une équation du 2^e degré; ce type de problèmes a joué un rôle important dans la tradition cartésienne mais a disparu depuis longtemps de nos manuels. La présence de ces problèmes montre encore une fois que Lacroix se situe au carrefour entre deux traditions. Relevons enfin que la fin du chapitre est consacrée aux courbes du 2^e degré. Il s'agit de l'un des principaux sujets traités dans les ouvrages de géométrie analytique dès la naissance de cette discipline. Je ne l'aborderai cependant pas ici car il n'occupe actuellement plus qu'une place restreinte dans notre enseignement.

Les disciples de Monge et Lacroix

Après les leçons de Monge, l'ouvrage de Lacroix donne une nouvelle impulsion à l'enseignement de la géométrie analytique. Il sera rapidement suivi par plusieurs manuels

⁵ Lacroix ne relève pas que la distance z doit être munie d'un signe.

rédigés dans le même esprit. Ceux-ci traitent de la droite et du cercle puis des courbes du 2^e degré. Certains d'entre eux traitent aussi de géométrie analytique dans l'espace. Mentionnons tout d'abord le *Traité analytique des courbes et des surfaces du second degré* de Jean-Baptiste Biot [Biot, 1802]. Comme celui de Lacroix, ce manuel a été régulièrement réédité et traduit⁶. Le contenu est directement inspiré de Lacroix pour le plan et de Monge pour l'espace. Citons ensuite *l'Essai sur la ligne droite et les courbes du second degré* de Frédéric Louis Lefrançois [Lefrançois, 1801]⁷. Ce traité est succinct et se limite à la géométrie plane. A la différence de Lacroix, l'influence cartésienne y est pratiquement absente. Lefrançois présente pour la première fois plusieurs résultats figurant en bonne place dans nos manuels. Il établit ainsi les équations des bissectrices de deux droites d'équation $y = ax$ et $y = a'x$. Sa méthode repose sur le fait que les bissectrices divisent en deux les angles formés par ces deux droites. En utilisant la formule donnant la tangente de l'angle de deux droites, il montre ainsi que les équations des deux bissectrices sont de la forme $y = Ax$ où A est solution de l'équation $A^2 - 2 \frac{aa' - 1}{a + a'} A - 1 = 0$. Lefrançois démontre aussi analytiquement que les médianes et les médiatrices d'un triangle sont concourantes. Dans la seconde édition de son livre, il démontre qu'il en est de même pour les hauteurs et que le point de concours des médianes, celui des hauteurs et celui des médiatrices sont alignés. Il établit aussi analytiquement plusieurs résultats faisant intervenir des cercles. Il détermine en particulier l'équation de la droite d'intersection de deux cercles et démontre que si trois cercles se coupent deux à deux, les trois droites d'intersection sont concourantes⁸. Un autre ouvrage significatif et contemporain est le *Recueil de diverses propositions de géométrie résolues ou démontrées par l'analyse algébrique, suivant les principes de Monge et Lacroix* de Louis Puissant [Puissant, 1801]. Il ne s'agit pas d'un manuel mais, comme le titre l'indique, d'un recueil de problèmes résolus par la méthode analytique. Un grand nombre de ces problèmes font intervenir des droites et des cercles. Il est important de noter que Lefrançois et Puissant insistent sur la nouveauté de la méthode utilisée pour résoudre ces problèmes. Lefrançois écrit ainsi qu'il s'agit de «traiter les questions proposées par les seuls moyens que fournit l'Analyse, en ne tirant de la Géométrie que ce qui est absolument indispensable pour l'expression des conditions de chaque problème.»⁹ Parmi les autres ouvrages rédigés dans le même esprit, mentionnons encore les *Eléments de géométrie analytique* de Jean-Guillaume Garnier [Garnier, 1808]. Garnier établit en particulier un critère général pour que trois droites soient concourantes et donne pour la première fois une démonstration analytique du théorème des bissectrices d'un triangle.

Ces différents exemples montrent que la matière enseignée aujourd'hui au niveau gymnasial apparaît pour l'essentiel dans les manuels et recueils de problèmes rédigés par les disciples de

⁶ Dès sa 2^e édition de 1805, il portera le titre *Essai de géométrie analytique appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre*.

