



Bulletin

Juni 2011 – Juin 2011

N° 116

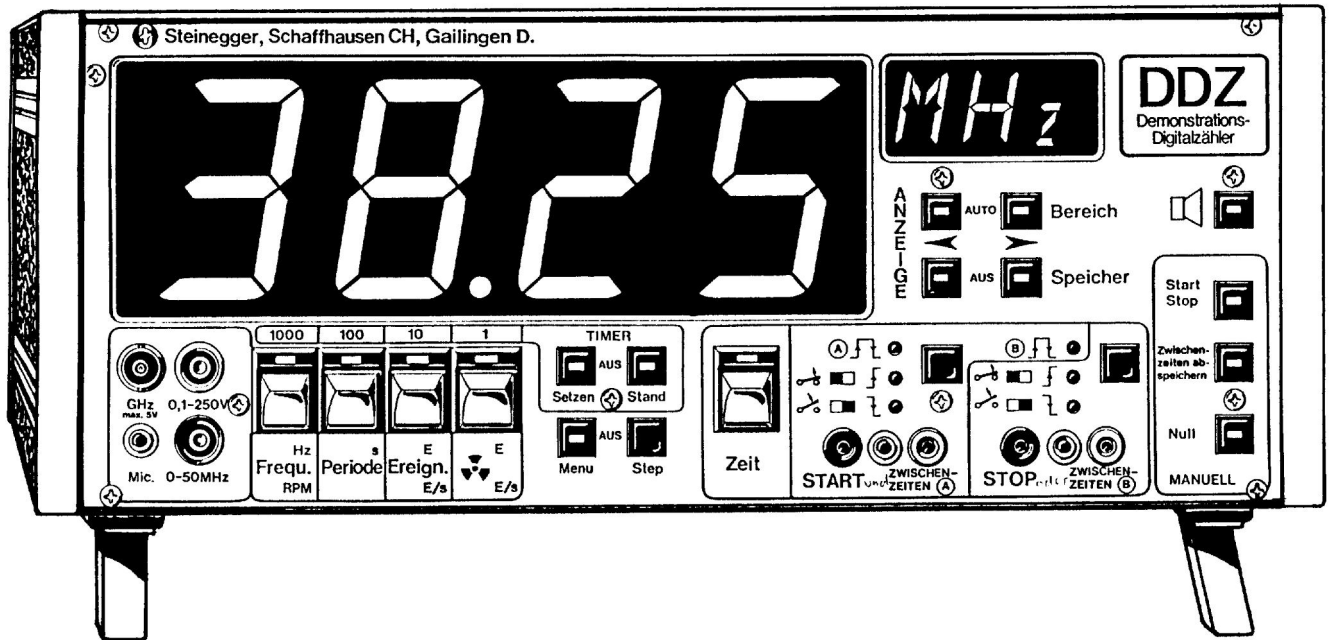


VSMP – SSPMP – SSIMF

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica

Demonstrations-Digitalzähler DDZ

Art. Nr. 51



Preis inkl. MWSt nur SFr 2'330.-

Kompakt-Multifunktionszähler der Spitzenklasse!

- 56 mm hohe helle Ziffern- und 3-stellige Einheitenanzeige
- Breitestes Anwendungsspektrum und selbsterklärende Bedienung
- Misst Zeitintervalle, Frequenzen, Perioden, RPM usw.
- Timerfunktion, Ereigniszählung, Zählrohranschluss, akustische Rückmeldung, 50 Messwertspeicher, bidirektionale serielle Schnittstelle, Hilfsspeisungen für Zusatzgeräte
- Auflösung von bis zu 10 Ziffern durch Ziffernschiebung
- Automatische und manuelle Bereichsumschaltung, vollautomatische Signalanpassung dank Triggerautomatik
- Hervorragendes Preis-/Leistungsverhältnis

Die kostenlose Kurzbeschreibung "Der neue Demonstrations-Digitalzähler DDZ" erhalten Sie direkt vom Hersteller:

Steinegger & Co.
Rosenbergstrasse 23
CH-8200 Schaffhausen



☎ : 052-625 58 90
Fax : 052-625 58 60
Internet: www.steinegger.de

In dieser Nummer – *Dans ce numéro*

DPK

Deutscheschweizerische Physikkommission 3

Martin Lieberherr
Brennweite einer Meniskuslinse 3

Dardan Lajqi
Darstellung von Objekten nahe Lichtgeschwindigkeit 5

Systemaviatik 9

Deutscheschweizerische Mathematikkommission 11

Peter Gallin
Exzentrische Kuchenhalbierung 11



Hans Ulrich Keller
Wer erhält zuerst drei Punkte? 20

Peter Hänslì
Berichte zur Maturarbeiten 28

Annina Schmid
Ein Satz zum geometrischen Mittel zweier Dreiecksseiten 30

**Commission Romande de Physique 31**

Jean-Daniel Monod
Une éolienne sur le toit du Gymnase de Nyon 31

**Commission Romande de Mathématiques 33**

Jean Piquerez
Le deltaèdre convexe à 12 faces 33

Kurse	Mathématiques et sciences de l'Univers	38
	Do you speak physics? Parlez-vous les maths?	39
	Spektroskopie in der Astronomie	40
<hr/>		
	Impressum	42

Internet-Adressen – *Adresses Internet*

<http://www.vsmf.ch> — <http://www.sspmp.ch> — <http://www.ssimf.ch>

Page de titre

Éolienne sur le toit du Gymnase de Nyon, voir article de Jean-Daniel Monod, Page 31.

Brennweite einer Meniskuslinse

Martin Lieberherr

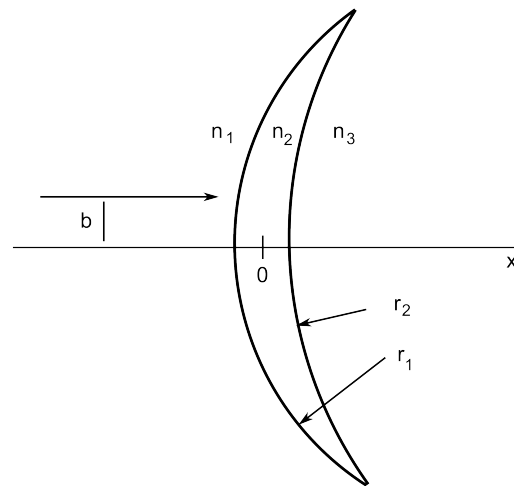
Mathematisch Naturwissenschaftliches Gymnasium Rämibühl, 8001 Zürich

Einleitung

Letztes Jahr musste einer meiner Übungsstudenten in seiner Lektion optische Linsen behandeln. Ein Schüler fragte ihn, was mit der Brennweite passiere, wenn bei einer asymmetrischen Linse das Licht von der anderen Seite komme. Natürlich wusste der Student die Antwort nicht. Schaut man in der DMK/DPK-Formelsammlung die so genannte Linsenmacherformel nach, so sieht man sofort, dass vordere und hintere Brennweite gleich sind. Allerdings gilt die genannte Formel in der Formelsammlung nur, falls die Medien auf beiden Seiten der Linse denselben Brechungsindex haben. Wie lautet die Linsenmacherformel, wenn die Brechungsindizes verschieden sind? Als Beispiel wählte ich eine Meniskuslinse (Abb. 1), weil die Linse unsymmetrisch ist und ich altersweitsichtig werde.

Abbildung 1: Meniskuslinse

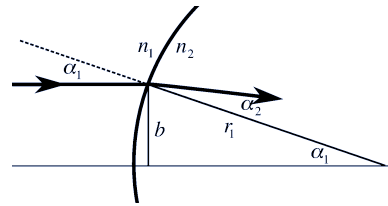
Eine konvexkonkave Sammellinse mit Krümmungsradien r_1 und r_2 aus Glas mit Brechungsindex n_2 befinde sich an der Grenze zweier Medien mit Brechungsindizes n_1 und n_3 . Die optische Achse x verläuft durch die zwei Krümmungsmittelpunkte. Der Nullpunkt, von dem aus die Brennweiten gemessen werden, befindet sich im Linseninnern. Ein Lichtstrahl falle im Abstand b von der opt. Achse auf die Linse.



Linsenmacherformel im asymmetrischen Fall

Ein Lichtstrahl verlaufe im Medium mit Brechungsindex n_1 parallel zur optischen Achse und treffe auf die konvexe Fläche der Linse mit Krümmungsradius r_1 (Abb. 1). Der Linsenkörper habe Brechungsindex n_2 . Im angrenzenden Medium mit Brechungsindex n_3 kreuze der zweimal gebrochene Strahl die optische Achse. Der Strahl verlaufe achsennah, dann können wir im Brechungsgesetz $\sin \alpha \approx \alpha$ setzen. Die Linse sei sehr dünn. So finden die Brechungen an Vorder- und Rückseite der Linse auf gleicher Höhe statt und wir müssen uns keine Gedanken machen, von wo aus wir die Brennweite messen.

Abbildung 2: Der einfallende Strahl falle im Abstand b von der optischen Achse unter dem Winkel α_1 auf die vordere Fläche der Linse, die Krümmungsradius r_1 hat. Brechungswinkel ist α_2 .



Der einfallende Strahl habe Abstand b von der optischen Achse. Dann ist der Einfallswinkel auf die konvexe Fläche $\alpha_1 = b/r_1$ (Abb. 2). Das Brechungsgesetz $n_1\alpha_1 = n_2\alpha_2$ liefert den ersten Brechungswinkel α_2 . Der Einfallswinkel bei der hinteren Linsenfläche ist $\beta_2 = b/r_2 + \alpha_2 - \alpha_1$ und der Brechungswinkel β_3 an der hinteren Fläche folgt dann aus $n_2\beta_2 = n_3\beta_3$. Der zweimal gebrochene Strahl läuft unter dem Winkel $b/r_2 - \beta_3$ zur optischen Achse und kreuzt diese im Abstand der hinteren Brennweite $f_3 = b/(b/r_2 - \beta_3)$. Mit etwas Algebra folgt für die Meniskuslinse:

$$\frac{1}{f_3} = \frac{n_2 - n_1}{n_3 r_1} - \frac{n_2 - n_3}{n_3 r_2} \quad (\text{hintere Brennweite})$$

Kommt das Licht von der anderen Seite (in Abb. 1 von rechts), so erhält man:

$$\frac{1}{f_1} = -\frac{n_2 - n_3}{n_1 r_2} + \frac{n_2 - n_1}{n_1 r_1} \quad (\text{vordere Brennweite})$$

Die vordere und hintere Brennweite einer Linse sind gleich, wenn die Materialien vor und hinter der Linse gleichen Brechungsindex haben ($n_1 = n_3$). Unterscheiden sich hingegen die Medien, z.B. bei Immersionsobjektiven oder Kontaktlinsen, so unterscheiden sich auch vordere und hintere Brennweite. Als extremes Beispiel wählen wir $n_3 = n_2$. Dann ist

$$\frac{1}{f_3} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 r_1} \quad \text{respektive} \quad \frac{1}{f_1} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 r_1}$$

Im normalerweise behandelten Fall, $n_1 = n_3$, folgt $f_3 = f_1 = f$ und die Linsenmacherformel für die konvexkonkave Linse:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

20. April 2011 / Martin Lieberherr

Darstellung von Objekten nahe Lichtgeschwindigkeit

Dardan Lajqi, Jonathan Theodore

Einleitung

Seit Einstein 1905 die spezielle Relativitätstheorie herausbrachte, wissen wir, dass die Welt nicht mehr so einfach zu verstehen ist. Zwei einfache Postulate waren Grundlage dieser Theorie: Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und die Gleichheit der physikalischen Gesetze in allen Inertialsystemen. Durch diese zwei Postulate kann man herleiten, dass bei bewegten Objekten und ruhenden Objekten die Zeit nicht gleich schnell verläuft und dass bewegte Objekte in Bewegungsrichtung kontrahiert sind. Mit Letzterem beschäftigen wir uns in diesem Artikel. Und zwar wollen wir einen Weg finden, ein bewegtes Objekt „richtig“ darzustellen.

Darstellung schnellbewegter Objekte

Um eine Seitenlänge bei hohen Geschwindigkeiten zu berechnen, gibt es einen Stauchungsfaktor. Dieser ist $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Die Geschwindigkeit eines Objekts ist vorgegeben und so kann man den Stauchungsfaktor errechnen und diesen mit der Seitenlänge in Bewegungsrichtung multiplizieren. Das Problem dabei ist, dass man die Lichtlaufzeit nicht berücksichtigt. Das Licht benötigt eine gewisse Zeit, bis es beim Auge oder bei der Kamera ankommt, und dieser Effekt verändert wieder alles.

Von Vorteil wäre nun, wenn wir eine Formel hätten, die die Laufzeit enthält. Diese finden wir bei der Lorentz-Transformation.

Die **Lorentz-Transformation**:

$$\begin{array}{ll}
 X' = \gamma \cdot (X - vt) & X = \gamma \cdot (X' + vt') \\
 y' = y & y = y' \\
 z' = z & \text{und} \quad z = z' \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
 t' = \gamma \cdot \left(t - \frac{vX}{c^2}\right) & t = \gamma \cdot \left(t' + \frac{vX'}{c^2}\right)
 \end{array}$$

Man kann sich jedes Objekt aus einer unendlichen Zahl von Punkten vorstellen. Alle Koordinaten dieser Punkte sind uns bekannt. Die Aufgabe besteht darin, sie in unser Inertialsystem umzurechnen.

Wir stellen uns nun vor, dass wir ruhen und dass das Objekt auf uns mit der Geschwindigkeit v zufliegt. Das Objekt befindet sich im Inertialsystem K und wir uns im K' . Nun wählen wir einen beliebigen Zeitpunkt t und schauen, welche Koordinaten ein beliebiger Punkt des Objekts hat. Wir notieren die Koordinaten und rechnen sie ins Inertialsystem K' um. Natürlich müssen wir auch noch die Zeit t in t' umrechnen. Das machen wir mit diesen vier Formeln

$$x' = \gamma \cdot (x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma \cdot \left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

Nun haben wir $(x/y/z)$ in unser ruhendes Inertialsystem K' umgerechnet. Wir müssen noch den Zeitpunkt herausfinden, zu dem die Kamera das Bild macht. Dies schaffen wir, angenommen die Kamera liegt auf dem Origo, in dem wir die drei Koordinaten vom ruhenden System nehmen und sie durch die Lichtgeschwindigkeit teilen und t' dazurechnen.

$$\frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{c} + t' = t'_2 \quad (I)$$

Der Zeitpunkt, zu dem die Kamera das Bild schießt, ist t'_2 . Nun müssen wir herausfinden, wo die anderen Punkte zum Zeitpunkt t'_2 sind. Dazu nehmen wir Gleichung (I) und setzen $y'=y$ und $z'=z$ ein.

$$\frac{\sqrt{x'^2 + y^2 + z^2}}{c} + t' = t'_2$$

Eine Variable haben wir noch nicht ersetzt, nämlich t' . Dazu verwenden wir eine Formel der Lorentztransformationen.

$$x = \gamma \cdot (x' + vt')$$

Diese Formel lösen wir nach t' auf:

$$t' = \frac{x - \gamma x'}{\gamma v}$$

Nun setzen wir das in die Gleichung ein.

$$\frac{\sqrt{x'^2 + y^2 + z^2}}{c} + \frac{x - \gamma x'}{\gamma v} = t'_2$$

Um diese Gleichung nach x' aufzulösen, nehmen wir Mathematica zur Hilfe.

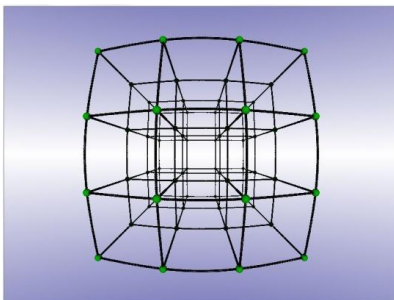
$$\text{In[7]:= Solve}\left[\left\{\frac{\sqrt{x1^2 + y^2 + z^2}}{c} + \frac{x - y1 + x1}{y1 * v} = t2\right\}, \{x1\}\right]$$

$$\text{Out[7]= } \left\{ \left\{ x1 \rightarrow \frac{c^2 x y1 - c^2 t2 v y1^2 - \sqrt{c^2 v^2 x^2 y1^2 - 2 c^2 t2 v^3 x y1^3 + c^2 t2^2 v^4 y1^4 + c^2 v^2 y^2 y1^4 - v^4 y^2 y1^4 + c^2 v^2 y1^4 z^2 - v^4 y1^4 z^2}}{c^2 y1^2 - v^2 y1^2} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ x1 \rightarrow \frac{c^2 x y1 - c^2 t2 v y1^2 + \sqrt{c^2 v^2 x^2 y1^2 - 2 c^2 t2 v^3 x y1^3 + c^2 t2^2 v^4 y1^4 + c^2 v^2 y^2 y1^4 - v^4 y^2 y1^4 + c^2 v^2 y1^4 z^2 - v^4 y1^4 z^2}}{c^2 y1^2 - v^2 y1^2} \right\} \right\}$$

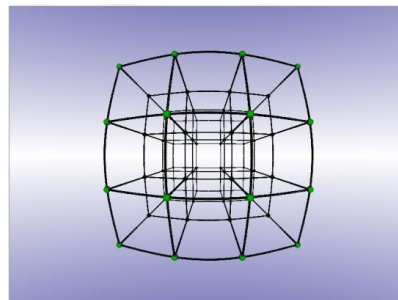
Da es eine quadratische Gleichung ist, erhält man zwei Lösungen. Beim Programmieren haben wir später festgestellt, dass beide Lösungen richtig sind. Die Lösung mit dem Pluszeichen braucht man bei positiven Geschwindigkeiten. Die Lösung mit dem Minuszeichen bei negativen Geschwindigkeiten. Nun können wir alle Punkte in unser Inertialsystem K' übertragen.

Beispiel

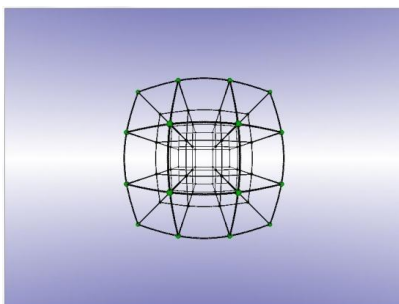
Um unsere Lösung zu testen, haben wir es auch gleich an einem Beispiel ausprobiert. Dazu liessen wir einen Würfel mit verschiedenen Geschwindigkeiten auf uns zufliegen.



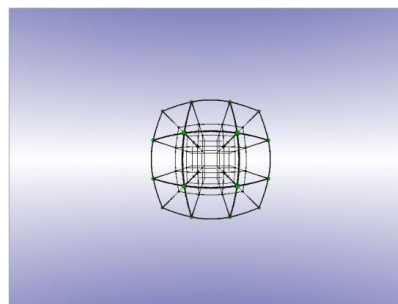
70% der Lichtgeschwindigkeit



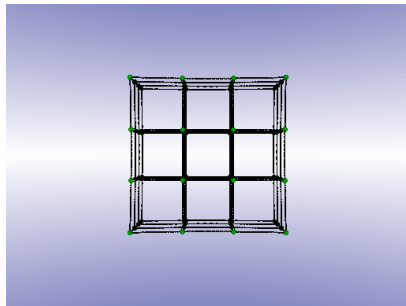
80% der Lichtgeschwindigkeit



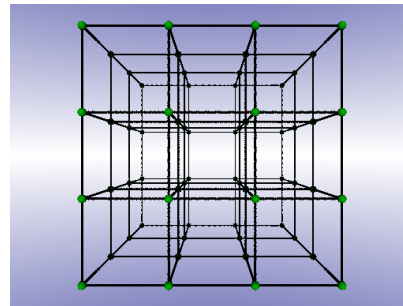
90% der Lichtgeschwindigkeit



95% der Lichtgeschwindigkeit



-80% der Lichtgeschwindigkeit



0% der Lichtgeschwindigkeit

Erklärung der sichtbaren Effekte

Bei den Bildern, bei denen die Geschwindigkeit positiv ist, sehen wir eine Verlängerung des Würfels in die Tiefe. Es ist das Gegenteil von dem, was man erwartet, aber es lässt sich durch die Lichtlaufzeit begründen. Wenn die Geschwindigkeit positiv ist, bewegt sich der Würfel mit der Geschwindigkeit v auf die Kamera zu. Stellen wir uns 2 Punkte im Würfel vor, einer vorne, einer hinten. Wenn die beiden Punkte gleichzeitig einen Lichtstrahl zur Kamera werfen, wird der Lichtstrahl vom vorderen Punkt zuerst ankommen. Damit beide Lichtstrahlen gleichzeitig ankommen, muss der vordere Punkt seinen Lichtstrahl später werfen, dabei bewegt er sich auf die Kamera zu und so kommt es, dass der Würfel verlängert aussieht. Der Effekt der Lichtlaufzeit hebt somit den Effekt der Längenkontraktion auf. Auch die Krümmung kann durch die Lichtlaufzeit erklärt werden, da ein Punkt aussen am Würfel den längeren Weg zur Kamera hat, als ein Punkt in der Mitte vom Würfel.

Wenn die Geschwindigkeit negativ ist, dann bewegt sich der Würfel von der Kamera weg. Der Lichtlaufzeiteffekt wirkt dann genau umgekehrt. Der Würfel wird in Bewegungsrichtung gekürzt. Die Effekte der Lichtlaufzeit und der Längenkontraktion summieren sich.

Schlusswort

Wir danken Herrn Pierre Mandrin, dass er unsere Arbeit überprüft und unsere Ergebnisse mit der Aberrationsmethode bestätigt hat.

Quellen

<http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de>
<http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/bewegung/bewegung3.html>
<http://www.educ.ethz.ch/unt/um/phy/mp/relativ/index>
<http://f-lohmueller.de/>
<http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/phantom/pdnw97.pdf>

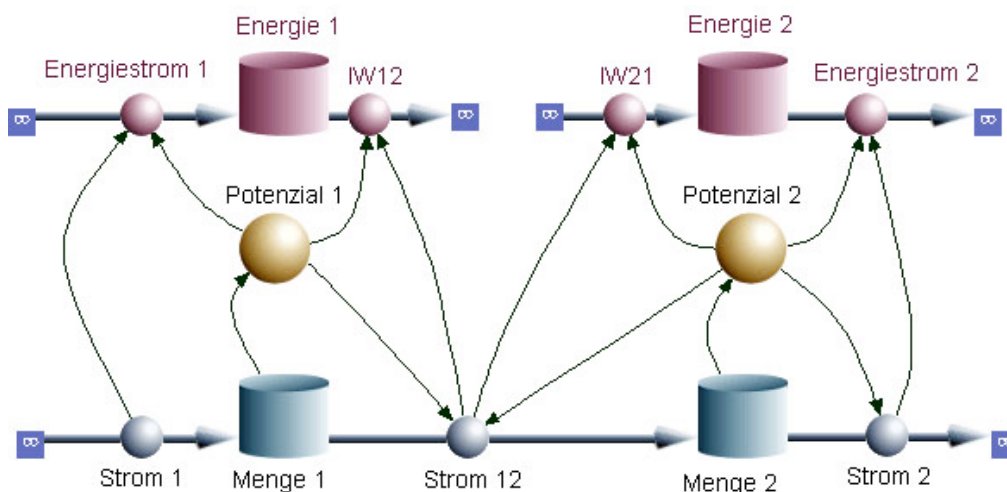
Software:
<http://www.povray.org/>

Systemaviatik

Der Verein Systemdynamik im Unterricht und die School of Engineering der ZHAW (vormals Technikum Winterthur) bieten unter dem Titel Systemaviatik Unterstützung bei Maturaarbeiten an. Im Rahmen dieses Projekts, das die Gebert RUF Stiftung finanziell unterstützt, fördern wir Schülerinnen und Schüler, welche die systemdynamische Modellbildung als Methode in ihrer Maturaarbeit einsetzen wollen. Die Unterstützung umfasst einen Einführungskurs, Weiterbildungskurse für Lehrkräfte sowie individuelle Betreuung. Letztes Jahr haben fünfzehn Lehrerinnen und Lehrer sowie sieben Schüler von diesem Angebot gebrauch gemacht.

Die in der Maturaarbeit zu bewältigende Fragestellung sollte mit der Luftfahrt zusammen hängen, wobei das Gebiet ziemlich weit gefasst werden kann. So liegt ein Schüler, welcher die Dynamik des Eckballs untersuchen möchte, genauso im Fokus dieses Projekts, wie die Schülerin, die das Flugverhalten eines Bumerangs modellieren will. Denkbar sind auch Problemstellungen, die mehr mit dem Menschen als der Maschine zu tun haben. Dazu gehört das Atmen in grosser Höhe, die Belastung des Blutkreislaufs im starken Gravitationsfeld oder die Dynamik der Stäbchen und Zäpfchen der Netzhaut unter schnell wechselnden Lichtverhältnissen. Entwicklungsszenarien für die Luftfahrt, die CO₂-Problematik oder dynamische Aspekte von Logistiksystemen sind weitere Themen, die mit Hilfe der Systemdynamik analysiert werden können. Etwas gewagter und in den Ergebnissen stärker zu hinterfragen sind Modelle zum emotionalen Verhalten von Personen unter extremen Bedingungen.

Die systemdynamische Modellbildung, die in den fünfziger Jahren von J. Forrester am MIT entwickelt worden ist, eignet sich speziell für Anwender, die über wenig mathematische Kenntnisse verfügen. Weil die Systemdynamik nur vier Element (Speicher, Fluss, Variable und Kausalpfeil) kennt, lassen sich die Grundzüge der Methode in einem halben Tag vermitteln. Trotz oder vielleicht wegen ihrer holzschnittartigen Semantik findet man die Systemdynamik in vielen Gebieten der wissenschaftlichen Forschung wie Verfahrenstechnik, Betriebswirtschaft oder Ökologie.



Am Technikum Winterthur/ ZHAW wird die systemdynamische Methode seit 20 Jahren im Physikunterricht eingesetzt und bildet heute in einigen Studiengängen wie Wirtschaftsingenieurwesen oder Aviatik einen festen Bestandteil der Grundausbildung. Studierende lernen so ab der ersten Woche, dynamische Systeme zu modellieren, Simulationsergebnisse zu analysieren und Modellstrukturen anhand von Messungen zu validieren. Mit dem Projekt Systemaviatik wollen wir für interessierte und motivierte Schülerinnen und Schüler eine Tür öffnen, durch die sie in eine Welt eintreten können, die noch vor dreissig Jahren nur den Wissenschaftlern zugänglich gewesen ist, die über genügend Rechenleistung verfügen konnten.

Links

Systemaviatik	www.systemaviatik.ch
Verein Systemdynamik im Unterricht	www.sysdyn.ch
School of Engineering /ZHAW	www.engineering.zhaw.ch
Gebert Rüt Stiftung	www.grstiftung.ch
System Dynamics Society	www.systemdynamics.org



Exzentrische Kuchenhalbierung

Peter Gallin, Universität Zürich

1 Einleitung

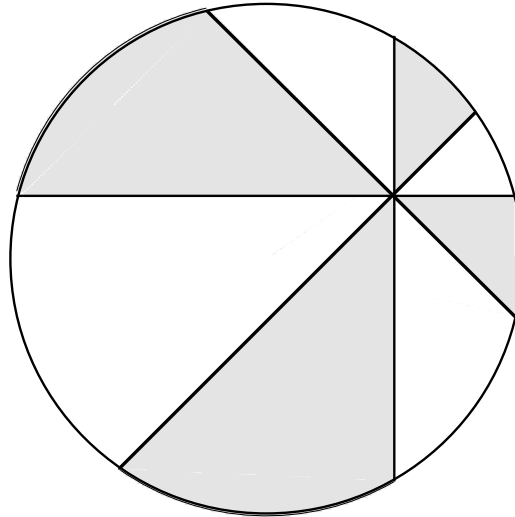


Abbildung 1: Exzentrische Halbierung eines Kuchens

Unterteilt man einen kreisrunden Kuchen (oder Pizza) mit vier geraden Schnitten derart, dass alle Schnitte durch einen beliebigen Punkt des Kreisinnern gehen und je zwei benachbarte Geraden einen 45° -Winkel miteinander einschliessen, so zerfällt der Kuchen in 8 Teile. Diese Teile nennen wir — sofern der beliebige Punkt nicht im Kreiszentrum liegt — Pseudosektoren, da sie wie Kreissektoren aussehen, aber eben keine wirklichen Kreissektoren sind. Wählt man nun vier nicht aneinander angrenzende Pseudosektoren aus — sie sind in Abbildung 1 gefärbt —, so beinhalten sie zusammen immer die halbe Kreisfläche unabhängig von der Lage des beliebigen Punktes. Diese Behauptung, in der Literatur auch als Pizza-Theorem¹ bezeichnet, soll hier auf verschiedene Arten bewiesen werden: Mit Hilfe eines Puzzles, dann elementargeometrisch, dann analytisch und in der Verallgemeinerung auf n gefärbte Pseudosektoren (n gerade und $n > 2$) einmal mit Vektorrechnung und einmal analytisch und schliesslich im allgemeinen Fall wiederum elementargeometrisch.

2 Zerlegung der Figur in ein Puzzle

Ein ganz elementarer Beweis der obigen Behauptung kann durch den Einsatz der Symmetrie gewonnen werden. Wir legen ein Koordinatensystem durch den Kreismittelpunkt M und nehmen an, dass die vier Schnitte parallel oder mit 45° geneigt zu den Achsen verlaufen. Wir bezeichnen mit P den Punkt, in dem sich die vier Kuchenschnitte treffen. Nun spiegeln wir P mitsamt den vier Schnitten an M , an den beiden Koordinatenachsen und an den Winkelhalbierenden des Koordinatensystems. So bilden die Bildpunkte von P ein Achteck, welches in Abbildung 2 fett ausgezogen ist. Wir betrachten zuerst das Äussere des Achtecks. Aus Symmetriegründen finden wir kongruente Stücke, und zwar 4 Stücke a , je 8 Stücke b , c und d , 4 Stücke e , 12 Stücke f , 8 Stücke g und 12 Stücke x . Man erkennt sofort, dass bei jeder Sorte gleich viele Stücke gefärbt und ungefärbt sind. Ausserhalb des Achtecks ist also schon einmal die Gleichheit der gefärbten und ungefärbten Stücke nachgewiesen. (Falls P weiter gegen die Kreisperipherie wandert, können gewisse Stücke verschwinden,

¹Weiterführendes und Literatur unter „http://en.wikipedia.org/wiki/Pizza_theorem“ (10. Januar 2011)

was aber den Beweis nicht ändert, da das Achteck immer innerhalb des Kreises liegt.) Innerhalb des Achtecks könnte man ähnlich vorgehen, muss aber in der Regel Flächenverwandlungen vornehmen. Dank des schraffierten Trapezes im Achteck kann man aber die Gleichheit des gefärbten und ungefärbten Anteils direkt erkennen: Das schraffierte Trapez gehört zur ungefärbten Fläche und entspricht einem kongruenten gefärbten Trapez innerhalb des Achtecks. Der ungefärbte Rest des Achtecks ist offensichtlich gleich gross wie der gefärbte Rest.² Ein raffinierterer Puzzle-Beweis für allgemeines, gerades $n > 2$ wird am Schluss in Abschnitt 7 vorgestellt.