⁷ Une seconde édition revue et augmentée sera publiée en 1804 sous le titre *Essais de géométrie analytique*. Comme dans le cas de Biot, le changement de titre montre que l'appellation «géométrie analytique», suggérée par Lacroix, tend à remplacer l'appellation «application de l'algèbre à la géométrie».

⁸ On reconnaît ici le théorème énonçant que les axes radicaux de trois cercles pris deux à deux sont concourants. Les notions d'axe radical et de centre radical seront étudiées quelques années plus tard de manière systématique par Louis Gaultier de Tours [Gaultier de Tours, 1812].

⁹ [Lefrançois, 1804, v]

Monge et Lacroix entre 1800 et 1810. Certains raisonnements seront simplifiés par leurs successeurs¹⁰, mais la principale différence entre les manuels de cette époque et les nôtres est l'utilisation du langage vectoriel. Le calcul vectoriel ne sera cependant formalisé qu'à la fin du 19^e siècle. Il sera d'abord utilisé principalement en physique et son introduction dans l'enseignement de la géométrie analytique au niveau gymnasial n'aura lieu qu'au début des années 1950¹¹. Mais il s'agit là d'une autre histoire.

Bibliographie

Biot Jean-Baptiste

1802 *Traité analytique des courbes et des surfaces du second degré*, Duprat, Paris; 2^e édition sous le titre *Essai de géométrie analytique appliqué aux courbes et aux surfaces du second ordre*, Paris, 1805

Garnier Jean-Guillaume

1808 *Elémens de Géométrie analytique*, Courcier, Paris

Gaultier de Tours Louis

1812 Mémoire sur les Moyens généraux de construire graphiquement un Cercle déterminé par trois conditions, et une Sphère déterminée par quatre conditions, *Journal de l'Ecole polytechnique*, 16^e cahier, 124-214

Grimm G. und Rueff M.

1952 *Analytische Geometrie*, Orell Füssli, Zürich

Lacroix Sylvestre

1797 *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, Duprat, Paris

1798 *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'algèbre à la géométrie*, Duprat, Paris

Lefrançois Frédéric Louis

1801 *Essais sur la ligne droite et les courbes du second degré*, Duprat, Paris; 2^e édition sous le titre *Essais de géométrie analytique*, Courcier, Paris, 1804

Plücker Julius

1828 *Analytisch-geometrische Entwicklungen*, erster Band, Baedeker, Essen

Puissant Louis

1801 *Recueil de diverses propositions de géométrie, résolues ou démontrées par l'analyse algébrique, suivant les principes de Monge et Lacroix*, Duprat, Paris

¹⁰ Le cas des bissectrices offre un intéressant exemple de simplification. Dans le premier tome de son livre *Analytisch-geometrische Entwicklungen* [Plücker, 1828], ouvrage offrant une synthèse des résultats établis par Lacroix et ses successeurs, Plücker établit les équations des bissectrices de deux droites en utilisant, comme nous le faisons aujourd'hui, la formule de la distance d'un point à une droite. Il en déduit alors immédiatement le théorème des bissectrices dans un triangle. Garnier avait pour sa part consacré cinq pages de calcul à ce problème en écrivant d'abord les équations des bissectrices selon la méthode de Lefrançois puis en calculant les coordonnées des points d'intersection de ces droites deux à deux.

¹¹ L'ouvrage *Analytische Geometrie* [Grimm et Rueff, 1951] publié par la *Société suisse des maîtres de mathématiques* est à cet égard particulièrement intéressant. La préface témoigne des discussions qui ont lieu à cette époque pour savoir s'il convient d'adopter une approche exclusivement vectorielle ou non. Les auteurs proposent une solution intermédiaire consistant à présenter simultanément le traitement analytique traditionnel et le traitement vectoriel.