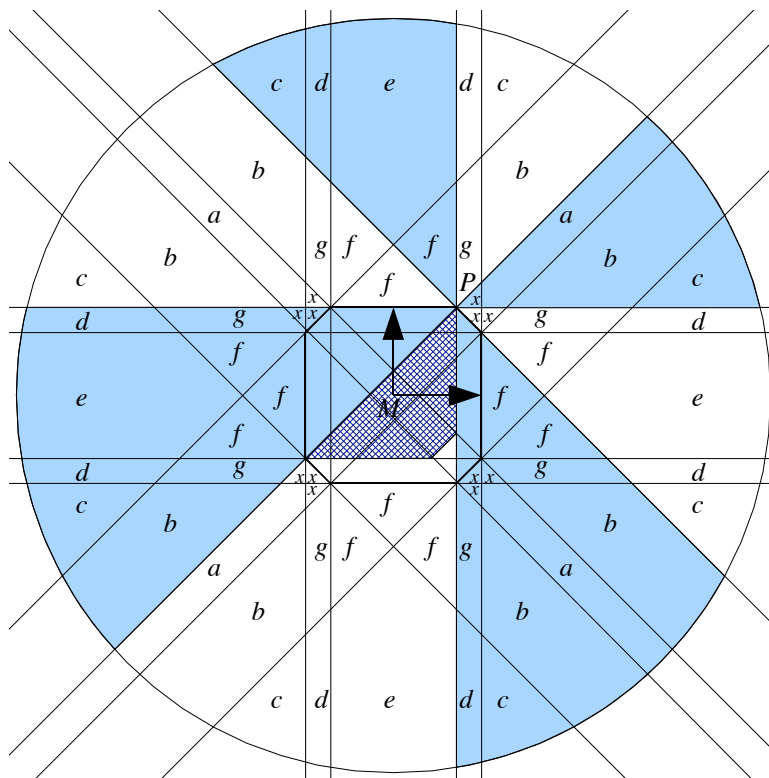


Abbildung 2: Punkt- und Achsensymmetrische Ergänzung der Kuchenschnitte

3 Elementargeometrischer Beweis mit einer ersten Verallgemeinerung

Wir verallgemeinern das Problem leicht, indem wir die gefärbten Pseudosektoren in Abbildung 1 nicht von vorneherein auf den Winkel 45° einschränken. Wir unterteilen also den Kuchen zuerst durch zwei senkrecht zueinander stehende Schnitte durch einen exzentrischen Punkt P in vier Stücke und anschliessend nochmals durch zwei senkrecht zueinander stehende Schnitte, so dass diese neuen Schnitte gegenüber den alten beiden um den Winkel β (in Bogenmass) verdreht sind (Abbildung 3). Dann wird behauptet, dass die in Abbildung 3 mit markierten Winkeln β gekennzeichneten Pseudosektoren zusammen den gleichen Flächeninhalt haben wie die vier wirklichen Sektoren, welche durch die Parallelschnitte durch das Kreiszentrum M gebildet werden. Für $\beta = \frac{\pi}{4}$ ergibt sich dann sofort die behauptete Kuchenhalbierung.

Zunächst stellen wir — als Nebenbemerkung — fest, dass die vier Kreisbögen der vier Pseudosektoren zusammen die gleiche Länge haben wie die vier Kreisbögen der wirklichen Sektoren. Den Beweis dieser Tat-

²Dieser Beweis könnte als „Beweis ohne Worte“ gelten, während derjenige in Wikipedia von Carter & Wagon zwar mit weniger Teilen auskommt, deren Gleichheit aber nicht sogleich evident ist. Erst die Überlegungen aus Abschnitt 7 — auf $n = 4$ eingeschränkt — enthüllen dessen Grundgedanken.

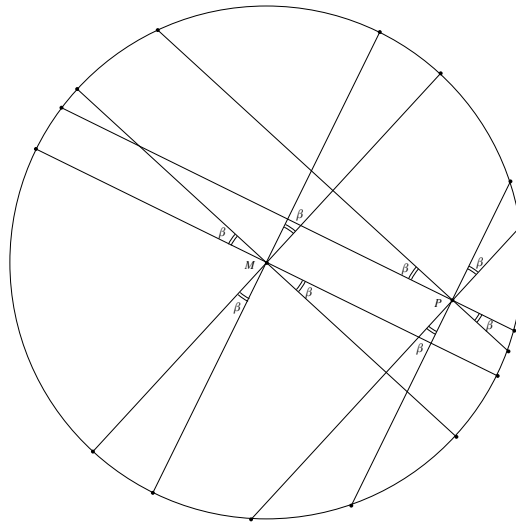


Abbildung 3: Verallgemeinertes Kuchenproblem mit vier Pseudosektoren

sache kann man führen, indem man nur zwei gegenüber liegende Pseudosektorbogen mit den entsprechenden gegenüberliegenden wirklichen Sektorbogen vergleicht (Abbildung 4). Der kürzere Pseudosektorbogen $B'D'$ in Abbildung 4 wird im Vergleich mit einem wirklichen Sektorbogen BD um so viel verkürzt wie der längere Pseudosektorbogen $A'C'$ im Vergleich mit dem Bogen AC verlängert wird. Bei der Länge des kürzeren $B'D'$ wird nämlich der Bogen BB' zum Bogen BD dazugezählt und der Bogen DD' abgezählt:

$$|B'D'| = |BD| + |BB'| - |DD'|$$

Bei der Länge des längeren $A'C'$ wird zum Bogen AC der Bogen CC' dazugezählt und der Bogen AA' abgezählt:

$$|A'C'| = |AC| + |CC'| - |AA'|$$

Nun sind aber die Bogen AA' und BB' einerseits und die Bogen CC' und DD' andererseits gleich lang und die ursprünglichen Sektorbogen AC und BD sind aus Symmetriegründen ebenfalls gleich lang, nämlich je $r\beta$ mit r als Kreisradius. Daher sind die Bogen $A'C'$ und $B'D'$ zusammen gleich lang wie die Bogen AC und BD zusammen:

$$\begin{aligned} |A'C'| + |B'D'| &= (|AC| + |CC'| - |AA'|) + (|BD| + |BB'| - |DD'|) \\ &= (|AC| + |CC'| - |AA'|) + (|BD| + |AA'| - |CC'|) \\ &= |AC| + |BD| = 2r\beta \end{aligned}$$

Diese Beweisidee inspiriert uns und kann beinahe auf die Flächenbetrachtung übertragen werden, um die es hier eigentlich geht. Wenn wir im Folgenden eine Folge von Punkten nennen, so meinen wir damit den Flächeninhalt der entsprechenden Figur mit diesen Eckpunkten. Insbesondere soll zwischen zwei Punkten der Kreisperipherie immer die dazwischen liegende kürzere Kreisbogenlinie als Begrenzung aufgefasst werden. Ferner führen wir die Lote $MX = PX'$ und $MY = PY'$ ein. Es gilt nun:

$$\begin{aligned} PB'D' + PA'C' &= (MBD + MPB'B - MPD'D) + (MAC + MPC'C - MPA'A) \\ &= MBD + MAC + (MPB'B - MPA'A) + (MPC'C - MPD'D) \end{aligned}$$

Da nun die Lote MX und MY die beiden Flächen $ABB'A'$ und $CDD'C'$ je halbieren, bedeuten die beiden Klammern in der vorangehenden Gleichung die Flächen der Rechtecke $MX'PX$ und $MY'PY$, welche einmal weg- und einmal dazugezählt werden. Damit folgt

$$PB'D' + PA'C' = MBD + MAC + (-MX'PX) + (+MY'PY) \tag{1}$$

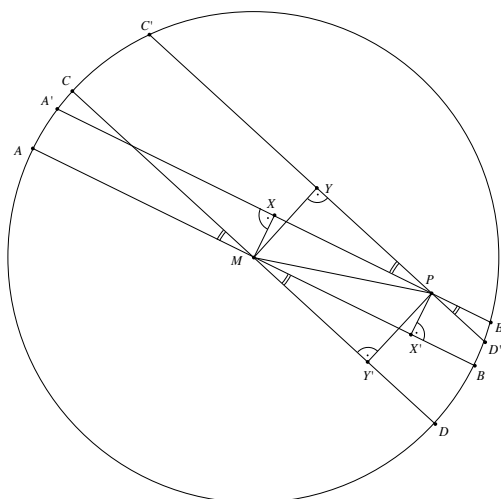


Abbildung 4: Erster Beweisschritt

Die beiden betrachteten Pseudosektoren haben also zusammen im Vergleich zu den parallel liegenden beiden wirklichen Sektoren eine Flächenveränderung erfahren, welche der Differenz der beiden inneren Rechtecke entspricht. Dabei wird das Y-Rechteck dazugezählt und das X-Rechteck abgezählt. Dies kann man sich so merken: Y ist der von M weiter entfernte Sehnenmittelpunkt als X.

In Abbildung 5 werden nun zusätzlich zu Abbildung 4 die beiden fehlenden Pseudosektoren und die dazu parallel liegenden wirklichen Sektoren betrachtet, welche senkrecht zu denjenigen in Abbildung 4 stehen.

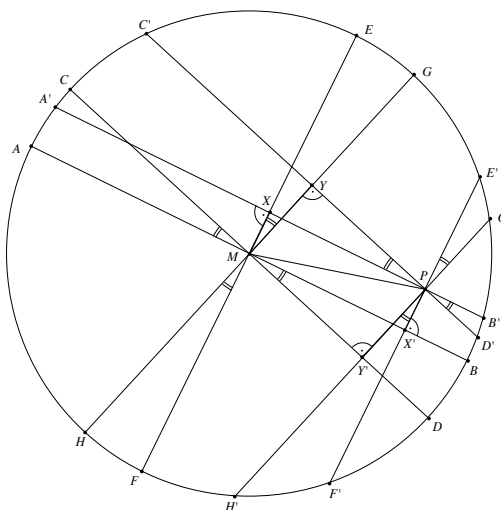


Abbildung 5: Zweiter Beweisschritt

Für diese neuen Pseudosektoren ist nun X' der von M weiter entfernte Sehnenmittelpunkt als Y'. Daher treten die beiden inneren Rechtecke vorzeichenmässig in umgekehrten Rollen auf und wir können die Summe der beiden Pseudosektorflächen analog zur obigen Rechnung aufstellen:

$$PE'G' + PF'H' = MEG + MFH + (+MX'PX) + (-MY'PY)$$

Damit gilt insgesamt mit dem Kreisradius r :

$$PB'D' + PA'C' + PE'G' + PF'H' = MBD + MAC + MEG + MFH = 4 \cdot MAC = 2r^2\beta$$

Die vier Pseudosektoren mit Zentriwinkel β haben also insgesamt den konstanten Flächeninhalt $F = 2r^2\beta$ unabhängig von der Ausrichtung der Figur im Kreis und unabhängig vom Abstand, den P von M aufweist. Für $\beta = \frac{\pi}{4}$ ist die ursprüngliche Behauptung bewiesen: $F = \frac{1}{2}\pi r^2$.

4 Analytischer Beweis (nach Daniel Stoffer, ETH Zürich)

Wir legen den Kreismittelpunkt M in den Ursprung eines kartesischen (x, y) -Koordinatensystems und wählen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $r = 1$ und den Punkt P auf der positiven x -Achse im Abstand $a < 1$ von M : $P(a, 0)$. Sei ferner S ein Punkt auf der Kreisperipherie und $s(\phi)$ die Länge der Strecke PS , welche mit der positiven x -Achse den Winkel ϕ einschliesst (Abbildung 6). Mit Pythagoras erhält man sofort die Länge der halben Sehne durch S , von der noch $a \cos \phi$ subtrahiert werden muss:

$$s(\phi) = \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \phi} - a \cos \phi \tag{2}$$

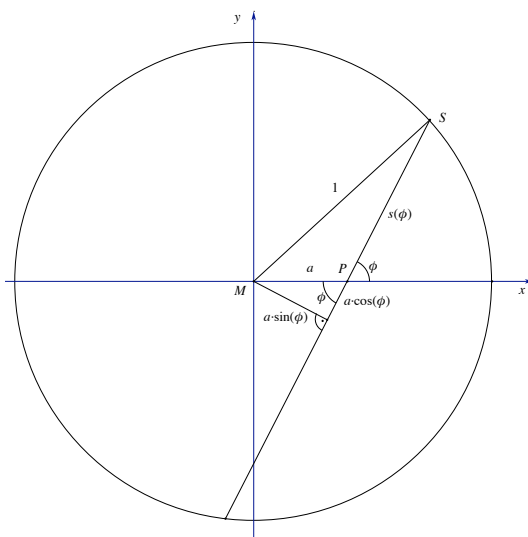


Abbildung 6: Berechnung von $s(\phi)$

Da wir zur Berechnung der Fläche, welche PS bei wachsendem ϕ' überstreicht, den Term

$$\frac{1}{2} \int_{\phi}^{\phi+\beta} s(\phi')^2 d\phi'$$

benützen werden, untersuchen wir zunächst $s(\phi)^2$. Aus (2) folgt:

$$s(\phi)^2 = 1 - a^2 \sin^2 \phi + a^2 \cos^2 \phi - 2\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \phi} \cdot a \cos \phi$$

Addiert man π zum Argument, so wechselt nur das Glied mit der Wurzel das Vorzeichen. Also gilt:

$$s(\phi)^2 + s(\phi + \pi)^2 = 2(1 - a^2 \sin^2 \phi + a^2 \cos^2 \phi) \tag{3}$$

und

$$s(\phi + \pi/2)^2 + s(\phi + 3\pi/2)^2 = 2(1 - a^2 \sin^2(\phi + \pi/2) + a^2 \cos^2(\phi + \pi/2)) = 2(1 - a^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi)$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$s(\phi)^2 + s(\phi + \pi)^2 + s(\phi + \pi/2)^2 + s(\phi + 3\pi/2)^2 = 4$$

Die Gesamtfläche, welche von den vier Strecken bei Drehung mit dem Winkel β überstrichen wird, ist also

$$F = \frac{1}{2} \int_{\phi}^{\phi+\beta} (s(\phi')^2 + s(\phi' + \pi)^2 + s(\phi' + \pi/2)^2 + s(\phi' + 3\pi/2)^2) d\phi' = \frac{1}{2} \int_{\phi}^{\phi+\beta} 4d\phi' = 2\beta . \quad (4)$$

Übertragen auf einen Kreis mit Radius r , ist also $F = 2r^2\beta$, was wir schon in Abschnitt 3 erhalten haben.

5 Verallgemeinerung von 4 auf n gefärbte Pseudosektoren

Im Abschnitt 3 haben wir in (1) festgestellt, dass die Summe $PB'D' + PA'C'$ (Flächeninhalt der beiden gegenüberliegenden Pseudosektoren mit Zentriwinkel β) im Vergleich zum Flächeninhalt $MBD + MAC$ der beiden wirklichen Sektoren eine Flächenveränderung erfahren, welche der Differenz der beiden Rechtecke $MY'PY$ und $MX'PX$ entspricht. Diese Rechtecksflächen in Abbildung 4 kann man aber als Beträge von Vektorprodukten auffassen: $MY'PY = |\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MY}|$ und $MX'PX = |\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MX}|$. Damit gilt wegen der Parallelität der beiden Vektoren $\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MY}$ und $\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MX}$ — beide stehen senkrecht zur Zeichenebene — und wegen der Distributivität des Vektorprodukts folgendes:

$$\begin{aligned} MY'PY - MX'PX &= |\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MY}| - |\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MX}| \\ &= |\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MY} - \overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MX}| \\ &= |\overrightarrow{MP} \times (\overrightarrow{MY} - \overrightarrow{MX})| \\ &= |\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{XY}| \end{aligned}$$

Dabei wollen wir ab sofort den Winkel β orientieren und zwar im Uhrzeigersinn, so dass es immer einen ersten und einen zweiten Schenkel des Winkels β bei M oder P gibt. Damit gilt die Regel, dass die Flächenveränderung gleich dem Vektorprodukt von \overrightarrow{MP} mit \overrightarrow{XY} ist, wobei X auf dem ersten Schenkel und Y auf dem zweiten Schenkel liegt. (Die Flächenveränderung soll positiv sein, wenn das Vektorprodukt zum Betrachter weist, sonst negativ.) Mit dieser Vereinbarung wird die ursprüngliche Regel von den verschiedenen Entfernungen der beiden Sehnenmittelpunkte X und Y von M hinfällig, denn die Flächenveränderung erhält jetzt ein Vorzeichen.

Sei nun n eine gerade Zahl grösser oder gleich 4. Sie gibt an, wie viele gefärbte Pseudosektoren wir jetzt in der Verallgemeinerung betrachten. In Abbildung 5 galt $n = 4$. Dort ist der Spezialfall eingetreten, dass die beiden Flächenveränderungen der je gegenüberliegenden Pseudosektoren genau entgegengesetzten Vektoren entsprechen, nämlich einmal \overrightarrow{XY} und einmal $\overrightarrow{YX} = \overrightarrow{X'Y'}$, so dass sie sich in der Summe aufheben und die vier Pseudosektoren insgesamt den gleichen Flächeninhalt haben wie die zugehörigen wirklichen Sektoren.