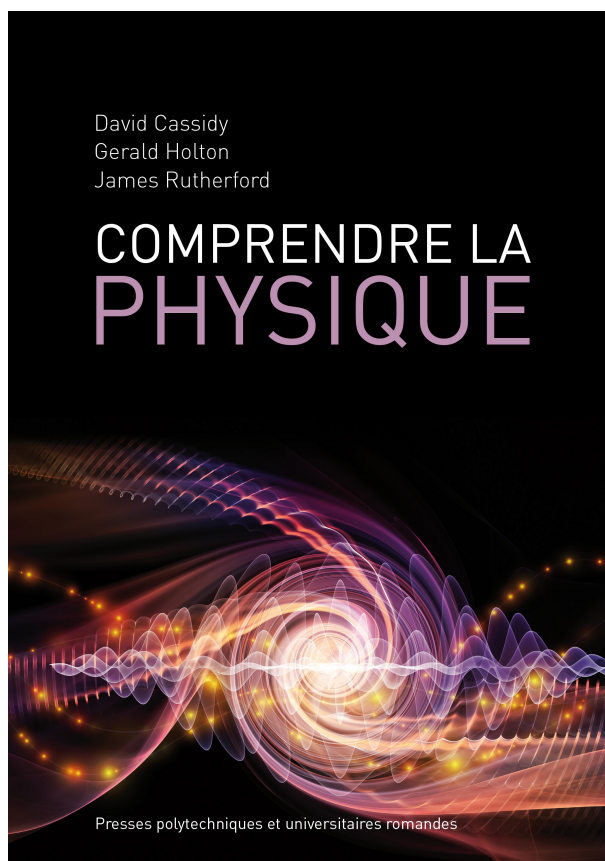
Livre à recommander aux enseignants de physique

Davet Stéphane, Collège de l'Abbaye de St-Maurice, davet.stephane@lyca.eduvs.ch

L'ouvrage *comprendre la physique* aux Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR), qui vient de paraître, est un manuel de bonne qualité pour les enseignants en physique. J'ai pu constater un véritable effort pour rendre cette science extraordinaire accessible au plus grand nombre. Il ne contient que peu de formules et les idées sont expliquées de manière intéressantes, ce qui permet d'utiliser de nouvelles stratégies pour introduire certains concepts délicats en classe.

Ce livre est l'aboutissement du célèbre *Project Physics course* américain, dont l'objectif est de rendre la physique plus attrayante. Il a notamment été écrit pour un lectorat non scientifique intéressé aux phénomènes et aux mystères de la Nature.

Suivant le développement historique des idées, il retrace les principaux concepts dans un cadre humaniste, explique l'origine des principes fondateurs, ainsi que les limites auxquelles ceux-ci se heurtent. Très didactique et bien illustré, quoiqu'en noir et blanc, il propose de nombreuses questions d'auto-évaluation en fin de chaque chapitre, afin de permettre au lecteur de vérifier les connaissances acquises. Disponible pour la première fois en langue française, ce livre n'a pas la vocation de servir directement de manuel scolaire dans les classes, mais constitue plutôt un ouvrage de référence pour les enseignants et les élèves.



Congrès UdPPC Lyon, 27-28-29 octobre 2014

Roulet Didier, didier.roulet@infomaniak.ch

Le congrès annuel de l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie, qui a réuni environ 500 participant(e)s, a eu lieu cette année à Lyon. L'UdPPC a la gentillesse de convier la CRP à participer, et c'est le compte-rendu de votre serviteur que vous lisez ici. Parfaitement organisé d'un bout à l'autre (même la météo a été constamment rayonnante!) par une équipe qui s'est donnée sans compter pour que tout fonctionne depuis l'accueil des participants jusqu'à leur départ en passant par la ponctualité des présentations, des repas, des déplacements, ce congrès nous a permis d'assister à des conférences, tant plénières que partielles, passionnantes, données par des passionnés, tous experts de haut niveau dans leur spécialité.