Nun können wir den Beweis der Verallgemeinerung auf mehr als vier regelmässig verteilte (gefärbte, d. h. durch β markierte) Pseudosektoren geometrisch führen. Wir wählen zunächst $n = 6$ (Abbildung 7). Die Mittelpunkte der Sehnen durch P liegen auf dem Thaleskreis über MP . Und weil die Winkel bei allen Pseudosektoren β sind, müssen die Flächenveränderungsvektoren wegen dem Peripheriewinkelsatz alle gleich lang sein. Ausserdem sind sie schön regelmässig auf dem Thaleskreis verteilt, denn die nicht markierten Winkel zwischen den Pseudosektoren sind auch gleich gross, was mit dem Peripheriewinkelsatz gleiche Abstände zwischen den Anfangs- und Endpunkten der Vektoren ergibt. Somit bilden die drei zusammengesetzten Vektoren ein gleichseitiges Dreieck und ihre Summe ist Null, was zur Folge hat, dass alle Flächenveränderungen von je zwei gegenüberliegenden Pseudosektoren sich insgesamt zu Null addieren. Diese Überlegung lässt sich nun auf eine beliebige gerade Anzahl $n > 2$ von regelmässig verteilten Pseudosektoren verallgemeinern. Immer bilden die $\frac{n}{2}$ Flächenveränderungsvektoren bei der Addition ein regelmässiges $\frac{n}{2}$ -Eck. Damit ist gezeigt, dass für alle geraden $n > 2$ die Figur aus n Pseudosektoren die gleiche Fläche hat wie die zugehörige Figur aus wirklichen Sektoren, nämlich $n \cdot \frac{r^2\beta}{2}$.

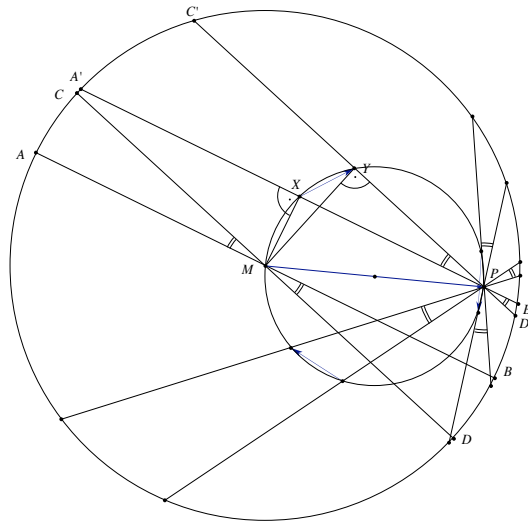


Abbildung 7: Figur mit sechs regelmässig verteilten Pseudosektoren, $n = 6$

Damit gilt folgender Satz: Wählt man $\beta = \frac{\pi}{n}$, so beträgt der Flächeninhalt der Figur aus n regelmässig verteilten Pseudosektoren für gerades $n > 2$ genau die halbe Kreisfläche. Die ursprüngliche Aufgabe war für $n = 4$ gestellt. Man macht sich schnell klar, dass diese Aussage für ungerade n nicht gilt.

6 Analytische Bestätigung (nach Daniel Stoffer)

Es seien S_j ($j = 0, \dots, n - 1$) die n Punkte auf der Kreisperipherie, welche jeweils einen Anfangspunkt eines Pseudosektors markieren. Die Winkel ϕ_j sind die n zugehörigen regelmässig ansteigenden Winkel gegenüber der positiven x -Achse. Gemäss (2) gilt:

$$|PS_j| = s(\phi_j) = \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \phi_j - a \cos \phi_j}$$

Analog zu (4) treten jetzt bei der Berechnung von F im Integranden n Summanden $s(\phi_j)^2$ auf. Unter Verwendung von (3) lässt sich diese Summe stark vereinfachen:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} s(\phi_j)^2 &= \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} [s(\phi_j)^2 + s(\phi_{j+\frac{n}{2}})^2] = 2 \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} (1 - a^2 \sin^2 \phi_j + a^2 \cos^2 \phi_j) \\ &= 2 \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(1 - \frac{a^2}{2}(1 - \cos 2\phi_j) + \frac{a^2}{2}(1 + \cos 2\phi_j)\right) = 2 \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} (1 + a^2 \cos 2\phi_j) \\ &= n + 2a^2 \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \cos 2\phi_j = n \end{aligned}$$

Die Summe der $\frac{n}{2}$ Cosinuswerte ist Null, weil sich dahinter wieder ein regelmässiges $\frac{n}{2}$ -Eck versteckt. Damit ergibt sich für den Einheitskreis $F = \int_{\phi}^{\phi+\beta} nd\phi' = n \cdot \frac{\beta}{2}$ oder allgemein wie zuvor $F = n \cdot \frac{r^2\beta}{2}$.

7 Geometrischer Beweis bei n gefärbten Pseudosektoren

Wir wenden uns zum Schluss dem Fall zu, bei dem alle $2n$ Pseudosektoren, n gefärbte und n ungefärbte, den Zentriwinkel $\beta = 180^\circ/n$ aufweisen und somit die gefärbte Fläche die halbe Kreisfläche ausmachen soll.

Ausgehend von Abbildung 2 hatte Daniel Stoffer die Idee, den Beweis in zwei Teile zu trennen. Ein innerer Teil bezieht sich auf das Gebiet innerhalb des Kreises mit Zentrum M und Radius $|MP|$, wo wir einen auf Flächenverwandlung basierenden Beweis gefunden haben. Im äusseren Teil, ausserhalb dieses Hilfskreises, ist sogar ein Beweis über Zerlegungsgleichheit gelungen, ähnlich dem Puzzle-Beweis in Abschnitt 2. Da n gerade sein muss, wählen wir hier den Fall mit 10 gefärbten und 10 ungefärbten Pseudosektoren: $n = 10$ (Abbildung 8). Wir legen den Parameter m als die Hälfte von n fest: $n = 2m$.

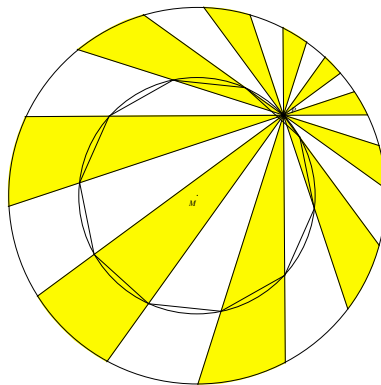


Abbildung 8: Hilfskreis für $n = 10$

Da P auf der Peripherie des Hilfskreises liegt, schneidet dieser genau m , hier also 5, gefärbte Pseudosektoren und zwar bilden diese Schnittpunkte dank des Peripheriewinkelsatzes und den lauter gleichen Peripheriewinkeln $\beta = 180^\circ/n$ auf dem Hilfskreis ein regelmässiges n -Eck. Jetzt betrachten wir nur das Innere des Hilfskreises mitsamt des regelmässigen n -Ecks und den m gefärbten Pseudosektoren, welche alle den Scheitelpunkt P besitzen. Zudem lösen wir P vorübergehend von seiner Bindung an den Hilfskreis und lassen ihn als Punkt X im Innern des Hilfskreises frei wandern. Es entsteht die Abbildung 9, in der wir zunächst nur die dreieckigen Teilbereiche der Pseudosektoren färben und sie ausserdem durch die Sekanten h_1 bis h_5 begrenzen. Wichtig ist jetzt, dass der Punkt X im Innern des von den m Geraden gebildeten regelmässigen m -Ecks liegt.

Nun zeigen wir, dass die gefärbten und ungefärbten Dreiecke mit Spitze X in Abbildung 9 die gleiche Fläche haben. Dazu denken wir uns im Kreiszentrum den Ursprung eines Koordinatensystems. Die m Geraden h_1, h_2, \dots, h_m seien durch die Hessesche Normalform gegeben, wobei alle m Normaleneinheitsvektoren $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_m$ nach aussen orientiert seien. Die Gleichungen der m Geraden lauten dann in Hessescher Normalform

$$h_i : \vec{r} \circ \vec{n}_i - d = 0 ,$$

wobei d der für alle m Geraden gleiche Abstand vom Ursprung ist. Da das m -Eck regelmässig ist, gilt zudem

$$\sum_{i=1}^m \vec{n}_i = 0 .$$

Da der Punkt X mit Ortsvektor \vec{x} im Innern des m -Ecks liegt, liefert die Hessesche Normalform $\vec{x} \circ \vec{n}_i - d$ beim Berechnen des Abstand von X zu der i -ten Geraden immer eine negative Zahl. Wir berechnen jetzt die Summe der m (positiven) Abstände des Punktes X von den m Geraden:

$$-\sum_{i=1}^m (\vec{x} \circ \vec{n}_i - d) = -\vec{x} \circ \left(\sum_{i=1}^m \vec{n}_i \right) + md = md$$

Die Summe aller Höhen der gefärbten Dreiecke ist also konstant für alle Lagen von X innerhalb des m -Ecks. Beträgt die Seitenlänge des $2m$ -Ecks a , so ist die Grundseite aller gefärbten Dreiecke a . Der Inhalt

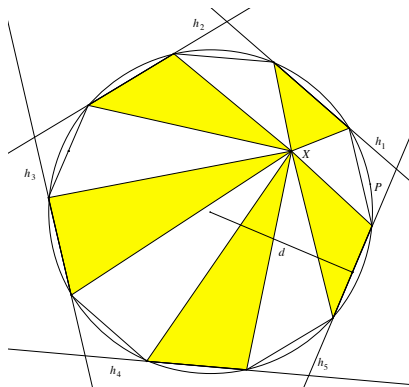


Abbildung 9: Beweisfigur fürs Innere

der gefärbten Fläche ist demnach $amd/2$ und macht damit genau die Hälfte des Inhalts des $2m$ -Ecks aus. Schliesslich ergänzen wir alle gefärbten und ungefärbten Dreiecke wieder durch die fehlenden Segmente zu den ursprünglichen Pseudosektoren. Es kommen damit gleich viele gefärbte wie ungefärbte Segmente hinzu. Identifiziert man X wieder mit P — das m -Eck kann immer so gewählt werden, dass P in dessen Innerem liegt —, ist gezeigt, dass in Abbildung 8 innerhalb des Hilfskreises gleich viel Fläche gefärbt wie ungefärbt ist.

Nun wenden wir uns dem Äusseren des Hilfskreises in Abbildung 8 zu. Hier ist ein „look-and-see-Beweis“ möglich (Abbildung 10). Die Flächengleichheit von gefärbtem und ungefärbtem Anteil ist direkt einsehbar dank kongruenter Stücke, welche stets den gleichen Namen mit oder ohne Strich tragen. Die Kongruenz bei den im Alphabet tiefen Buchstaben wird jeweils durch eine Spiegelung vermittelt, deren Achse durch M verläuft und eingezeichnet ist. Die Kongruenz der streifenartigen Gebilde mit Buchstaben von weiter hinten im Alphabet ergibt sich durch eine Drehung um M mit dem Winkel $360^\circ/n$. Diese Streifen entstehen durch Parallelverschieben von Begrenzungsgeraden der Pseudosektoren durch deren Schnittpunkte mit dem Hilfskreis. Dass eine Drehung vorliegt, beweist man durch die Tatsache, dass die Begrenzungsstrecken der Streifen auf Geraden liegen, welche im Winkel $360^\circ/n$ zueinander verdreht sind und gleichzeitig denselben Abstand von M besitzen, was aus der Symmetrie bezüglich der erwähnten Spiegelungsachsen hervorgeht.

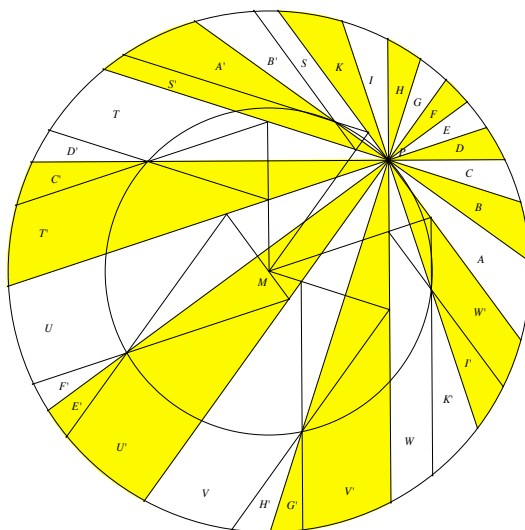


Abbildung 10: Beweisfigur fürs Äussere

Es bleibt dem Leser überlassen, diese Abbildung zurückzuübersetzen auf den Fall $n = 4$, womit man fürs Äussere des Hilfskreises eine sehr einfache Zerlegung findet, mit der die Gleichheit der gefärbten und ungefärbten Fläche einsehbar wird.

Wer erhält zuerst drei Punkte?

Hans Ulrich Keller, MNG Zürich

Zusammenfassung

Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ergibt oft überraschende Ergebnisse: Vermeintlich einfache Situationen können zu mathematisch aufwendigen Problemen führen. Dies ist z.B. bei einem Spiel der Fall, bei dem zwei Personen in einem Versuch je eine feste Wahrscheinlichkeit p_a resp. p_b für den Erhalt eines Punktes haben, wobei solche Versuche so lange wiederholt werden, bis eine der Personen insgesamt n Punkte gesammelt hat. In einem ersten Teil wird der Fall $p_a + p_b = 1$ gelöst, was, mit endlichen Spielen, zu einer Pascal-Verteilung führt. In einem zweiten Teil wird der Fall $p_a + p_b = 1 - p_x$ gelöst, bei dem eine Wahrscheinlichkeit $p_x > 0$ dafür vorhanden ist, dass im einzelnen Versuch keine der beiden Personen einen Punkt erhält, was zu potentiell unendlich langen Spielen führt. Geeignete Algorithmen sind hier, neben dem allerdings etwas mühsamen Baumdiagramm, einerseits die Monte-Carlo-Methode, die schnell und unkompliziert zu angenäherten Resultaten führt, andererseits das aufwändigere Verfahren der Markow-Kette, womit ebenfalls exakte Resultate sowie zusätzliche Erkenntnisse gefunden werden können.

Erster Teil: Endlich lange Spiele

Anna und Berta vereinbaren folgendes Spiel: Jemand wirft – als Versuch – einen Spielwürfel. Zeigt der Würfel die Augenzahl 1 oder 2, erhält Anna einen Punkt. Andernfalls erhält Berta einen Punkt. Dieser Versuch wird so oft wiederholt, bis entweder Anna oder Berta drei Punkte erhalten hat, womit das Spiel beendet ist.

Anna hat somit bei jedem Versuch eine Wahrscheinlichkeit $p_a = \frac{1}{3}$ für den Erhalt eines Punk-

tes, während Berta dafür die Gegenwahrscheinlichkeit $p_b = 1 - p_a = \frac{2}{3}$ hat.

Das Spiel ist frühestens nach 3 und spätestens nach 5 Versuchen beendet. Wird vereinbart, dass das Spiel allgemein nach dem Erhalt von n Punkten beendet ist, werden dazu mindestens n und höchstens $2n - 1$ Versuche benötigt.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Anna das Spiel, wenn $n = 3$ ist?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt sie bei einem beliebigen n ?

Zur Beantwortung dieser Fragen kann für $n = 2$ der übliche Baum gezeichnet werden:

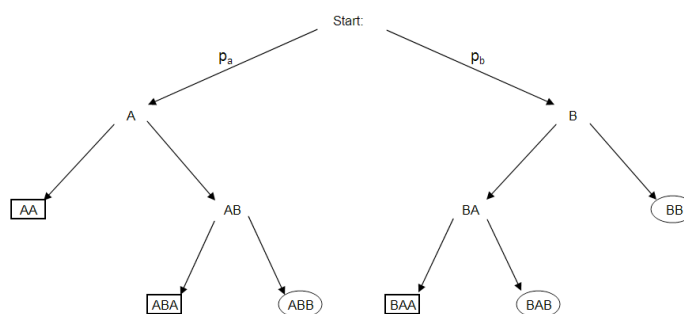


Fig. 1: Baum für das Spiel mit $n = 2$. Die Rechtecke markieren den Spielgewinn von Anna, die Ovale den von Berta.

Aus dem Baumdiagramm lassen sich leicht die Wahrscheinlichkeiten für Annas resp. Bertas Spielgewinn angeben:

$$p_a^{\text{tot}}(n=2) = p_a^2 + 2 p_a^2 p_b, \text{ resp. } p_b^{\text{tot}}(n=2) = p_b^2 + 2 p_a p_b^2 \quad (\text{Gl. 1, 2})$$

Es kann hier sofort verifiziert werden, dass die Summe dieser beiden Wahrscheinlichkeiten wie erwartet gleich 1 ist.

Für die oben konkret angegebenen Wahrscheinlichkeiten $p_a = \frac{1}{3}$ und $p_b = \frac{2}{3}$ gewinnt Anna

das Spiel mit der Wahrscheinlichkeit $p_a^{\text{tot}}(n=2) = \frac{7}{27}$ und Berta mit der Wahrscheinlichkeit

$$p_b^{\text{tot}}(n=2) = \frac{20}{27}.$$

Für $n = 3$ wird der Baum – mit 38 Pfeilen – sehr unübersichtlich.

Hier helfen kombinatorische Überlegungen weiter, die z.B. für $n = 4$ darin bestehen, nacheinander die Elemente $\{A, A, A, A\}$, dann die Elemente $\{A, A, A, A, B\}$, $\{A, A, A, A, B, B\}$ und $\{A, A, A, A, B, B, B\}$ zu permutieren. A steht dabei für einen Punktegewinn von Anna, B für einen Punktegewinn von Berta, und die Reihenfolge entspricht der Reihenfolge, in welcher Anna resp. Berta einen Punkt gewinnt. Es muss berücksichtigt werden, dass das Spiel nach jeweils den ersten vier A's, meist gemischt mit B's, für Anna gewonnen ist, was die Anzahl der zu berücksichtigenden Permutationen verringert.

Auf diese Weise kann für $n = 3$ die Formel

$$p_a^{\text{tot}}(n=3) = p_a^3 + 3 p_a^3 p_b + 6 p_a^3 p_b^2 \quad (\text{Gl. 3})$$

gefunden werden, was für $p_a = \frac{1}{3}$ den Wert $p_a^{\text{tot}}(n=3) = \frac{17}{81}$ ergibt. Es fällt bereits jetzt auf, dass es für Anna mit zunehmendem n offenbar immer schwieriger wird, überhaupt ein Spiel zu gewinnen. Tatsächlich ist $\lim_{n \rightarrow \infty} p_a^{\text{tot}}(n) = 0$: Ist $p_b > p_a$, dann wird für $n \rightarrow \infty$ der Gewinn des Spiels für Berta zur Gewissheit!

Die Überlegungen mit den Permutationen erlauben es, die Wahrscheinlichkeit $p_a^{\text{tot}}(n)$ für den Spielgewinn von Anna für ein beliebiges n wie folgt anzugeben:

$$p_a^{\text{tot}}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} \cdot p_a^n \cdot (1-p_a)^k \quad (\text{Gl. 4})$$

Eine analoge Formel lässt sich für $p_b^{\text{tot}}(n)$ angeben. Die auftretenden Binomialkoeffizienten finden sich auf der n -ten Diagonale des Pascal-Dreiecks. Diese Verteilung ist auch als 'Pascal-Verteilung' oder 'negative Binomialverteilung' bekannt.

Unten sind im gleichen Diagramm die zu unseren Beispielwahrscheinlichkeiten $p_a = \frac{1}{3}$ und p_b

$= \frac{2}{3}$ gehörigen Wahrscheinlichkeiten $p_a^{\text{tot}}(n)$ und $p_b^{\text{tot}}(n)$ dargestellt:

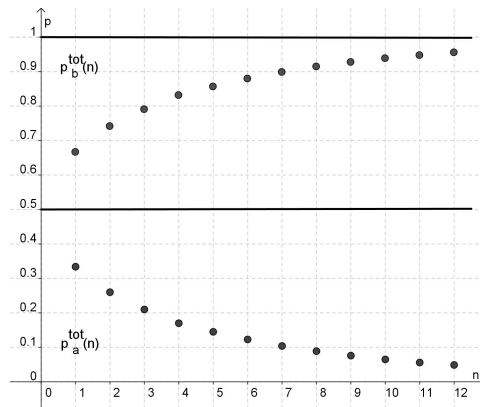


Fig. 2: Wahrscheinlichkeit $p_a^{\text{tot}}(n)$ des Spielgewinns für Anna (unten) und $p_b^{\text{tot}}(n)$ für Berta (oben) in Abhängigkeit von der Anzahl Punkte n , die für den Spielgewinn verlangt sind.

Mit der oben angegebenen Formel für die gesamte Wahrscheinlichkeit lässt sich der Erwartungswert $E(v) = \bar{v} = \sum_{k=0}^{n-1} (p_a^{\text{tot}}(n+k) + p_b^{\text{tot}}(n+k)) \cdot (n+k)$ für die (mittlere) Anzahl der Versuche angeben, die nötig sind, bis das Spiel zu Ende ist:

$$\bar{v} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} \cdot (p_a^n \cdot (1-p_a)^k + (1-p_a)^n \cdot p_a^k) \cdot (n+k) \quad (\text{Gl. 5})$$

Dieser Erwartungswert $E(v)$ ist im folgenden Diagramm in Abhängigkeit von n wiedergegeben:

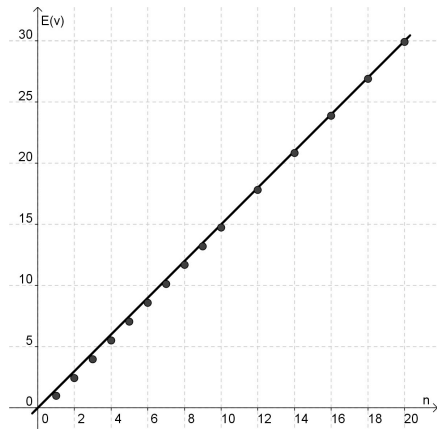


Fig. 3: Erwartungswert der Spieldauer $E(v) = \bar{v}$ in Abhängigkeit von der zum Spielgewinn nötigen Punktezahl n . Interessant ist die Proportionalität zwischen n und $E(v)$, die sich asymptotisch für $n \gg 1$ ergibt; mit den vorgegeben Wahrscheinlichkeiten ist $\bar{v} \approx \frac{3}{2} \cdot n$.

Zweiter Teil: Potentiell unendlich lange Spiele

Anna und Berta vereinbaren nun ein neues Spiel: Jemand wirft – als Versuch – einen Spielwürfel. Zeigt der Würfel die Augenzahl 1 oder 2, erhält Anna einen Punkt. Berta erhält einen Punkt, wenn der Würfel die Augenzahl 3, 4 oder 5 zeigt; zeigt der Würfel die Augenzahl 6, wird erneut gewürfelt. Dieser Versuch wird so oft wiederholt, bis entweder Anna oder Berta drei Punkte erhalten hat, wodurch das Spiel beendet ist.

Anna hat somit bei jedem Versuch eine Wahrscheinlichkeit $p_a = \frac{1}{3}$ für den Erhalt eines Punktes, während Berta dafür die Wahrscheinlichkeit $p_b = \frac{1}{2}$ hat. Es gibt weiter eine Wahrscheinlichkeit $p_x = \frac{1}{6}$ dafür, dass bei einem Versuch weder Anna noch Berta einen Punkt erhält und einfach weitergewürfelt werden muss.

Das Spiel kann theoretisch beliebig lange dauern, da beliebig lange Serien von Würfeln mit der Augenzahl 6 denkbar sind. Für $n = 1$ lässt sich das Problem mit einem – bereits unendlich grossen – Baum und einer geometrischen Reihe in üblicher Weise lösen:

$$p_a^{\text{tot}}(n = 1) = p_a + p_x p_a + p_x^2 p_a + \dots = p_a (1 + p_x + p_x^2 + \dots) = \frac{p_a}{1 - p_x} \quad (\text{Gl. 6})$$

Eine analoge Formel ergibt sich für $p_b^{\text{tot}}(n = 1)$. Wie sofort gezeigt werden kann, ist die Summe dieser beiden Wahrscheinlichkeiten gleich 1, da $p_x = (1 - p_a - p_b)$ ist. Dies ist offensichtlich, da über kurz oder lang Anna oder Berta den einzigen Punkt und damit das Spiel gewinnen wird. Verwenden wir die oben erwähnten Wahrscheinlichkeiten $p_a = \frac{1}{3}$, $p_b = \frac{1}{2}$ und $p_x = \frac{1}{6}$, so ergibt sich für $p_a^{\text{tot}}(n = 1) = \frac{2}{5}$ und für $p_b^{\text{tot}}(n = 1) = \frac{3}{5}$. Dies ist eine nicht unerwartete Aufteilung im Verhältnis der elementaren Wahrscheinlichkeiten für den Gewinn eines Punktes, wobei berücksichtigt ist, dass das Spiel beliebig lange dauern könnte.

Für diesen einfachsten Fall $n = 1$ lässt sich wiederum die mittlere Spieldauer $E(v) = \bar{v}$ berechnen:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= 1 (p_a + p_b) + 2 (p_x p_a + p_x p_b) + 3 (p_x^2 p_a + p_x^2 p_b) + \dots \\ &= (p_a + p_b) (1 + 2 p_x + 3 p_x^2 + 4 p_x^3 + \dots) \end{aligned} \quad (\text{Gl. 7})$$

Der zweite Faktor ist eine bekannte, der geometrischen Reihe verwandte Reihe, wodurch sich Gl. 7 vereinfacht zu

$$\bar{v} = \frac{p_a + p_b}{(1 - p_x)^2} \quad (\text{Gl. 8})$$

Wieder mit den oben erwähnten Wahrscheinlichkeiten $p_a = \frac{1}{3}$, $p_b = \frac{1}{2}$ und $p_x = \frac{1}{6}$, ergibt sich eine mittlere Anzahl Versuche von $\bar{v} = \frac{6}{5}$.

Bereits für $n > 1$ ist jedoch die Methode der Baumdiagramme nur noch schwierig anwendbar, da sich der Baum in Myriaden von unendlich langen Ästen aufsplittet. Mit geeigneten Reihen ist es aber durchaus möglich, dennoch die – hier vorweggenommenen – exakten Resultate für

den Spielgewinn von (z.B.) Anna herzuleiten, worauf hier aber nicht weiter eingegangen werden soll:

$$p_a^{\text{tot}}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} \cdot p_a^n \cdot p_b^k \cdot \left(\frac{1}{1-p_x} \right)^{n+k} \quad (\text{Gl. 9})$$

Für $p_x = 0$ geht Gl. 9 in die in Gl. 4 angegebene Pascal-Verteilung über.

Es bieten sich zwei andere Verfahren an: Am einfachsten kann eine solche Situation mit der Monte-Carlo-Methode bearbeitet werden, womit für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten allerdings nur angenäherte Werte bestimmt werden können. Es werden z.B. einige Tausende solcher Spiele mit Hilfe von Pseudozufallszahlen "durchgespielt" und die interessierenden Mittelwerte berechnet.

Dies kann z.B. mit dem folgenden einfachen Programm (*Mathematica*) geschehen:

```

simnrmax = 100000; n = 4;
spiela = 0; spielb = 0; anzvers = 0;
For[simnr = 1, simnr ≤ simnrmax, simnr++,
  punktea = 0; punkteb = 0;
  While[punktea < n && punkteb < n,
    r = Random[Integer, {1, 6}];
    If[r ≤ 2, punktea++];
    If[r ≥ 3 && r ≤ 5, punkteb++];
    anzvers++;];
If[punktea = n, spiela++];
If[punkteb = n, spielb++];];
{n, spiela / simnrmax, spielb / simnrmax,
  anzvers / simnrmax} // N

```

Fig. 4:
Mathematica-Programm zur Simulation einer Serie von 100'000 Spielen.

Es werden 100'000 Spiele "durchgespielt", hier für $n = 4$. Die Variable *punktea* enthält die Anzahl der von Anna gesammelten Punkte. Die Pseudozufallszahl *r* gibt die "gewürfelte" Augenzahl an. Die Variable *anzvers* zählt die gesamte Anzahl der Versuche, die Variable *spiela* zählt die von Anna gewonnenen Spiele.

Das Programm ergibt beispielsweise für $n = 4$, dass – im Mittel – Anna etwa 28.93 % und Berta die restlichen 71.07 % der Spiele gewinnt, und dass für ein Spiel etwa $\bar{v} = 6.837$ Versuche benötigt werden.

Die gleiche Simulation ergibt für $n = 1$, dass – im Mittel – Anna etwa 39.95 % und Berta die restlichen 60.05 % der Spiele gewinnt, und dass für ein Spiel etwa $\bar{v} = 1.203$ Versuche benötigt werden. Dies steht in bester Übereinstimmung mit den oben angegebenen exakt berechneten Werten.

Solche Simulationen, so nützlich sie für den Praktiker sein mögen, bleiben dennoch in gewisser Weise unbefriedigend, da keine exakten Werte bestimmt werden können. Um wiederum exakte Werte zu finden, eignet sich die Beschreibung des Spiels mittels Markow-Ketten. Eine gute Einführung in dieses Thema findet sich beispielsweise im Buch von Arthur Engel, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*, Band 2. Markow-Ketten sind generell definiert durch Zustände und die Übergangswahrscheinlichkeiten von jedem solchen Zustand in jeden anderen. Die Übergangswahrscheinlichkeiten können in einer Übergangsmatrix *P* zusammengefasst werden.

Bei unserem Problem kann jeder mögliche Spielstand als ein Zustand aufgefasst werden. Für $n = 2$ ergeben sich neun mögliche Zustände: 0:0, 0:1, 0:2, 1:0, 1:1, 1:2, 2:0, 2:1 und 2:2. So soll der Zustand 1:2 beispielsweise bedeuten, dass Anna erst einen Punkt erhalten hat, Berta

aber bereits deren zwei. Für ein beliebiges n ergeben sich $(n + 1)^2$ Zustände, wobei der Zustand $n:n$ gar nie erreicht werden kann. Der Einfachheit halber kann aber dieser Zustand dennoch mitgeführt werden: Die Übergangswahrscheinlichkeiten zu diesem Zustand von allen anderen Zuständen aus werden einfach alle gleich Null gesetzt.

Die Übergangswahrscheinlichkeit von einem allgemeinen Zustand $a:b$ (mit $a, b < n$) in den Zustand $(a + 1):b$ ist gleich p_a , diejenige von $a:b$ nach $a:(b + 1)$ ist gleich p_b , und diejenige von einem beliebigen Zustand in den wiederum gleichen Zustand ist gleich p_x . Die übrigen Übergangswahrscheinlichkeiten sind gleich Null. Zustände wie $n:b$ oder $a:n$ mit $a, b < n$ heissen absorbierende Zustände, und die Übergangswahrscheinlichkeit von einem solchen Zustand in wiederum den gleichen Zustand ist gleich 1.

Die Übergangsmatrizen P sind quadratisch und haben $(n + 1)^2$ Zeilen und ebenso viele Spalten, also für $n = 4$ bereits 625 Elemente! Die meisten dieser Übergangswahrscheinlichkeiten sind aber gleich 0, da es z.B. nicht möglich ist, in genau einem Schritt vom Zustand $0:1$ in den Zustand $0:0$ oder in den Zustand $1:2$ zu gelangen.

Der Einfachheit halber soll hier nur auf das Problem mit $n = 2$ im Detail eingegangen werden. Eine Erweiterung auf $n > 2$ ist zwar aufwändig, aber problemlos möglich. Die Übergangsmatrix P sieht für $n = 2$ wie folgt aus:

a:b	0:0	0:1	0:2	1:0	1:1	1:2	2:0	2:1	2:2
0:0	p_x	0	0	0	0	0	0	0	0
0:1	p_b	p_x	0	0	0	0	0	0	0
0:2	0	p_b	1	0	0	0	0	0	0
1:0	p_a	0	0	p_x	0	0	0	0	0
1:1	0	p_a	0	p_b	p_x	0	0	0	0
1:2	0	0	0	0	p_b	1	0	0	0
2:0	0	0	0	p_a	0	0	1	0	0
2:1	0	0	0	0	p_a	0	0	1	0
2:2	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Fig. 5: Die 9×9 – Übergangsmatrix P für $n = 2$. Die Matrixelemente geben jeweils die Wahrscheinlichkeit an, mit welcher – in genau einem Versuch – von einem Zustand $a:b$ (in der obersten Zeile angegeben) ein Zustand $a':b'$ (in der äussersten Spalte links angegeben) erreicht werden kann.

Mit Hilfe dieser Übergangsmatrix P lässt sich nun die Wahrscheinlichkeit $p(a,b,k)$ jedes Zustandes $a:b$ nach k Versuchen berechnen:

$$\begin{pmatrix} p_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_b & p_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_b & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_a & 0 & 0 & p_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_a & 0 & p_b & p_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(0,0,k) \\ p(0,1,k) \\ p(0,2,k) \\ p(1,0,k) \\ p(1,1,k) \\ p(1,2,k) \\ p(2,0,k) \\ p(2,1,k) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fig. 6: Die Wahrscheinlichkeit eines Zustands nach k (mit $k \in \mathbb{N}_0$) Versuchen ist gegeben durch das Produkt der k -ten Potenz der Übergangsmatrix P mit dem Anfangsvektor $(p(a, b, 0))$ (Gl. 10). Die unterstrichenen Wahrscheinlichkeiten entsprechen den vier absorbierenden Zuständen.

Der Anfangsvektor $(p(a, b, 0))$ hat die Komponenten $p(0, 0, 0) = 1$, respektive $p(a, b, 0) = 0$, wenn $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ ist, da zu Beginn des Spieles die Wahrscheinlichkeit des Spielstandes 0:0 gleich 1 ist und die Wahrscheinlichkeit jedes anderen Spielstandes gleich 0 ist. Die Wahrscheinlichkeit des Spielstandes $p(2, 2, k)$ ist und bleibt für jedes k gleich 0, da das Spiel jeweils bereits vorher beendet ist: Die unterste Zeile und die letzte Spalte der oben angegebenen Matrix P könnten, wie erwähnt, ohne Einschränkung der Allgemeinheit weggelassen werden.

Interessant ist es nun zu sehen, wie sich die Wahrscheinlichkeit jedes Zustandes mit zunehmendem k ändert, was zusätzliche Erkenntnisse über den Spielverlauf ergibt:

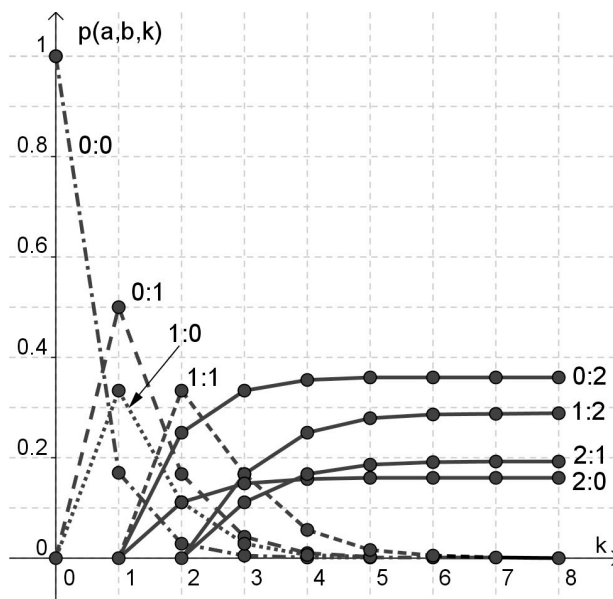


Fig. 7: Wahrscheinlichkeit eines Zustandes, d.h. eines Spielstandes, nach k Versuchen.
 Lesebeispiel: Für $k = 0$ hat der Zustand 0:0 die Wahrscheinlichkeit 1 und nach einem Versuch ($k = 1$) die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$, während der Zustand 0:1 bei $k = 1$ seine maximale Wahrscheinlichkeit von 50 % erreicht.

Es zeigt sich bereits für $k \geq 6$ Versuche, dass die Wahrscheinlichkeiten aller Zustände wie erwartet einem Grenzwert zustreben. Die Spielstände 0:0, 0:1, 1:0 und 1:1 werden immer unwahrscheinlicher, und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten streben gegen 0.

Die Schlussbesetzung der Zustände ergibt sich, indem die Grenzmatrix $P_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} P^k$, die sich (z.B. mit *Mathematica*) leicht berechnen lässt, mit dem Anfangszustandsvektor

$$(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T \text{ multipliziert wird, was das Resultat } \left(0, 0, \frac{9}{25}, 0, 0, \frac{36}{125}, \frac{4}{25}, \frac{24}{125}, 0 \right)^T \text{ ergibt.}$$

Erneute Multiplikation von P_∞ mit diesem Resultatvektor belässt diesen dann invariant.

Anna gewinnt folglich mit einer Wahrscheinlichkeit von 16 % mit einem Schlusspielstand von 2:0, und mit 19.2 % mit 2:1, insgesamt also mit einer Wahrscheinlichkeit von 35.2 %; Berta gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von 36 % mit 0:2 und mit einer Wahrscheinlichkeit von 28.8 % mit 1:2, insgesamt also mit einer Wahrscheinlichkeit von 64.8 %, was in Übereinstimmung steht mit dem in Gl. 9 angegebenen Resultat.

Bei einem Verhältnis der Grundwahrscheinlichkeiten $p_a : p_b = 1 : 1.5$ verhalten sich die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für den Spielgewinn also bereits wie $1 : 1.84$. Es zeigt sich hier das gleiche Phänomen, das schon im ersten Teil (mit $p_a = 1 - p_b$, d.h. $p_x = 0$) zu beobachten war: Wird die benötigte Punktezahl n angehoben, strebt die Wahrscheinlichkeit $p_b^{\text{tot}}(n)$ für den Spielgewinn der Spielerin mit der grösseren Grundwahrscheinlichkeit ($p_b > p_a$) ebenfalls wieder gegen 1, wie das in Fig. 8 veranschaulicht wird.

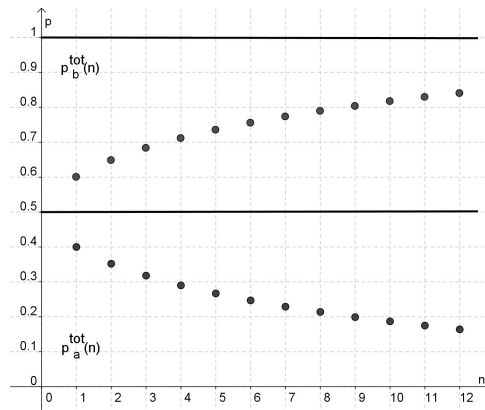


Fig. 8: Wahrscheinlichkeit $p_a^{\text{tot}}(n)$ des Spielgewinns für Anna (unten) und $p_b^{\text{tot}}(n)$ für Berta (oben), bei potentiell unendlich langen Spielen, in Abhängigkeit von der Anzahl Punkte n , die für den Spielgewinn verlangt sind.

Mit Hilfe der Übergangsmatrix P lässt sich auch hier wiederum die mittlere Spieldauer \bar{v} berechnen: Die bei einem allgemeinen n vorhandenen $2n$ absorbierenden Zustände vergrößern zusammen beim k -ten Versuch ihre Wahrscheinlichkeit jeweils total um Δp_k^{tot} ; der Erwartungswert für v ergibt sich dann in üblicher Weise als $\bar{v} = E(v) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta p_k^{\text{tot}} \cdot k$. Diese Reihe konvergiert in unserem einfachen Beispiel recht schnell: Mit $n = 2$ sind vier absorbierende Zustände vorhanden, die ihren Beitrag zu Δp_k^{tot} liefern, und schon mit nur gerade 10 Summanden kann hier bereits der auf vier Dezimalen korrekte Wert $\bar{v} \approx 2.97589\dots$ für den exakten Wert $\bar{v} = \frac{372}{125}$ Versuche gefunden werden.

So kann eine sehr einfache Fragestellung – wer erhält zuerst drei Punkte? – schnell zu weiteren interessanten Fragestellungen und zu mathematisch reizvollen Resultaten führen.

Die hier vorgestellten Aufgaben und Lösungen können Anregungen zur Lösung des sog. Teilungsproblems geben: Wie muss der Einsatz der Spielenden gerecht zurückverteilt werden, wenn ein solches Spiel vorzeitig abgebrochen werden muss? Dieses Teilungsproblem wurde zum ersten Mal von Luca Pacioli (1494) gestellt, und Blaise Pascal und Pierre de Fermat führten darüber einen ausführlichen Briefwechsel.

Literatur:
Arthur Engel, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Band 2.

Berichte zu Maturaarbeiten

Peter Hänsli, Alte Kantonsschule Aarau

Die folgenden Maturaarbeiten sind im Schuljahr 2009/10 im Schwerpunktfach PAM (12./13. Schuljahr, Teil AM je 3 Wochenlektionen) entstanden. Als es darum ging, Themen für Maturaarbeiten zu finden, bemühte ich mich im Unterricht wenn immer möglich, Werbung für Maturaarbeiten im Fach Mathematik zu machen. Meine Absicht war, ausgehend von gerade behandelten Themen mögliche Ausblicke auf Vertiefungen oder Erweiterungen zu machen. Das Konzept war offensichtlich erfolgreich, denn ich erhielt in der Folge Anfragen von neun Schülerinnen und Schülern. Aus Kapazitätsgründen konnte ich nicht mehr als drei Arbeiten betreuen. Ihre Themen waren:

- Das Apollonische Berührungsproblem: Algebraisch gelöst und visualisiert
- Klassifikation der Kegelschnittgleichung
- Möbiustransformationen: Klassifikation und Visualisierung

Allen drei Arbeiten ist gemeinsam, dass sie von klassischen Fragestellungen ausgehen, zu denen es viel Literatur gibt. Neu ist hingegen, dass die klassischen Lösungen ergänzt wurden durch eine Realisierung in Visual Basic. Der klassische Teil macht dann gerade mal die Analyse des Problems aus. Bei der dritten Arbeit wurde zu Illustrationszwecken zusätzlich auch Cinderella eingesetzt. Damit konnten insbesondere Iterationen von Möbiustransformationen geschickt demonstriert werden.

1. Maturaarbeit:**Das Apollonische Berührungsproblem: Algebraisch gelöst und visualisiert**

Problemstellung:

Zu drei beliebig vorgegebenen Kreisen soll ein vierter konstruiert werden, welcher die drei gegebenen berührt. Unter Kreisen versteht man in diesem Zusammenhang auch Punkte und Geraden. Dadurch erhält man insgesamt zehn verschiedene Probleme. Je nach Problem ergeben sich maximal acht Lösungen.

Ergebnisse und Erfahrungen:

Die Schülerin SS und der Schüler AB hatten schon vom Apollonischen Berührungsproblem gehört und wollten sämtliche zehn Probleme lösen. Ihre Idee war, die geometrischen Konstruktionen aus einem Buch aus dem Jahre 1890 ins Algebraische zu übersetzen. Sie merkten bald, dass dies ein riesiges Unterfangen und reichlich kompliziert war. Deshalb begannen sie unabhängig vom Buch, die zehn Aufgaben algebraisch zu lösen. Damit beschäftigte sich in erster Linie SS, während AB sich selbständig in Visual Basic einarbeitete und die Lösungen von SS in ein ausgeklügeltes Programm übersetzte. Die Arbeit enthält für jedes der zehn Probleme den algebraischen Lösungsweg mit einer kurzen Analyse der Lösungen und einer graphischen Darstellung. Im Anhang befinden sich der Quellcode des Visual-Basic-Programms und eine CD mit einem exe-File. Dieses erlaubt es dem Leser, ein beliebiges der zehn Probleme in irgendeiner Disposition vorzugeben, sämtliche Lösungen zu berechnen und graphisch darzustellen.

2. Maturaarbeit:**Klassifikation der Kegelschnittgleichung**

Problemstellung:

Die Kegelschnitte lassen sich durch algebraische Gleichungen zweiten Grades in zwei Unbekannten beschreiben. Das Ziel der Arbeit bestand darin, umgekehrt eine beliebig vorgegebene Gleichung der erwähnten Art als Kegelschnitt zu klassifizieren. Zudem sollte ein Visual-Basic-

Programm geschrieben werden, das den betreffenden Kegelschnitt darstellt und seine geometrischen Parameter bestimmt.

Ergebnisse und Erfahrungen:

Im Unterricht wurden die Kegelschnitte als geometrische Örter eingeführt und durch Gleichungen beschrieben. Ein anderes Thema waren Matrizen und lineare Abbildungen. Der Schüler NG löste nun die Aufgabe, indem er die Hauptachsentransformation mittels Diagonalisierung der zur Gleichung gehörenden symmetrischen 2×2 -Matrix vornahm. Er bewältigte die Aufgabe gut und mehrheitlich selbständig. Von mir erhielt er lediglich ein paar entscheidende Inputs. Ich überliess es aber ihm, die Details auszuarbeiten und zu einem einheitlichen Ganzen zusammenzufügen. Sein Hauptbeitrag war ein Visual-Basic-Programm, das er vollständig alleine entwickelte. Seine Rechnungen dienten ihm dabei als Grundlage. Aus Zeitgründen fehlen leider eine übersichtliche Darstellung aller Fälle und eine genauere Untersuchung der Spezialfälle. Das Programm hingegen leistet hervorragende Dienste und erfüllt die gestellten Erwartungen.

3. Maturaarbeit:

Möbiustransformationen: Klassifikation und Visualisierung

Problemstellung:

Jede Möbiustransformation lässt sich in eine der folgenden Klassen einteilen: Loxodromische, hyperbolische, elliptische oder parabolische Transformationen. Die vier Typen unterscheiden sich in der Anzahl ihrer Fixpunkte und in ihrem Iterationsverhalten. Typische Vertreter sind die Drehstreckungen, die reinen Streckungen, die reinen Drehungen bzw. die Translationen. Man kann zeigen, dass jede Möbiustransformation bis auf eine Bewegung der Riemannschen Sphäre ähnlich (d.h. kongruent im Sinne der Gruppentheorie) zu einem der genannten typischen Vertreter ist. Dabei ist die Spur der Abbildung eine Invariante, mit der sich die Einteilung in die vier Typen vornehmen lässt.

Ergebnisse und Erfahrungen:

Im Unterricht wurden komplexe Zahlen eingeführt. Danach behandelten wir komplexe Abbildungen, in erster Linie ganze und gebrochene lineare (d.h. Möbiustransformationen). Die Schülerin SH und der Schüler PS wollten eine Maturaarbeit in Mathematik schreiben. Das gewählte Thema ergab sich erst nach längeren gemeinsamen Vorarbeiten. Die Arbeit besteht zunächst aus einer Einführung in die Thematik. Dabei hat SH mit Hilfe der interaktiven Geometrie-Software Cinderella viele Aspekte im Zusammenhang mit komplexen Zahlen und Abbildungen visualisiert. PS entwickelte darüber hinaus ein umfangreiches Visual-Basic-Programm, welches eine beliebige Möbiustransformation im oben erwähnten Sinne klassifiziert und ihr Iterationsverhalten visualisiert. Die verschiedenen Files sind auf der beigelegten CD enthalten.

Diese Arbeit ist für Gymnasiasten auf einem relativ hohen Niveau. SH und PS mussten vieles selber erarbeiten und vertiefen. Sie waren auf mehrere Inputs meinerseits angewiesen, was durchaus verständlich ist. Mich hat diese Arbeit auch viel Zeit gekostet, da ich mich selber einlesen musste, um mithelfen zu können, ein realistisches Ziel zu definieren und den Weg dorthin zu finden. Es ist sozusagen eine echte Arbeitsgemeinschaft entstanden und sie hat Spass gemacht.

Bei allfälligen Fragen freue ich mich auf Ihr Mail an peter.haensli@alte-kanti-aarau.ch.

Ein Satz zum geometrischen Mittel zweier Dreiecksseiten

Annina Schmid, Kantonsschule Frauenfeld

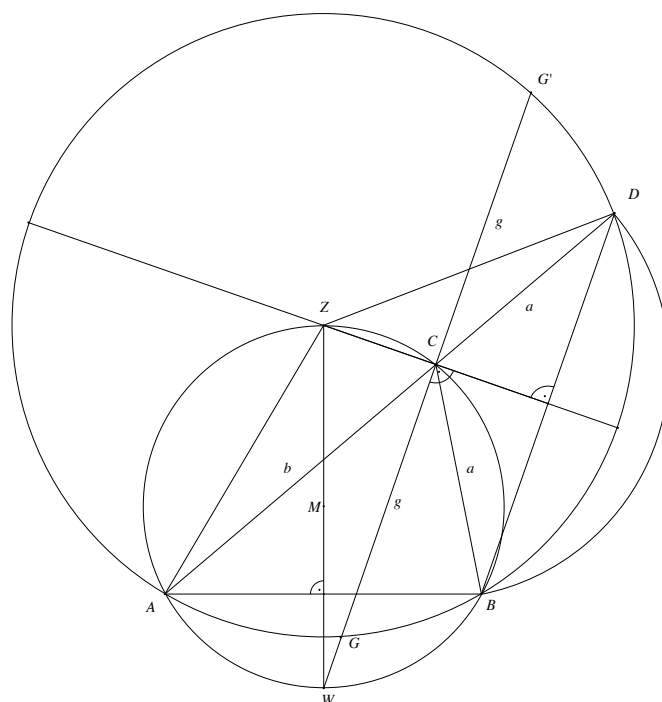
Im Artikel „Das Zeichnen der logarithmischen Spirale mit dem Zirkel“ (erschieden in der Ausgabe Nummer 115) bewies Peter Gallin einen Hilfssatz zum geometrischen Mittel zweier Dreiecksseiten mit Hilfe des Satzes von Pythagoras. Als Studentin seiner Vorlesung „Kernideen zum gymnasialen Mathematikunterricht“ lernte ich diesen Hilfssatz kennen und erhielt die Hausaufgabe ihn zu beweisen. Mit etwas Glück stiess ich beim Bearbeiten der Aufgabe auf den Sehnensatz und erkannte, dass sich der Hilfssatz damit recht einfach beweisen lässt. Aus diesem Grund bat mich Peter Gallin zu seinem Artikel den folgenden Nachtrag zu schreiben.

Im erwähnten Artikel wird festgestellt, dass das geometrische Mittel zweier Seiten eines Dreiecks ABC als eine Länge auf der Winkelhalbierenden der beiden Seiten konstruiert werden kann. Wählen wir beispielsweise die Seiten a und b , dann müssen dazu sowohl die innere als auch die äussere Winkelhalbierende der Ecke C konstruiert werden. Die Schnittpunkte dieser Winkelhalbierenden mit dem Umkreis bezeichnen wir mit W und Z . Es ist bekannt, dass diese beiden Punkte zusätzlich auf der Mittelsenkrechten der Seite AB liegen. Der Kreis mit Mittelpunkt Z und Radius $|ZA|$ schneidet dann die innere Winkelhalbierende im Punkt G und geht ausserdem auch durch B . (Vergleiche dazu die untenstehende Abbildung.)

Wir können nun zeigen: Das geometrische Mittel \sqrt{ab} der Seiten a und b kann als Länge $g = |CG|$ aus der Konstruktion herausgelesen werden.

Beweis mit Hilfe des Sehnensatzes

Der Beweis ist recht einfach einzusehen, wenn man die zusätzlichen Punkte G' und D einzeichnet. G' liegt auf der Verlängerung von CG und auf dem Kreis mit Mittelpunkt Z und Radius $|ZA|$. Da die innere und die äussere Winkelhalbierende der Ecke C senkrecht aufeinander stehen, ist G' der Bildpunkt des an CZ gespiegelten Punktes G und es gilt $g = |CG| = |CG'|$. Ausserdem erhält man D indem man die Seite BC soweit um C dreht, bis diese in der Verlängerung von AC zu liegen kommt. Da das Dreieck BCD gleichschenkelig ist, ist die äussere Winkelhalbierende der Ecke C die Mittelsenkrechten der Strecke BD . Somit geht der Kreis mit Mittelpunkt Z und Radius $|ZA|$ auch durch den Punkt D , ist also Umkreis des Dreiecks ABD . Der Sehnensatz in diesem Kreis mit den beiden sich in C schneidenden Sehnen AD und GG' impliziert nun $|CG| \cdot |CG'| = |CA| \cdot |CD|$, was gleichbedeutend ist mit $g^2 = ab$. Damit ist $g = \sqrt{ab}$ bewiesen. \square





Une éolienne sur le toit du Gymnase de Nyon

Action de sensibilisation aux énergies renouvelables

Lors de sa séance ordinaire de mars 2011, la CRP a eu l'occasion de visiter le Centre didactique des énergies renouvelables du Gymnase de Nyon, ci après: CdERN. A la suite de cette visite, il a été décidé de rédiger un article du bulletin pour en montrer l'intérêt.



Toit du gymnase de Nyon, vue du sud-ouest

De quoi s'agit-il ?

Un dispositif comprenant un site internet, des panneaux d'exposition sur les énergies renouvelables (réalisés par une classe), des panneaux solaires photovoltaïques, des panneaux solaires thermiques et une éolienne.

Pourquoi ?

L'enseignement de l'énergie faisant partie du programme d'étude de tous les élèves, la volonté politique du Grand Conseil vaudois étant manifeste en faveur des énergies renouvelables et une conjonction d'élèves motivés et d'un maître enthousiaste ont contribué à mettre en route ce projet.

Comment faire ?

Des problèmes d'énergie, tout le monde en parle, mais peu de personnes réalisent quelque chose pour les résoudre. Conscients de cette contradiction et soucieux de s'engager, des élèves de 2e année ont décidé de passer à l'acte avec le soutien actif de leur maître de physique, M. D. Friedli, Docteur ès sciences, et par ailleurs

chef de file de la physique. C'est ainsi qu'il a été décidé de tenter de produire par des moyens renouvelables l'énergie consommée pour l'enseignement de la physique au gymnase.

La décision prise, des estimations de consommation ont été faites pour le chauffage, l'eau chaude, l'électricité (principalement l'éclairage) et pour les TP donnant environ 12 kWh en moyenne journalière. Pouvaient-ils les couvrir entièrement à l'aide d'énergies renouvelables? En jouant sur un bilan global de ce qui peut être injecté dans le réseau et de ce qui est consommé effectivement, il valait la peine de tenter l'aventure.

Pratiquement, avec le soutien du Directeur M. Y. Deluz et l'intérêt des Services Industriels de Nyon et du Département de la Formation du Canton de Vaud, le CdERN a été réalisé pour une somme totale d'environ 75'000 francs.

Pourquoi faire ?

Parler d'énergie c'est bien, donner des cours sur l'énergie c'est encore mieux, mais s'en préoccuper régulièrement c'est une autre affaire. La pratique des expositions est courante dans le Gymnase, au moins trois par année toutes branches confondues, mais on constate toujours que l'intérêt est volatil. Mener des actions qui interpellent toute l'année est plus difficile. L'affichage en continu de la production d'électricité est aussi anecdotique. Qui regarde encore, par exemple, à la gare CFF de Morges la production instantanée et cumulée des panneaux solaires déposés sur les marquises?

L'installation d'une éolienne sur le toit du Gymnase, objet visible loin à la ronde, suscite régulièrement des questions. Il n'y a pas de jour sans que l'un ou l'autre des huit collègues de physique ne soit interpellé pour savoir comment ça marche, combien d'électricité elle produit, si elle peut supporter les coups de bises, etc.

Les professeurs de physique disposent de l'enregistrement des données jour après jour et peuvent établir des bilans d'énergie et montrer des relations « ensoleillement – production » pour le photovoltaïque et « régime des vents – production » pour l'éolien. Ceci grâce à une station météo gérée par l'EPFL et installée sur le toit du gymnase.

Bilan provisoire

Après une année de fonctionnement du site au complet, on peut relever une production journalière moyenne de 6.0 kWh pour le thermique (panneaux d'un total de 5 m²), 3.6 kWh pour le photovoltaïque (panneaux d'un total de 9 m²) et 0.6 kWh pour l'éolienne (3.72 m de diamètre).

L'éolienne a des performances assez décevantes, mais le site est en plaine et très turbulent (zone urbanisée; taille du mât abaissée pour des questions architecturales liées à des standards). On pourrait par exemple la remplacer par une pompe à chaleur sur un autre site. La consommation de la physique n'est donc pas totalement couverte (il manque de l'ordre de 20%). Il faut l'avouer et se confronter à la réalité: on ne peut pas tout simplement substituer du renouvelable au non durable, il faut aussi veiller à diminuer sa consommation!

Avec le CdERN et son utilisation avec les élèves, un objectif didactique d'intérêt et de sensibilisation aux questions d'énergie est pleinement atteint.

Pour toute information supplémentaire, vous pouvez vous référer au site <http://www.ocinfo.ch/physique/cdern/> ou contacter M. D. Friedli par courriel: friedli.d@bluewin.ch

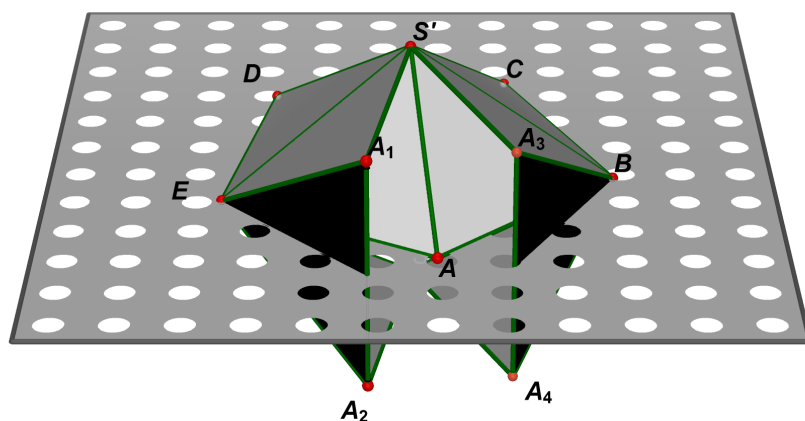
Au nom de la CRP
J-D Monod
Président



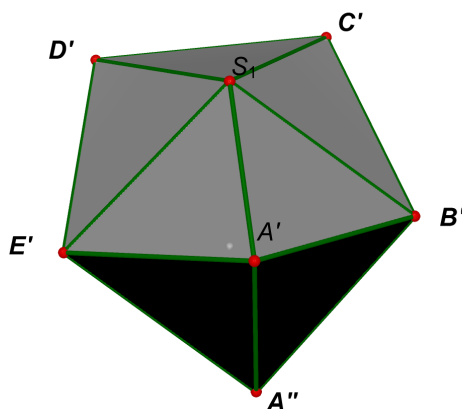
Le deltaèdre convexe à 12 faces

Jean Piquerez

Dans une parution du Collège Rousseau (Dispositif de recherche : polyèdres, Volume 1, par Pierre Bolli et Madeline Humbert), un exercice est consacré à répertorier et à décrire, grâce à la formule d'Euler, les deltaèdres convexes sachant qu'ils sont au nombre de huit. Rappelons qu'un deltaèdre est un polyèdre formé exclusivement de triangles équilatéraux. Sept d'entre eux sont cités et décrits dans la réponse de l'ouvrage, alors que le 8^{ème}, à 12 faces, n'est que suggéré sous la forme d'une phrase quelque peu sibylline, à savoir : « On obtient un tel polyèdre à partir d'une bipyramide pentagonale que l'on fait « bailler » (voir figures ci-dessous) en un sommet des bases communes pour y insérer 2 triangles équilatéraux. C'est désormais ce polyèdre qui retiendra l'attention dans cet article. Il peut se construire comme suit :



On construit la bipyramide $S' - ABCDE - S''$, puis on relève suffisamment par rotation autour d'une arête les 4 triangles $S'AE, S'AB, S'BE$ et $S''AB$ (en gris) pour y insérer (en noir) les deux triangles EA_1A_2 et BA_3A_4 et, enfin, on joint A_1 à A_3 et A_2 à A_4 afin d'obtenir la figure ci-dessous. Remarquons que C', D', A' et A'' sont des sommets d'ordre 4 et B', E', S_1 et S_2 sont, quant à eux, d'ordre 5.



Remarque : Il est fortement conseillé de faire un modèle en carton.

Je n'ai pas trouvé de construction géométrique simple pour déterminer les sommets. On peut bien entendu imaginer un système de tiges articulées de longueur 2, les points A_1, A_3 d'une part, et A_2, A_4 d'autre part, étant assujettis à se mouvoir dans des plans parallèles à $(BCDE)$ et à une distance 1 de ce dernier de sorte que A_1 et A_3 (respectivement A_2 et A_4) se rejoignent en A' (respectivement en A'') en tirant S' et S'' le long d'un cercle, intersection d'une sphère de rayon 2 et de centre D avec le plan médiateur de $[CD]$ jusqu'à ce que S' vienne en S_1 et S'' en S_2 .

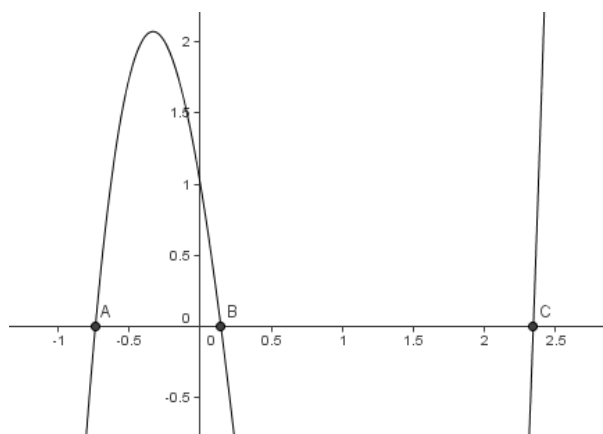
J'ai alors essayé de déterminer les coordonnées de ses huit sommets, en observant qu'il y avait, d'une part, deux plans de symétrie $(B'C'D'E')$ et $(S_1S_2A'A'')$ et que, d'autre part, un quart de tour, dans un sens ou dans l'autre, autour de la droite joignant le milieu M du segment $[C'D']$ avec le milieu N du segment $[A'A'']$, perpendiculaire commune aux droites $(C'D')$ et $(A'A'')$, suivie d'un demi tour selon une perpendiculaire au plan $(B'C'D'E')$ passant par le milieu de $[MN]$ semblait laisser en place ce polyèdre. Tenant compte de ces considérations, posons :

$D'(-a; -1; 0), C'(-a; 1; 0), E'(b; -c; 0), B'(b; c; 0), A'(a; 0; 1), A''(a; 0; -1), S_1(-b; 0; c)$ et $S_2(-b; 0; -c)$ et supposons que chaque arête soit de longueur 2 par commodité.

Comme $E'D' = E'S_1 = E'A' = 2$, il vient :

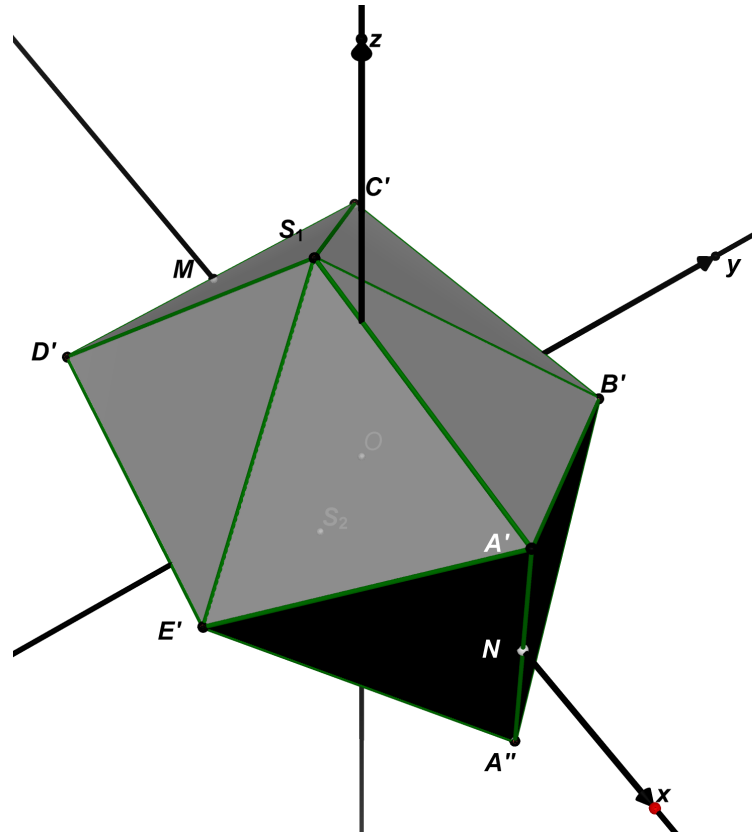
$$\left. \begin{array}{l} (b+a)^2 + (c-1)^2 = 4 \\ (b-a)^2 + c^2 + 1 = 4 \\ 2b^2 + 2c^2 = 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2c = 3 \quad (1) \\ a^2 + b^2 + c^2 - 2ab = 3 \quad (2) \\ b^2 + c^2 = 2 \quad (3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c = 2ab \quad (4) = (1) - (2) \\ b = \frac{a^2 - 1}{2a} \quad (5) = (2) - (3) \end{array} \right\} \Rightarrow c = a^2 - 1$$

$$(a^2 - 1)^2 \left(1 + \frac{1}{4a^2} \right) = 2 \Rightarrow 4a^3 - 7a^2 - 6a + 1 = 0 \text{ avec } a = a^2$$



$$a \approx 2,345 \text{ ou } 0,14 \Rightarrow a \approx 1,53 \text{ ou } 0,37.$$

Il est manifeste que seule la 1^{ère} valeur de a convient (on peut d'ailleurs montrer sans difficulté que $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq a \leq \frac{3}{2} + \sqrt{3}$ en raisonnant dans le quadrilatère $MD'E'N$ sachant que $MD' = 1$, $D'E' = 2$, $E'N = \sqrt{3}$ et $\angle NMD' = 90^\circ$). Alors on trouve : $c \approx 1,34$ et $b \approx 0,44$, d'où : $A_1(-1,53; -1; 0)$, $A_2(-1,53; 1; 0)$, $A_3(0,44; -1,34; 0)$, $A_4(0,44; 1,34; 0)$ et $B_1(1,53; 0; 1)$, $B_2(1,53; 0; -1)$, $B_3(-0,44; 0; 1,34)$, $B_4(-0,44; 0; -1,34)$. On peut alors facilement vérifier par le calcul la convexité de ce polyèdre.



Ce polyèdre possède deux symétries planaires S_p et S_q de plans $p = (Oxy)$ et $q = (Oxz)$ dont la composition est un demi-tour R_1 d'axe Ox . Matriciellement, on a :

$$M(S_p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, M(S_q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M(S_p \circ S_q) = M(S_q \circ S_p) = M(R_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les composées d'un quart de tour d'axe (Ox) suivi d'un demi tour d'axe (Oz) conservent le polyèdre et sont des demi-tours R_{d_1} (respectivement R_{d_2}) d'axe d_1 (respectivement d_2) d'équations $x = 0$ et $y = z$ (respectivement $x = 0$ et $y = -z$). Matriciellement, on a :

$$M(R_{d_1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(R_{d_2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : il n'est pas facile de voir que R_{d_1} et R_{d_2} conservent le deltaèdre.

La composition de ces nouvelles rotations avec S_p et S_q donne :

$$M(R_{d_1} \circ S_p) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = M(R_{d_2} \circ S_q) = M(f)$$

$$M(R_{d_2} \circ S_p) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M(R_{d_1} \circ S_q) = M(g)$$

où f et g sont des involutions de déterminant -1 qui ne sont pas des symétries planaires.

Le groupe des symétries de ce deltaèdre a la table suivante :

	I	R_{d_1}	R_{d_2}	R_1	S_p	S_q	f	g
I	I	R_{d_1}	R_{d_2}	R_1	S_p	S_q	f	g
R_{d_1}	R_{d_1}	I	R_1	R_{d_2}	f	g	S_p	S_q
R_{d_2}	R_{d_2}	R_1	I	R_{d_1}	g	f	S_q	S_p
R_1	R_1	R_{d_2}	R_{d_1}	I	S_q	S_p	g	f
S_p	S_p	f	g	S_q	I	R_1	R_{d_1}	R_{d_2}
S_q	S_q	g	f	S_p	R_1	I	R_{d_2}	R_{d_1}
f	f	S_p	S_q	g	R_{d_1}	R_{d_2}	I	R_1
g	g	S_q	S_p	f	R_{d_2}	R_{d_1}	R_1	I

Il est isomorphe à $D_2 \times C_2 \cong C_2 \times C_2 \times C_2$.



SCHWEIZER JUGEND FORSCHT
LA SCIENCE APPELLE LES JEUNES
SCIENZA E GIOVENTÙ
SCIENZA E GIUVNETETGNA

„Faszination Informatik“

Schweizer Jugend forscht organisiert vom **4. bis 10. September 2011** eine Informatik-Studienwoche für **16-20-jährige Schüler/-innen** aus der ganzen Schweiz. Mit kompetenter Unterstützung von Fachexperten der Universitäten Basel, Lugano und Neuenburg sowie der Fachhochschule Nordwestschweiz, darf während sechs Tagen an einem Informatikprojekt getüftelt und programmiert werden. Die Angebote der Hochschulen reichen von der Entwicklung einfacher Spiele z.B. für Android Mobiltelefone bis hin zur Arbeit mit Robotern und Quadrocoptern.

Auf unserer Website www.sjf.ch (Studienwochen > Faszination Informatik) finden Sie weitere Informationen sowie den Link zur Anmeldung (Anmeldeschluss: 29. Juli 2011). Wir freuen uns, interessierten Jugendlichen zu zeigen wie spannend und vielseitig die Informationstechnologie ist.

„Fascination informatique“

La Science appelle les jeunes organise **du 4 au 10 septembre 2011** une semaine d'étude d'informatique pour des **élèves de 16 à 20 ans** issus de toute la Suisse. Avec le soutien compétent d'experts des universités de Bâle, Lugano et Neuchâtel ainsi que de la Haute école spécialisée du Nord Ouest de la Suisse, les élèves effectueront pendant six jours des recherches et programmations sur un projet informatique. Les offres des hautes écoles vont du développement de jouets simples, par ex. pour des téléphones mobiles Android, au travail avec des robots et des quadrocoptères.

Sur notre site Web www.sjf.ch (Semaines d'étude > Fascination informatique), vous trouverez d'autres informations ainsi que le lien pour vous inscrire (date limite: le 29 juillet 2011). Nous nous réjouissons de montrer à des jeunes intéressés à quel point la technologie de l'information peut être captivante et variée.

“Il fascino dell'informatica”

Dal 4 al 10 settembre 2011 Scienza e gioventù organizza una settimana di studio dedicata all'informatica alla quale possono partecipare giovani studenti provenienti da tutta la Svizzera di età compresa tra i **16 e i 20 anni**. Sotto la competente guida di esperti ricercatori delle Università di Basilea, Lugano e Neuchâtel e della Scuola Universitaria Professionale della Svizzera Nordoccidentale, i giovani potranno sviluppare un progetto informatico e approfondire le loro competenze di programmazione: i progetti proposti dalle Università ospitanti spaziano dalla realizzazione di semplici giochi per telefoni cellulari con sistema operativo Android fino alla programmazione di robot o quadricotteri.

Sul sito www.sjf.ch (alla rubrica settimane di studio) sono disponibili ulteriori informazioni e può essere scaricato il formulario d'iscrizione (termine: 29 luglio 2011). Aspettiamo con gioia le iscrizioni di tanti giovani motivati e desiderosi di scoprire quanto versatili ed entusiasmanti possono essere le tecnologie informatiche.





Cours de perfectionnement 2011 Mathématiques et sciences de l'Univers

Brissago (TI), 27–30 septembre 2011

Objectif du cours

Les mathématiques ont depuis toujours été au centre de nos tentatives pour comprendre l'Univers qui nous entoure et ceci à plusieurs niveaux: la mécanique céleste nous donne les clés de compréhension du système solaire; la géométrie Riemannienne et la topologie fournissent des modèles de l'Univers et une grande variété d'outils mathématiques est nécessaire dans l'exploration spatiale.

La CRM en collaboration avec la CMSI organise le cours de perfectionnement 2011 consacré aux liens entre les mathématiques, l'astronomie, l'astrophysique et la cosmologie. L'objectif du cours est de permettre aux participants de découvrir comment les mathématiques sont utilisées pour construire des modèles de l'Univers et de son évolution. Parmi les sujets qui seront traités sont prévus des rudiments de relativité générale (et ses conséquences: existence de trous noirs, ondes gravitationnelles, etc.) ainsi que des bases de cosmologie (modèles cosmologiques, composition de l'Univers, rayonnement fossile). Un aperçu des développements récents sera aussi proposé (univers à plus de quatre dimensions, nature de la matière noire et de l'énergie sombre).

Un soin particulier sera donné pour rendre le sujet accessible à un public de non-spécialistes.

Conférenciers

Ruth Durrer (Université de Genève)
Martin Kunz (Université de Genève)
Georges Meynet (Observatoire de Genève)

Gerhard Wanner (Université de Genève)
Katarzyna Zuleta (Gymnase de Nyon)

Inscription

WBZ CPS Berne
Cours WBZ CPS 11.04.20
www.webpalette.ch
Délai d'inscription : 30 juin 2011
Prix du cours : 350.-

Lieu du cours

Parkhotel Brenscino
Via Sacro Monte 21
6614 Brissago
091 786 81 11
info@brenscino.ch
www.brenscino.ch

Renseignements

José Luis Zuleta
Avenue de France 47
1004 Lausanne
021 624 25 46
jose Luis.zuletaestrugo@epfl.ch

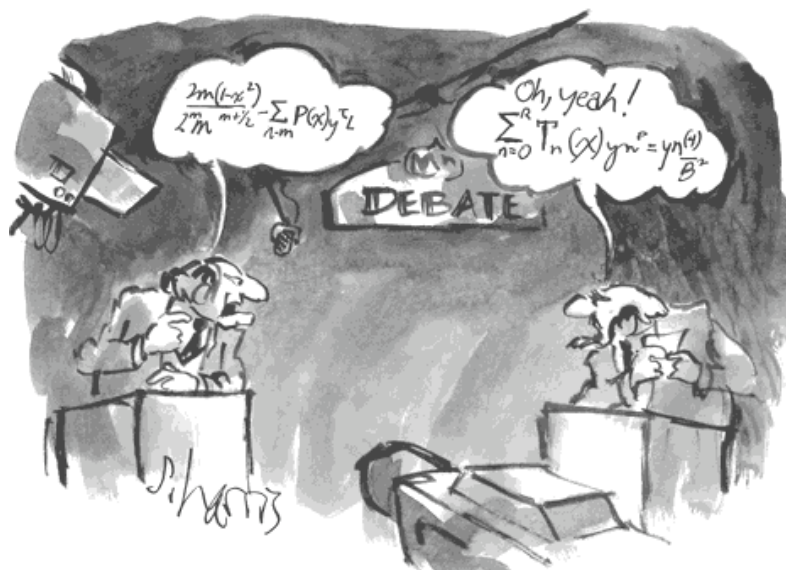
Prix de l'hôtel

130 à 158 CHF par personne et par jour en chambre individuelle avec demi-pension.
Les participants sont priés d'effectuer eux-mêmes leur réservation avant le 30 juin 2011.

Do you speak physics? Parlez-vous les maths?

An alle, die Mathematik und / oder Physik immersiv unterrichten (werden):

Wir nehmen die Tradition wieder auf und bieten den 5. Kurs für Immersionslehrkräfte in Mathematik oder Physik an. Im Zentrum des Kurses steht wie immer der Erfahrungsaustausch.



Rosemay McGuigan wird aus ihrer langjährigen Laufbahn als Immersionslehrerin für Mathematik in Englisch berichten. Zudem sind Inputs zu Themen wie «Einstieg in den Immersionsunterricht», «Korrektur von Sprachfehlern im Unterricht», «Alternative Bewertung» oder «International Young Physicists' Tournament als Erweiterung des Immersionsunterrichts» geplant. Besuche von Mathematik- und Physiklektionen an der Kantonsschule Wettingen bilden den Ausgangspunkt für Diskussionen. Durch Gespräche mit IB-SchülerInnen, Tipps zu über Büchern und Material und informellen Austausch ergeben sich Anregungen für den eigenen Unterricht.

Der Kurs richtet sich an Immersionslehrpersonen der Stufe Sek II. Immersionserfahrung oder Beiträge sind willkommen, aber nicht Bedingung.

Kursdaten: Freitag/Samstag 2. – 3. September 2011

Kursort: Kantonsschule Wettingen

Kurskosten: CHF 250

Anmeldung unter www.webpalette.ch bis spätestens 30. Juni 2011

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an Dana Rudinger, [rud\(at\)kswe.ch](mailto:rud(at)kswe.ch)

Weiterbildungskurs
Spektroskopie in der Astronomie

Kursort: Brig/Simplon

Kursdaten: Freitag/Samstag 18./19. November 2011

Anmeldefrist: 16.09.2011

Kursinhalte

Mit spektroskopischen Methoden wird zurzeit intensiv nach extrasolaren Planeten gesucht. Ziel des Kurses ist es, die Grundlagen der Spektroskopie zu zeigen und anhand von Beispielen auch für den Unterricht zugänglich zu machen.

Ziele

Die Kursteilnehmer

- lernen die Grundlagen der Spektroskopie
- bekommen Unterlagen, welche direkt im Unterricht gebraucht werden können
- werden über den neusten Stand der Suche nach extrasolaren Planeten informiert

Methoden: Ateliers, Diskussion, Gruppenarbeit, Referat

Zielgruppe: Lehrpersonen für Physik der Sekundarstufe 2

Kursleitung

Martin Henzen, Kantonales Kollegium Spiritus Sanctus, Kollegiumsplatz 1, 3900 Brig
Tel: 027 922 29 20, E-Mail: martin.henzen@spiritus.ch

Referenten

- Hugo Kalbermatten, Präsident AGO, Bitsch
- Hans Roth, ehem. Physiklehrer
- Hans Martin Schmid, PD ETH Zürich

Kurskosten: Fr. 360.00

Kurs-ID WBZ_11_05_03

Anmeldung über die WBZ: <http://www.webpalette.ch/dyn/178395.asp>

Ja - Oui - Sì

Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und -lehrer (VSG) werden.

J'aimerais devenir membre de la Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique (SSPMP) et de la société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire (SSPES).

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

Beitrag/Montant/Quota: Fr. 120.- (VSG-SSPES-SSISS) + Fr. 40.- (SSIMF-SSPMP-VSMP)

Frau/Mme/Sig.ra Herr/M./Sig. Prof. Dr.

Name/Nom/Cognome:

Vorname/Prenom/Nome:

Adresse/Indirizzo (privat/privato):

Plz-Ort/NP-Ville/CAP-Luogo:

(Land/Pays/Paese):

Email: (Tel):

(Geburtsdatum/Date de naissance/Data di nascita):

Sprache/Langue/Lingua: D F I.

Schule/école/scuola: Kanton/canton/cantone:

Kategorie/Catégorie/Categoria: activ/actif/attivo passive/passif/passivo

Student/-in, étudiant(e), studente/ssa.

Einsenden an/envoyer à/inviare a:

VSG-SSPES-SSISS, Postfach 8742 (Waisenhausplatz 14), 3001 Bern

oder per Internet: www.vsg-sspes.ch

Impressum

Herausgeber – *Éditeur*

VSMP / SSPMP / SSIMF

Korrespondenz – *Correspondance*

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Layout – *Mise en page*

Jean-Luc Barras jeanluc.barras@gmail.com
Ès Novallys 224 Tél. 026 912 98 24
1628 Vuadens

Inserateverwaltung – *Publicité*

Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch
Weinbergstrasse 3 Tel. 055 410 62 36
8807 Freienbach

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

– *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:

Ganzseitige Fr. 500.–
Halbseitige Fr. 300.–

Beilagen:

bis 20 g Fr. 500.–
über 20 g Nach Vereinbarung

Adressänderung – *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder – Membres de la SSPMP :

VSG – SSPES – SSISS

Sekretariat, Postfach 8742
3001 Bern

Abonnenten die nicht Mitglieder der VSG sind:

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Auflage – *Tirage*

900. Erscheint dreimal jährlich.

Präsidentin VSMP – SSPMP – SSIMF

Elisabeth McGarrity mcgarrity@rhone.ch
Bäjiweg 45 Tel. 079 34 34 862
3902 Brig-Glis

Deutschscheizerische Mathematikkommission

Hansjürg Stocker hjstocker@bluewin.ch
Friedheimstrasse 11 Tel. 044 780 19 37
8820 Wädenswil

Deutschscheizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@gymburgdorf.ch
Marienstrasse 21 Tel. 031 534 66 74
3005 Bern

Commission Romande de Mathématique

Patrick Hochuli patrick.hochuli@gfbienne.ch
Alex-Moser 50 Tél. 032 365 60 15
2503 Bienne

Commission Romande de Physique

Jean-Daniel Monod jean-daniel.monod@urbanet.ch
Rue du Bugnon 14 Tél. 021 701 38 62
1030 Bussigny

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Vincenzo d'Alberti 13
6600 Locarno Tél. 091 751 14 47

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

– *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 117	31.08.2011 (20.10.2011)
Nr. 118	31.12.2011 (20.02.2012)
Nr. 119	30.04.2012 (20.06.2012)

Druck und Versand – *Imprimerie*

Niedermann Druck AG
Rorschacherstrasse 290
9016 St. Gallen

Internet-Adressen – Adresses Internet

<http://www.vsmf.ch> — <http://www.sspmp.ch> — <http://www.ssimf.ch>