De la stabilité des systèmes dynamiques sur des temps longs aux effets des radiations sur les tissus biologiques, des quasi-cristaux aux écoulements nanoscopiques, ce ne furent que d'enthousiasmantes conférences, visites ou ateliers. Ce fut bien sûr aussi l'occasion d'échanger avec les collègues français(e)s sur les différences et les ressemblances dans les cursus respectifs de formation des étudiants et des enseignants, de rencontrer les fabricants de matériel pour les expériences, de pouvoir feuilleter chez les éditeurs une part de leur collection bien plus grande que celle habituellement disponible en librairie : bref, trois magnifiques journées (bien remplies !...) qui m'ont enchanté. Merci encore à l'UdPPC pour son invitation, et à l'année prochaine à La Rochelle.

Ja - Oui - Sì

Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematik und Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und Lehrer (VSG) werden.

J'aimerais devenir membre de la Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique (SSPMP) et de la société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire (SSPES).

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

Beitrag/Montant/Quota: Fr. 120.- (VSG -SSPES - SSISS) + Fr. 40.- (SSIMF - SSPMP - VSMP)

Frau/Mme/Sig.ra Herr/M./Sig. Prof. Dr.

Name/Nom/Cognome:

Vorname/Prenom/Nome:

Adresse/Indirizzo (privat/privato):

Plz-Ort/NP-Ville/CAP -Luogo:

(Land/Pays/Paese):

Email: (Tel):

(Geburtsdatum/Date de naissance/Data di nascita):

Sprache/Langue/Lingua: D F I.

Schule/école/scuola: Kanton/canton/cantone:

Kategorie/Catégorie/Categoria: activ/actif/attivo passive/passif/passivo

Student/in, étudiant(e), studente/ssa.

Einsenden an/envoyer à/inviare a:

VSG -SSPES -SSISS, Sekretariat (Frau Doris Lazzeri), 3000 Bern

oder per Internet: www.vsg-sspes.ch

Impressum

Herausgeber — Éditeur

VSMP – SSPMP–SSIMF

Korrespondenz — Correspondance

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Layout — Mise en page

Samuel Byland samuel.byland@mng.ch
Rain 14 Tel. 032 512 50 84
5000 Aarau

Inserateverwaltung — Publicité

Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch
Weinbergstrasse 3 Tel. 055 410 62 36
8807 Freienbach

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

— Tarifs pour les annonces et les annexes

Inserate:
ganzseitig Fr. 500.–
halbseitig Fr. 300.–
Beilagen:
bis 20 g Fr. 500.–
über 20 g nach Vereinbarung

Adressänderungen — Changement d'adresse

VSMP Mitglieder — *Membres de la SSPMP*:
VSG – SSPES – SSISS
Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)
3000 Bern
Tel. 056 443 14 54 / Fax. 056 443 06 04
information@vsg-sspes.ch

übrige Abonnenten — *autres abonnées*:
Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Auflage — Tirage

900 Exemplare
erscheint dreimal jährlich

Präsident VSMP — SSPMP — SSIMF

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Domenico Galli 44
6600 Locarno-Solduno Tel. 091 751 14 47

Deutschschweizerische Mathemattikkommission

Daniela Grawehr grawehr@kfanet.ch
Schützenstrasse 36 Tel. 041 810 49 88
6430 Schwyz

Deutschschweizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@gymburgdorf.ch
Pestalozzistrasse 17 Tel. 034 423 46 43
3400 Burgdorf

Commission Romande de Mathématique

José Luis Zuleta joseluis.zuletaestrugo@epfl.ch
Avenue de Rumine 42 Tél. 021 624 25 46
1005 Lausanne

Commission Romande de Physique

Stéphane Davet davet.stephane@lyca.eduvs.ch
Av. Plantaud 28B Tél. 024 471 21 83
1870 Monthey

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Luca Rovelli lucarovelli@ticino.com
Via Pedmunt 10 Tel. 091 825 76 69
6513 Monte Carasso

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

— Délais de rédaction (de parution)

Nr. 128	31.03.2015 (20.05.2015)
Nr. 129	31.07.2015 (20.09.2015)
Nr. 130	30.11.2015 (20.01.2016)

Druck und Versand — Imprimerie

Niedermann Druck AG
Letzistrasse 37
9015 St. Gallen
www.niedermannruck.ch

Internet-Adressen — Adresses Internet

www.vsmf.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch