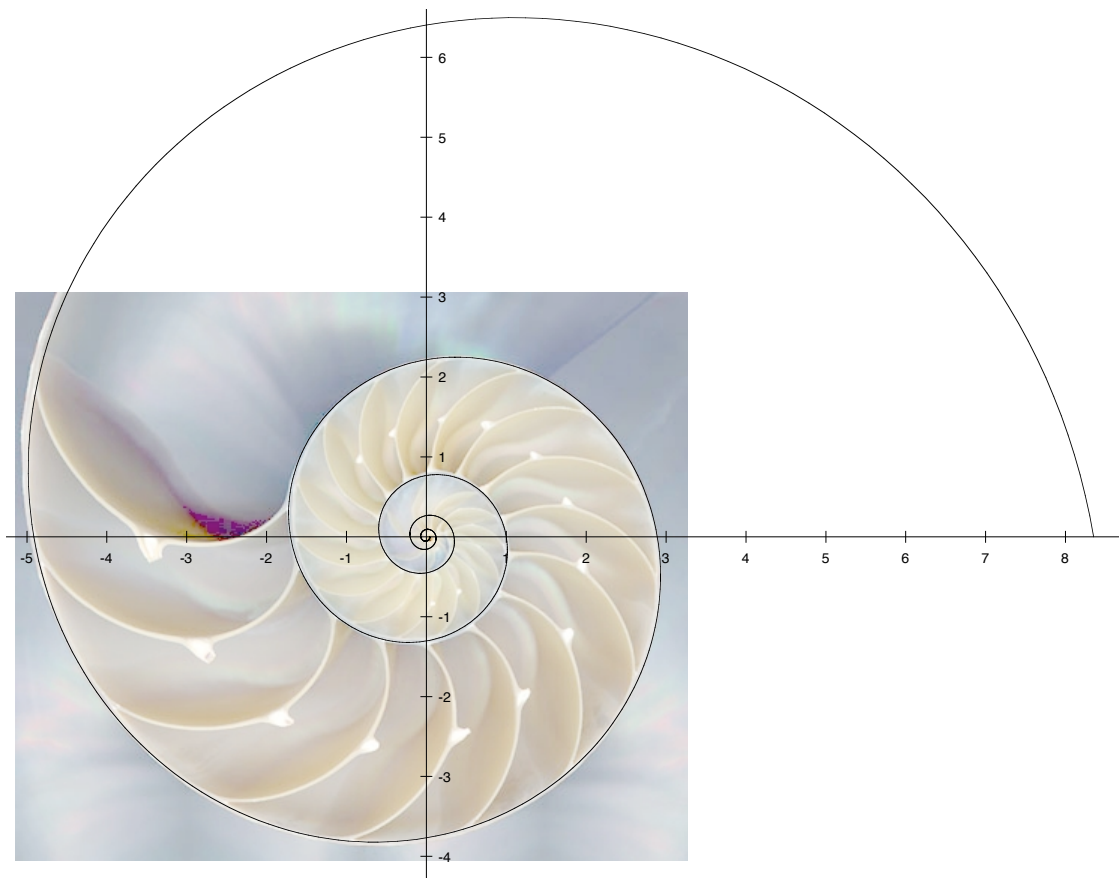




Bulletin

Februar 2011 – Février 2011

N° 115

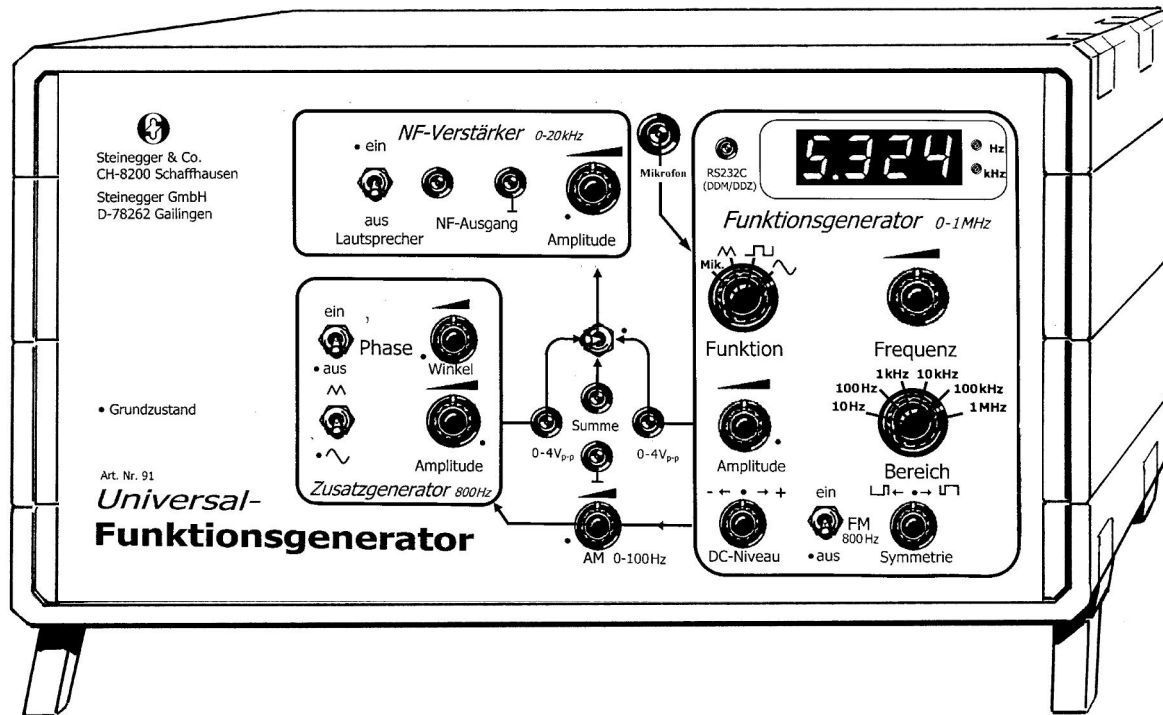


VSMP – SSPMP – SSIMF

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica

Universal- Funktionsgenerator

Kompaktversion Art.Nr. 91



Das vielseitige Demonstrationsgerät für die Akustik, Schwingungs- und Wellenlehre sowie die Elektrik.

- **Funktionen: Sinus, Rechteck, Dreieck, Sägezahn**
- **Zwei Oszillatoren mit Synchronisationsmöglichkeit in beliebiger Phasenlage (für Interferenzversuche)**
- **Mikrofoneingang, NF-Verstärker, eingebauter Lautsprecher**
- **Frequenz- und Amplitudenmodulation**
- **Direkter Anschluss ans DDM und an den DDZ**
- **Ausführliche Bedienungsanleitung mit vielen Anwendungen**
- **Preis inkl. MWSt.: SFr. 1288.-**

Gerne senden wir Ihnen kostenlos die Kurzbeschreibung "Universal-Funktionsgeneratoren Nr. 91" zu.

Steinegger & Co.
Rosenbergstrasse 23
8200 Schaffhausen



☎ : 052-625 58 90

Fax : 052-625 58 60

Internet: www.steinegger.de

In dieser Nummer – *Dans ce numéro*
Commission Romande de Mathématiques 3
Jean-Daniel Voelke

Histoire et épistémologie des mathématiques dans les temps modernes 3

DPK

Deutscheschweizerische Physikkommission 7
Martin Lieberherr

Magnetische Feldlinien paralleler Drähte 7

Deutscheschweizerische Mathematikkommission 10
Peter Gallin

Das Zeichnen der logarithmischen Spirale mit dem Zirkel 10

Armin P. Barth

Lucky Seven – Die Mathematik hinter dem Spiel 19

Balz Bürgisser

Ein probabilistischer Primzahltest – Bericht zur Maturarbeit 23

Martin Huber

Leistungsnachweise und Prüfungen in Mathematik – einmal anders 25

H.R. Schneebeli

 Buchbesprechung: Measurements and their Uncertainties.
 A Practical Guide to Modern Error Analysis. 31

H.R. Schneebeli

 Buchbesprechung: Differential- und Integralrechnung.
 Eine anwendungsbezogene Einführung mit TI-Nspire™ CAS 33

Impressum 37

Internet-Adressen – *Adresses Internet*

<http://www.vsmf.ch> — <http://www.sspmp.ch> — <http://www.ssimf.ch>

Titelseite

Nautilus-Schale mit überlagerter Spirale. Siehe Artikel von Peter Gallin, Seite 10.



Histoire et épistémologie des mathématiques dans les temps modernes

Cours organisé par la CRM

Leysin, du 28 septembre au 1^{er} octobre 2010

Ce cours a réuni 47 participants et 6 conférenciers venant de Suisse, de France et d'Allemagne. Des sujets variés ont pu ainsi être proposés aux participants.

Le statut des axiomes en géométrie : entre évidence et consistance.

Le cours a commencé mardi matin avec un exposé de M. Jean-Daniel Voelke (Lausanne) intitulé *Le statut des axiomes en géométrie : entre évidence et consistance*. Son intention était de montrer aux participants comment on est passé en géométrie, à la fin du 19^e siècle, d'une épistémologie de l'évidence à une épistémologie de la consistance. Il a d'abord rappelé la position des philosophes classiques : pour eux, les axiomes géométriques expriment des évidences. Il a ensuite expliqué comment l'invention de la géométrie non euclidienne entre 1825 et 1830 était venue remettre en question cette conception. L'apparition de cette théorie a fait perdre à la géométrie son statut de science « certaine » et a donné naissance à une conception empiriste de cette discipline. Après avoir donné un aperçu des discussions suscitées entre 1870 et 1890 par l'invention de la géométrie non euclidienne, il a montré comment une conception de la géométrie de plus en plus abstraite et séparée de la réalité s'était développée à la fin du 19^e siècle, à la suite notamment des recherches en axiomatique effectuées par des géomètres italiens. Cette conception sera définitivement imposée par le célèbre ouvrage de David Hilbert : *Les fondements de la géométrie* (1899).

Approches en philosophie des mathématiques.

M. Gerhard Heinzmann (Nancy) a présenté le mardi après-midi un double exposé intitulé *Approches en philosophie des mathématiques*. Il a abordé un grand nombre de problèmes allant de l'Antiquité jusqu'à nos jours. Il a en particulier expliqué les différences entre les grandes épistémologies du 20^e siècle comme le formalisme, le constructivisme et l'intuitionnisme. Selon lui, chacune de ces épistémologies présente des points forts et des points faibles et aucune ne peut être considérée comme l'emportant sur les autres. M. Heinzmann a aussi présenté en détail un modèle non standard de l'arithmétique.

Tentative frégréenne de fondement logique des mathématiques.

Le mercredi matin était consacré à deux exposés de Mme Jacqueline Boniface (Nice). Le premier, *Tentative frégréenne de fondement logique des mathématiques*, a permis aux participants de retrouver un mathématicien et logicien dont ils avaient déjà entendu parler la veille dans l'exposé de J. D. Voelke, mais sous un autre angle. Si Frege a en effet toujours affirmé que la géométrie trouvait son fondement dans l'intuition et s'est de ce fait opposé à la géométrie non euclidienne, il considérait en revanche que l'arithmétique trouve son fondement dans la logique. Mme Boniface a d'abord présenté de manière générale l'oeuvre de Frege en mettant en évidence son apport essentiel dans le domaine de la logique. Elle a ensuite analysé de manière détaillée la définition logique du nombre donnée par Frege à partir de la notion de concept.

Mathématiques algorithmiques et mathématiques conceptuelles.

Le second exposé de Mme Boniface était intitulé *Mathématiques algorithmiques, mathématiques conceptuelles : Kronecker et Dedekind*. Elle a commencé par caractériser l'approche conceptuelle de Dedekind, chez qui l'on voit apparaître des notions aussi essentielles que celles de corps et d'anneau. Elle a ensuite montré comment la notion de nombre idéal, inventée par Kummer pour permettre au sein de l'ensemble des entiers d'un corps de nombres algébriques de degré fini une décomposition unique en un produit de facteurs premiers, avait été traitée par Dedekind et Kronecker. A l'approche conceptuelle du premier (fondée sur la notion d'idéal) s'oppose l'approche calculatoire du second (fondée sur la notion de diviseur). C'est finalement la première qui s'est imposée mais la seconde mérite d'être redécouverte. La différence des approches repose en fin de compte sur deux conceptions opposées de la mathématique : pour Dedekind, c'est une science de l'esprit alors que pour Kronecker il s'agit d'une science naturelle.

Histoire des algorithmes : d'Euclide à Turing.

La conférencière du jeudi matin était Mme Evelyne Barbin (Nantes). Dans son premier exposé, *L'histoire des algorithmes : d'Euclide à Turing*, elle a présenté un algorithme babylonien de calcul d'inverse et trois algorithmes grecs; parmi ceux-ci, citons l'algorithme exposé au livre VII des *Eléments* d'Euclide et permettant de déterminer si deux nombres entiers sont premiers entre eux. Elle a ensuite effectué un saut dans le temps de plus de deux millénaires et a expliqué le fonctionnement de deux algorithmes modernes : la machine de Turing et celle de Post. Le second exposé était intitulé *Les courbes, entre mathématiques, physiques et techniques*. Mme Barbin a tout d'abord relevé que si nous plaçons au premier plan de notre enseignement la notion de fonction, celle-ci est apparue tardivement et que c'est en fait la notion de courbe qui a longtemps prédominé. Elle a donné quelques exemples de la manière dont cette notion avait été

traitée dans l'Antiquité. Elle a notamment présenté la définition des coniques d'Apollonius et expliqué comment la conchoïde de Nicomède permet d'effectuer la trisection de l'angle. Elle a ensuite à nouveau accompli un saut dans le temps et montré comment des problèmes physiques avaient, au 17^e siècle, conduit à l'étude de courbes. Parmi les exemples étudiés, citons la recherche de courbes anaclastiques (transformant un faisceau lumineux parallèle en un faisceau convergent) par Descartes (l'hyperbole et l'ellipse sont solution) et les recherches faites par Huygens en vue de construire un pendule isochrone et de résoudre ainsi le problème de la mesure des longitudes; dans ce cas, la solution fait intervenir une courbe étudiée en détail tout au long du 17^e siècle : la cycloïde. Elle a conclu avec la méthode inverse des tangentes de Leibniz, point de départ des équations différentielles.

De la perspective au plan projectif.

L'après-midi était consacrée à deux exposés de M. Philippe Lombard (Nancy). Dans le premier, *De la perspective au plan projectif*, il a montré comment la perspective était apparue chez les peintres du 15^e siècle. Ses propos étaient illustrés par une riche iconographie. Sa maîtrise des outils informatiques a fait des merveilles et les participants ont ainsi pu voir de quelle manière les peintres appliquaient ou n'appliquaient pas les lois de la perspective et dans quelle intention. Il a ensuite parlé du rôle de Desargues dans la naissance de la géométrie projective au 17^e siècle. Avancé dans le temps de plus de deux siècles, il a montré pour finir comment le plan projectif pouvait être réalisé topologiquement sur une surface de l'espace euclidien : la surface dite «de Boy», découverte en 1903 par W. Boy.

De la réforme des maths moderne aux logiciels de géométrie dynamique.

Le second exposé était intitulé *De la réforme des maths modernes aux logiciels de géométrie dynamique*. M. Lombard a commencé par expliquer les raisons de cette réforme entreprise à la fin des années 1960. Il a ensuite donné quelques exemples d'application qui n'ont pas manqué de déclencher l'hilarité de l'auditoire. Le sommet semble avoir été atteint par la définition de la droite proposée dans un manuel de 4^{ème} de 1971. La réforme a été suivie d'une contre-réforme initiée notamment par René Thom. En 1984, toutes les notions controversées ont disparu des manuels du niveau secondaire. On semble être tombé aujourd'hui dans l'excès contraire en se bornant à vérifier des théorèmes de manière expérimentale. Pour certains didacticiens, l'illustration d'un théorème à partir d'un nombre suffisant de figures devrait suffire pour emporter l'assentiment de l'élève.

La géométrie est-elle une science expérimentale?

La dernière matinée était consacrée à deux exposés de M. Klaus Volkert (Wuppertal). Le premier avait pour titre *La géométrie est-elle une science expérimentale?* M. Volkert a d'abord rappelé la fameuse phrase de Platon selon laquelle il ne faut pas confondre la figure tracée dans le sable et la figure abstraite. Il a ensuite montré comment la géométrie, à la suite notamment de l'invention de la géométrie non euclidienne, avait été considérée au 19^e siècle par de nombreux mathématiciens comme une science expérimentale. M. Volkert a présenté la solution conventionnaliste de Poincaré qui distingue clairement la géométrie, théorie abstraite, de ses réalisations expérimentales. Il a conclu en reprenant à son compte la phrase de Platon. Le second exposé était intitulé *Qu'est-ce qu'une aire?* M. Volkert a expliqué comment un mathématicien allemand, P. Gerwien, avait développé dans deux articles publiés en 1833 une nouvelle théorie de l'aire des polygones valable dans le plan et sur la sphère. Elle repose sur la notion d'équidécomposabilité : deux polygones sont équidécomposables s'ils peuvent être décomposés chacun en une famille de polygones deux à deux congruents. S'il est clair que deux polygones équidécomposables ont la même aire, la réciproque n'est pas banale et constitue l'essentiel du travail de Gerwien. M. Volkert a proposé aux participants d'étudier quelques cas simples mettant en jeu des triangles. Il a ensuite expliqué le principe de la démonstration générale. Relevons que l'analogue n'est pas vrai dans l'espace. Deux polyèdres peuvent avoir le même volume sans être équidécomposables. M. Volkert a terminé son exposé en donnant des exemples de problèmes de dissection, un sujet typiquement réservé aux mathématiciens amateurs. Il s'agit par exemple de transformer n carrés isométriques en un seul carré de même aire. C'est possible si n s'écrit comme somme de deux carrés différents.

Au terme de cette semaine, les participants se sont déclarés très satisfaits. Ils ont eu la chance d'entendre des spécialistes reconnus présenter leurs travaux et ont eu une bonne image de ce que sont l'histoire et la philosophie des mathématiques. Ils ont sans doute mesuré l'intérêt que présentent ces disciplines, malheureusement quasi-absentes de la formation universitaire en Suisse. Ils ont apprécié l'enrichissement apporté par une réflexion sur les méthodes et les fondements des mathématiques.

Jean-Daniel Voelke, Lausanne.

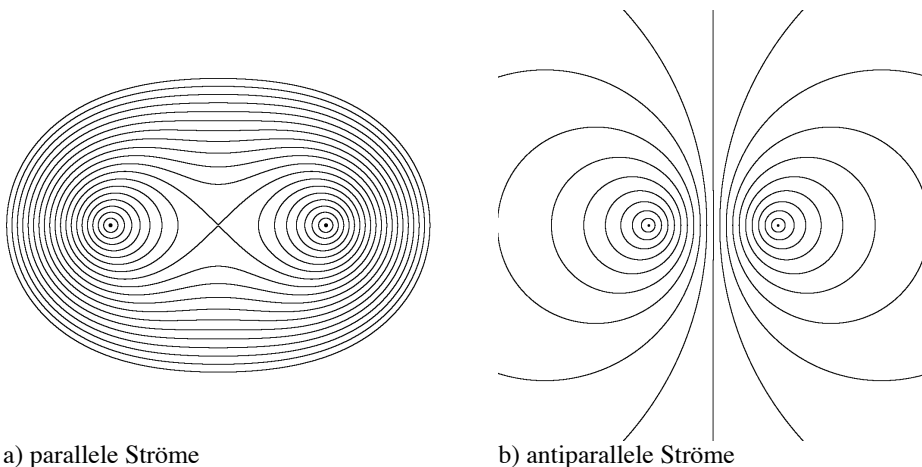
Magnetische Feldlinien paralleler Drähte

Martin Lieberherr

Mathematisch Naturwissenschaftliches Gymnasium Rämibühl, 8001 Zürich

Einleitung

Ab und zu revidiere ich meine Unterlagen und ersetze Diagramme, die ich aus irgendwelchen Quellen zusammenkopiert hatte, durch eigene. Natürlich packt mich dann der Ehrgeiz, diese Diagramme - falls möglich - exakt zu berechnen. Und wenn ich dann ein Programm habe, fange ich an zu spielen und finde oft etwas, das mich interessiert und das ich nachrechne. Das Resultat ist meistens ein ausgefüllter Nachmittag und ein Ergebnis, das in der Literatur schon längst bekannt ist. So auch im folgenden Beispiel: Ich wollte die Feldlinien in der Umgebung zweier paralleler Stromleiter darstellen (Abb. 1). Die Ströme sollten gleich stark sein und in derselben resp. entgegengesetzter Richtung fließen.



a) parallele Ströme

b) antiparallele Ströme

Abb. 1: Magnetische Feldlinien unendlich langer, paralleler, gerader, dünner Drähte mit gleicher Stromstärke. Die Drähte sind senkrecht zur Zeichenebene.

Abbildung 1a) zeigt sehr schön, dass die Feldlinien in der Nähe eines einzelnen Drahtes Kreise um diesen Draht sind. Von weitem gesehen wirken die Drähte mit gleich gerichteten Strömen wie ein einzelner Leiter und deshalb gehen die Feldlinien um beide Drähte herum. Dazwischen gibt es den Grenzfall, der mich an eine Lemniskate erinnerte. Da ich oft in mathematischen Formelsammlungen etwas suche, wusste ich auch, dass die Lemniskate ein Spezialfall eines cassinischen Ovals ist und dass diese Kurven so ähnlich aussehen wie die gezeichneten Feldlinien. Einen Nachmittag später hatte ich diese Vermutung bewiesen und nochmals fünf Minuten später lieferte mir Google die Bestätigung. Ich möchte aber trotzdem zeigen, wie der Beweis geht.

Oval von Cassini

Cassinische Ovale sind Kurven, welche folgender Gleichung gehorchen:

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = b^4 \text{ mit den freien Parametern } a \text{ und } b.$$

Cassini-Ovale entstehen z.B. als Schnitt einer Ebene mit einem geeignet orientierten Torus. Wird die Definitionsgleichung nach x abgeleitet, so folgt:

$$2(x^2 + y^2 + a^2) \cdot \left(2x + 2y \frac{dy}{dx}\right) - 4a^2 \cdot 2x = 0 \text{ respektive}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \left(\frac{2a^2x}{x^2 + y^2 + a^2} - x \right) \text{ Differenzialgleichung eines Cassini-Ovals}$$

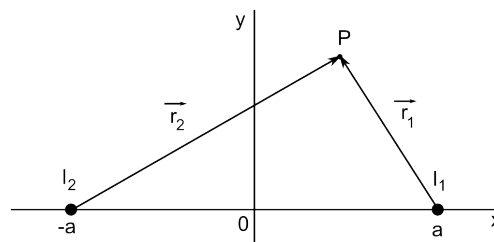
Im Spezialfall $a = b$ erhält man die Bernoulli-Lemniskate. Sie hat in Polarkoordinaten die Darstellung $r^2 = 2a^2 \cos(2\varphi)$.

Differenzialgleichung der Feldlinien paralleler Ströme

Damit wir die Differenzialgleichung der Feldlinien herleiten können, benötigen wir den magnetischen Feldstärkevektor. Die Bezeichnungen lese man in Abbildung 2 ab.

Abb. 2: Zwei unendlich lange, parallele gerade Leiter durchstossen die (x,y) -Ebene senkrecht in den Punkten $(a,0)$ und $(-a,0)$.

Die Stromstärken seien I_1 und I_2 , die Abstandsvektoren zum Aufpunkt $P(x,y)$ seien \vec{r}_1 und \vec{r}_2 .



Der Strom I_1 erzeugt im Aufpunkt $P(x,y)$ den Feldstärkevektor \vec{B}_1 . Der Betrag von \vec{B}_1 ist umgekehrt proportional zu r_1 , die Richtung ist ein Einheitsvektor senkrecht zu \vec{r}_1 , den man durch eine 90° -Drehung aus \vec{r}_1 erhalten kann.

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \frac{1}{(x-a)^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x-a \end{pmatrix}$$

Die resultierende Feldstärke ist die Vektorsumme der Feldstärken beider Ströme. Da in unserem Fall $I_1 = I_2 = I$ ist, folgt:

$$\vec{B}_{res} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \frac{1}{(x-a)^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x-a \end{pmatrix} + \frac{1}{(x+a)^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x+a \end{pmatrix} \right\}$$

Weil die Feldstärkevektoren per Definition Tangenten an die Feldlinien sind, gilt für die Steigung der Feldlinien:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B_{res,y}}{B_{res,x}} = \frac{\frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} + \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2}}{\frac{-y}{(x-a)^2 + y^2} + \frac{-y}{(x+a)^2 + y^2}} = \dots = \frac{1}{y} \left(\frac{2a^2x}{x^2 + a^2 + y^2} - x \right)$$

Offensichtlich stimmen die Differenzialgleichungen für die cassinischen Ovale und die Feldlinien paralleler Ströme überein.

Differenzialgleichung der Feldlinien antiparalleler Ströme

Wir brauchen im Vergleich zum vorangehenden Abschnitt nur ein Vorzeichen bei der Bildung der resultierenden Feldstärke umzudrehen und erhalten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B_{res,y}}{B_{res,x}} = \frac{\frac{x-a}{(x-a)^2+y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2+y^2}}{\frac{-y}{(x-a)^2+y^2} - \frac{-y}{(x+a)^2+y^2}} = \dots = \frac{y^2 - x^2 + a^2}{2xy} \Rightarrow$$

$$2xy \frac{dy}{dx} = y^2 - x^2 + a^2$$

Substitution: $z = y^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2y \frac{dy}{dx}$ (nach Kamke)

$$x \frac{dz}{dx} = z - x^2 + a^2$$

Die Lösung gewinnt man z.B. über einen Potenzreihenansatz: $z = -a^2 + bx - x^2$

Die Variable b ist ein freier Parameter. Damit erfüllen die Feldlinien die Gleichung

$$y^2 + x^2 - bx = -a^2 \text{ oder}$$

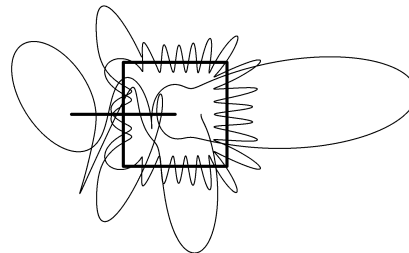
$$y^2 + \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a^2$$

Die Feldlinien antiparalleler Ströme sind also eine Schar von Kreisen. Die Kreise sind allerdings nicht konzentrisch, wie man in Abb. 1b) auch leicht sehen kann.

Ausblick

Magnetische Feldlinien müssen keine einfachen, geschlossenen Kurven sein. Es ist möglich, dass Feldlinien in chaotischer Weise ohne Ende um den Leiter kreisen¹. Ein Beispiel, angelehnt an eine aktuelle Publikation², ist in Abbildung 3 zu sehen.

Abb. 3: Teil einer Feldlinie um zwei senkrecht angeordnete, verkettete, quadratische Rahmenspulen.



¹ J. Aguirre and D. Peralta-Salas, "Realistic examples of chaotic magnetic fields created by wires," EPL, **80** (2007) 60007-1-6

² M. Hosoda, T. Miyaguchi, K. Imagawa, and K. Nakamura, "Ubiquity of chaotic magnetic-field lines generated by three-dimensionally crossed wires in modern electric circuits," Phys. Rev. E **80**, 067202-1-4 (2009).



Das Zeichnen der logarithmischen Spirale mit dem Zirkel

Peter Gallin, Universität Zürich

1 Einleitung

In der Natur finden sich als Folge von Wachstumsprozessen immer wieder logarithmische Spiralen. Abbildung 1 zeigt die aufgeschnittene Schale eines Nautilus, welche ich von Mike Rohr, Mathematiklehrer an der Kantonsschule Küsnacht (ZH), erhalten habe. Möchte man in die Bilder von realen Gegenständen eine möglichst gut passende logarithmische Spirale einzeichnen, stellen sich interessante mathematische Probleme. Zunächst untersuchen wir die Frage, wie man bei gegebenem Ausschnitt einer Spirale deren Zentrum findet. Dann stellen wir uns die Frage, wie die Beziehung zwischen der Kurve und den sie approximierenden Viertelkreisen ist.



Abbildung 1: Längsschnitt der Nautilus-Schale mit Kammern

2 Bestimmen des Zentrums der logarithmischen Spirale

So wie es für Schülerinnen und Schüler keine triviale Frage ist, wie man das Zentrum eines Kreises bestimmt, von dem nur die Kreislinie gegeben ist, so stellt sich die analoge Frage bei der logarithmischen Spirale als recht anspruchsvoll heraus. Wir wissen ja lediglich, dass in der Polardarstellung der Radius r exponentiell mit dem Argumentwinkel ϕ wächst:

$$r(\phi) = ae^{k\phi}$$

Die Zahl k nennt man die Steigung der Spirale, denn sie gibt den Tangens des Winkels an, welcher von der Kurventangente mit der Normalen zum Radius eingeschlossen wird. Der positive Parameter a ist ein beliebiger

Anfangswert für den Radius. Er kann ohne Beschränkung auf 1 gesetzt werden, da er wegen $ae^{k\phi} = e^{k(\phi + \ln(a)/k)}$ als Drehung der Spirale interpretiert werden kann. Die Spirale geht durch geeignete Drehstreckungen in sich selbst über. Wenn man speziell eine Drehstreckung mit dem Drehwinkel π ausführt, müssen die Tangenten in einem Kurvenpunkt und dessen Bildpunkt parallel zueinander sein. Findet man also parallele Tangenten der Spirale, müssen die Verbindungen der zugehörigen Berührungspunkte durch das gesuchte Zentrum gehen. Abbildung 2 zeigt eine erste Variante zur Konstruktion des Zentrums: Man bestimmt zwei Paare paralleler Tangenten. Das Zentrum ist der Schnittpunkt der beiden Verbindungsgeraden der entsprechenden Tangentenberührungspunkte.

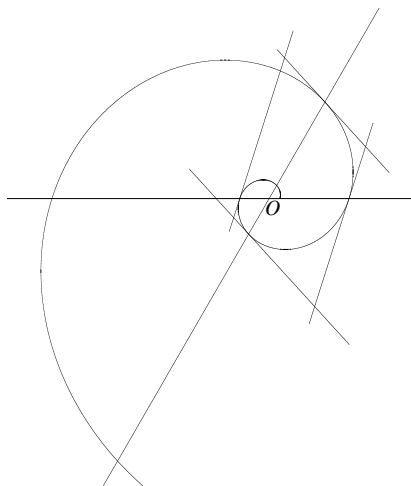


Abbildung 2: Zwei Paare paralleler Tangenten

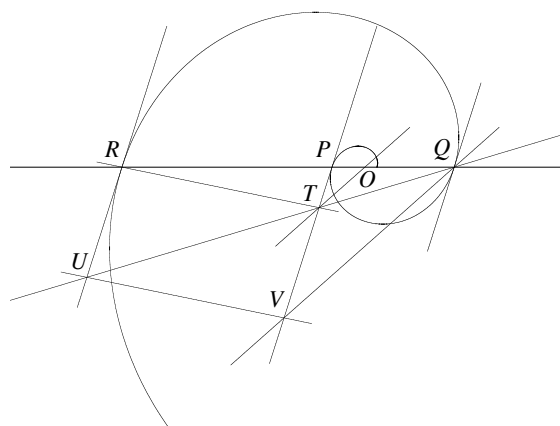


Abbildung 3: Drei parallele Tangenten

Abbildung 3 zeigt eine zweite Variante: Es wurden drei parallele Tangenten mit den aufeinanderfolgenden Berührungspunkten P , Q und R gelegt. Da die Strecke PQ das gestauchte Bild der Strecke QR ist, gibt deren Längenverhältnis den zum Drehwinkel π gehörigen Streckfaktor $\lambda < 1$ an. Mit einem beliebigen Hilfsstrahl QU übertragen wir dieses Verhältnis auf $\lambda = |TQ| : |QU| = |TP| : |RU|$. Da die Strecken RU und TV nach Konstruktion gleich lang sind, gilt $\lambda = |TP| : |TV|$. Durch eine Parallele zu VQ durch T erhalten wir den Punkt O auf der Verbindungsgeraden der Berührungspunkte, so dass $\lambda = |TP| : |TV| = |OP| : |OQ|$, wie es für das Zentrum O der Fall sein muss.

3 Hilfssatz: Zum geometrischen Mittel zweier Dreiecksseiten

Das geometrische Mittel zweier Dreiecksseiten tritt erstaunlicherweise als eine einfach zu konstruierende Länge auf der Winkelhalbierenden der beiden Seiten in Erscheinung. Wir beweisen hier diesen Satz und werden ihn anschliessend bei der Approximation der logarithmischen Spirale durch Kreisbogen verwenden können.

Auf dem Umkreis des Dreiecks ABC (Abbildung 4) seien W bzw. Z die Punkte, welche auf der inneren bzw. äusseren Winkelhalbierenden der Ecke C liegen. Der Kreis mit Mittelpunkt Z durch den Punkt A schneide die Winkelhalbierende in einem Punkt G . Behauptung: Die Länge $g = |CG|$ ist das geometrische Mittel \sqrt{ab} der Seiten a und b . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir hier $b > a$ an.

Beweis: Da in einem Dreieck die innere und äussere Winkelhalbierende einer Ecke und die Mittelsenkrechte der gegenüberliegenden Seite sich auf dem Umkreis schneiden, liegen W und Z auf der Mittelsenkrechten der Seite AB . Nun drehen wir die Seite CB um C so weit, dass die gedrehte Strecke in der Verlängerung der Seite AC liegt. So erhalten wir den Punkt D . BD liegt parallel zur inneren Winkelhalbierenden von C , und die Mittelsenkrechte der Strecke BD ist die äussere Winkelhalbierende. Damit ist Z Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABD und der Umkreisradius ist $|ZA| = |ZG|$. Füllen wir schliesslich das Lot von Z auf die Seite AD ,

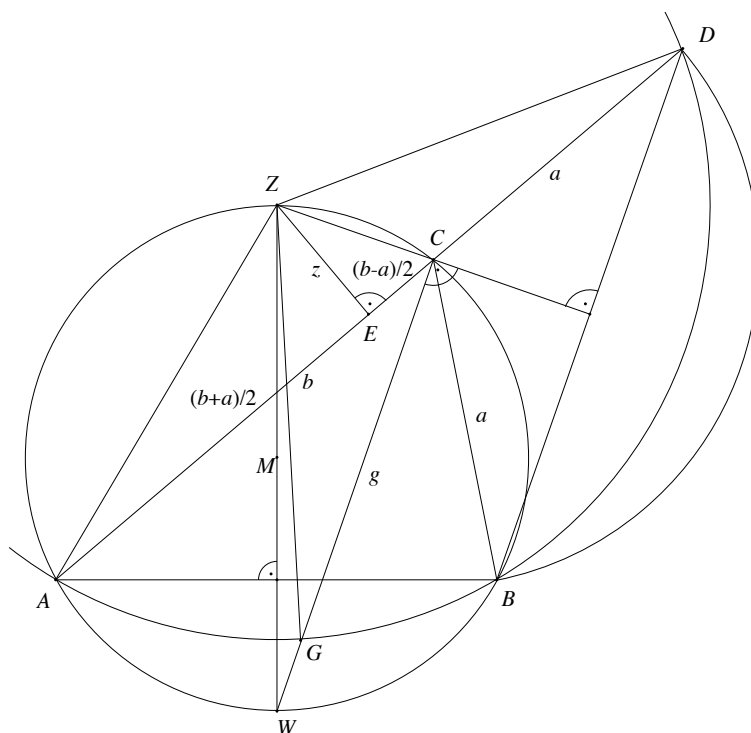


Abbildung 4: Zum geometrischen Mittel g der Seiten a und b

so erhalten wir den Mittelpunkt E der Seite AD . Es gilt also

$$|EA| = \frac{b+a}{2} \quad \text{und} \quad |EC| = \frac{b-a}{2} .$$

Wir setzen die Länge $|ZE| = z$ und berechnen die gesuchte Länge $g = |CG|$ mit Pythagoras:

$$\begin{aligned} g^2 = |CG|^2 &= |ZG|^2 - |ZC|^2 = |ZA|^2 - |ZC|^2 = \left(\left(\frac{b+a}{2} \right)^2 + z^2 \right) - \left(\left(\frac{b-a}{2} \right)^2 + z^2 \right) = \\ &= \left(\frac{b+a}{2} \right)^2 - \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 = ab , \end{aligned}$$

womit die Behauptung $g = \sqrt{ab}$ bewiesen ist.

4 Approximation der logarithmischen Spirale durch Kreisbogen

Traditionsgemäss will man die logarithmische Spirale durch Viertelkreise approximieren, weil diese dann in Quadraten einbeschrieben werden können. Wir kommen im nächsten Abschnitt darauf zurück. Es wären durchaus auch andere Kreissektoren wählbar, wie beispielsweise Halbkreise. Man könnte also in Abbildung 3 die Thaleskreise über den Strecke PQ und QR als Näherungen auffassen, was man aber als zu grob empfindet. Grundsätzlich wählt man also einen festen Zentriwinkel β der Kreissektoren und will mit ihnen die Spirale approximieren (Abbildung 5). Damit zwei aufeinander folgende Kreissektoren — in Abbildung 5 beim Punkt B — einen knickfreien Übergang haben, müssen die Radien der beiden zusammenfallenden Endpunkte aufeinander liegen, also muss Z_1 auf Z_2B liegen.

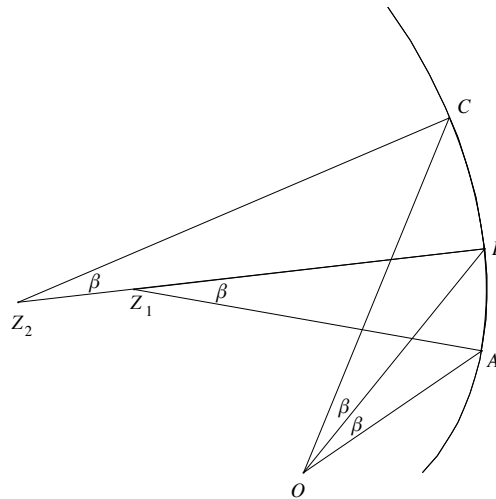


Abbildung 5: Approximation der Spirale durch Kreissektoren

Die Stützpunkte A, B, C, \dots auf der Spirale mit der Gleichung $r(\phi) = ae^{k\phi}$ wählt man so, dass ihre Argumentwinkel jeweils die Differenz β aufweisen. Damit wächst der Radius von Stützpunkt zu Stützpunkt mit dem gleichen Faktor und so sind die Dreiecke OAB, OBC, \dots ähnlich zueinander. Die Tangenten an die Spirale in den Stützpunkten bilden mit den zugehörigen Radiusstrecken immer den gleichen Winkel, nämlich $\frac{\pi}{2} + \arctan(k)$. Das bedeutet, dass sich die Tangenten von Stützpunkt zu Stützpunkt um den Winkel β weiterdrehen. Damit nun die Kreissektoren den Zentriwinkel β aufweisen, müssen deren Zentren – wegen dem Peripheriewinkelsatz – auf dem Umkreis des Dreiecks aus den zwei Stützpunkten und O liegen, also beispielsweise Z_1 auf dem Umkreis des Dreiecks OAB oder Z_2 auf dem Umkreis des Dreiecks OBC . Zudem liegen die Zentren ja auf den Mittelsenkrechten der beiden Stützpunkte.

Die Tangenten an die Kreisbogen in den Stützpunkten liegen senkrecht zu den Radien. Auch sie drehen sich demzufolge – wie die Tangenten an die Spirale selbst – von Stützpunkt zu Stützpunkt um den Winkel β weiter. Falls nun bei irgendeinem Stützpunkt die Tangente an die Spirale und die Tangente an die Kreisbogen einen von Null verschiedenen Winkel miteinander einschließen, tun sie dies bei allen Stützpunkten in gleicher Weise. Dass dies tatsächlich der Fall ist, untersuchen wir in Abschnitt 5 genauer. In jedem Stützpunkt überquert die Spirale die Approximationskurve der Kreisbogen in (wörtlich) ähnlicher Weise und zwar für wachsenden Radius von innen nach aussen. Aus Stetigkeitsgründen muss die Spirale also zwischen den Stützpunkten immer wieder einen gemeinsamen Punkt mit der Approximationskurve besitzen, wo sie von aussen wieder nach innen zurückkehrt.

Dank des vorangehenden Satzes können wir nun diesen weiteren gemeinsamen Punkt genauer angeben: Betrachten wir das Dreieck OAB und seine Winkelhalbierende in O . Diese wird vom Kreisbogen durch A und B mit Zentrum Z_1 so in einem Punkt G geschnitten, dass die Länge $|OG|$ das geometrische Mittel von $|OA|$ und $|OB|$ ist. Nun ist aber wegen der Gleichung $r(\phi) = ae^{k\phi}$ der Spirale jeder Radius das geometrische Mittel zweier Nachbarradien, sofern diese symmetrisch zu ihm liegen:

$$\sqrt{r(\phi - \beta/2) \cdot r(\phi + \beta/2)} = \sqrt{ae^{k(\phi - \beta/2)} \cdot ae^{k(\phi + \beta/2)}} = \sqrt{a^2 e^{2k\phi}} = ae^{k\phi} = r(\phi)$$

Auf der Winkelhalbierenden in O jedes Stützdreiecks OAB, OBC, \dots liegen also weitere Punkte, welche die Spirale und die Approximationskurve gemeinsam haben. Das sind die Punkte, wo die Spirale jeweils von ausserhalb der Approximationskurve wieder nach innen verläuft. So können diese Punkte nicht als neue Stützpunkte für Approximationskreisbogen fungieren.

Anmerkung: Stellt man sich vor, in Abbildung 5 lasse man β immer kleiner werden, so fallen die Kreissekto-

ren schliesslich zu Kurvennormalen den Spirale zusammen. Deren Hüllkurve ist definitionsgemäss der Ort der Krümmungsmittelpunkte der Spirale — ihre Evolute — und ist eine zur ursprünglichen Spirale kongruente, bloss gedrehte Spirale.

5 Approximation der logarithmischen Spirale durch Viertelkreise

Wir zeichnen hier konkret für $k = \frac{2}{\pi} \approx 0.637$ die Spirale mit der Gleichung $r(\phi) = e^{2\phi/\pi}$ (Abbildung 6). Die Stützpunkte A, B, \dots wählen wir auf den Koordinatenachsen, so dass also $\beta = \pi/2$. Der Ortsbogen zur Konstruktion des Zentrums Z des approximierenden Viertelkreises wird dann zum Thaleskreis über AB . W ist wiederum der Punkt, wo sich die Winkelhalbierende in O des Dreieck OAB mit dessen Umkreis, dem Thaleskreis, schneiden. Das Viereck $AWBZ$ ist ein Quadrat, in dem der Viertelkreissektor mit Zentrum Z eingeschrieben ist. Stellt man sich die Quadrate mit Diagonalen AC, CD, \dots vor, so ergäbe sich eine „Spirale“ aus lauter kleiner werdenden, aneinander hängenden Quadraten. Weil der Radius der Spirale pro Winkelzunahme um $\frac{\pi}{2}$ mit dem Faktor e gestreckt wird, ist der Streckfaktor von Quadrat zu Quadrat ebenfalls e .

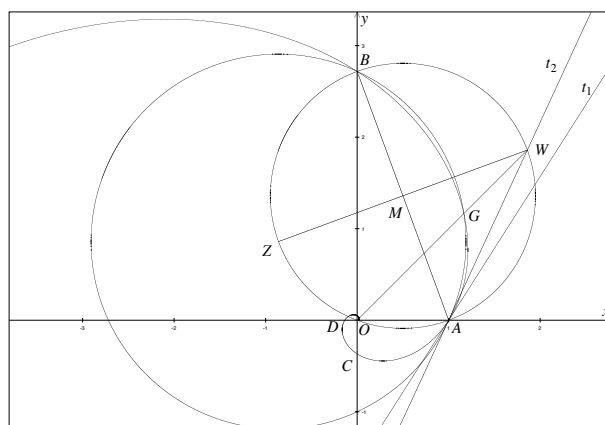


Abbildung 6: Spirale und approximierender Viertelkreis

In dieser Abbildung ist nun gut erkennbar, wie die Spirale für wachsenden Radius (und hier wegen $k > 0$ auch wachsendes ϕ) vom Punkt A an ausserhalb des approximierenden Kreisbogens verläuft und dann beim Punkt G auf der Winkelhalbierenden OW den Kreisbogen überquert, um dann bis B innerhalb des Bogens zu liegen. Ferner sehen wir, wie die Spirale und der Kreisbogen im Stützpunkt A verschiedene Tangenten t_1 und t_2 haben. Dies ist in allen Stützpunkten gleich. Berechnen wir nun für die allgemeine Spirale $r(\phi) = e^{k\phi}$ den Winkel, den die Kreistangente t_2 mit der Normalen zu OA in A einschliesst. Sie steht senkrecht zum Radius ZA . Also müssen wir nur den spitzen Winkel $\angle OAZ$ von ZA zur x -Achse berechnen. Aus den Punkten $B(0; e^{k\pi/2})$ und $A(1; 0)$ ergibt sich $\angle OAB = \arctan(e^{k\pi/2})$. Davon ist $\angle ZAB = \frac{\pi}{4}$ zu subtrahieren: $\angle OAZ = \arctan(e^{k\pi/2}) - \frac{\pi}{4}$. Andererseits schliesst die Spiraltangente t_1 mit der Normalen zu OA in A den Winkel $\arctan(k)$ ein. Man kann beweisen, dass für alle $k > 0$ die Ungleichung $\arctan(k) > \arctan(e^{k\pi/2}) - \frac{\pi}{4}$ besteht (Abbildung 7) und damit immer ein Unterschied der beiden Tangenten auftritt. Für unseren Fall $k = \frac{2}{\pi}$ ergibt sich ein Winkelunterschied von ungefähr 7.68° .

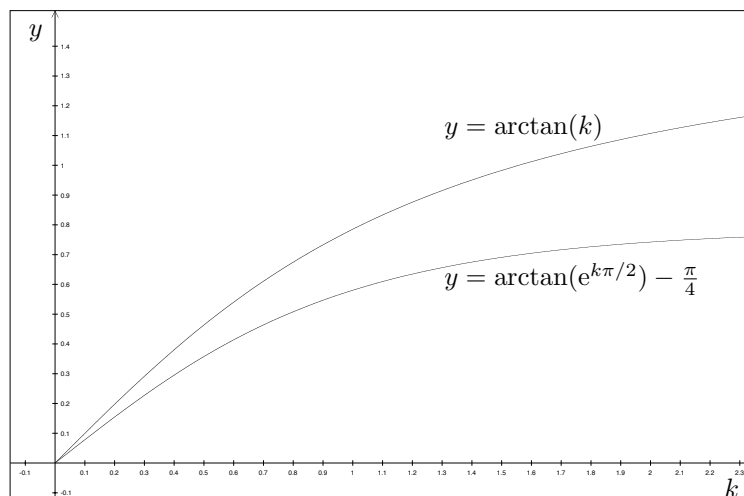


Abbildung 7: Winkelunterschiede der beiden Tangenten

6 Die goldene Spirale

Ein wichtiger Spezialfall entsteht, wenn der Streckfaktor pro Winkelzunahme um $\frac{\pi}{2}$ der goldenen Zahl $\tau = (\sqrt{5}+1)/2 \approx 1.618$ entspricht. Damit ist $k = \frac{2\ln(\tau)}{\pi} \approx 0.306$. Die Folge der sich verkleinernden oder vergrößernden Quadrate übernimmt dann den Faktor τ von Quadrat zu Quadrat. Wie Abbildung 8 zeigt, bilden dann je vier aufeinanderfolgende Quadrate ein goldenes Rechteck: Am kleinsten Quadrat $ABCD$ hängt das mit τ vergrößerte Quadrat $GCEF$, an diesem das nochmals vergrößerte Quadrat $KFHI$ und an diesem das Quadrat $ILMB$. Alle liegen im goldenen Rechteck $LMEH$. Jedes Quadrat wird durch ein goldenes Rechteck zu einem neuen goldenen Rechteck ergänzt.

Das Zentrum O der Drehstreckung zum Drehwinkel $\frac{\pi}{2}$ findet man in diesem Spezialfall durch geeignete Diagonalen der goldenen Rechtecke, welche alle entweder auf LE oder auf BH liegen. Diese stehen senkrecht zueinander, da ja die Drehstreckung von einem Rechteck zum nächsten den Drehwinkel $\frac{\pi}{2}$ hat. Zeichnet man zusätzlich die Winkelhalbierenden dieser beiden Diagonalrichtungen ein, so gehen sie durch bereits bestehende Eckpunkte von Quadraten. Beispielsweise geht die Winkelhalbierende von $\angle LOH$ durch den Punkt I , denn sie muss ja die Gegenseite LH im Dreieck LOH im Verhältnis der anliegenden Seiten OL und OH , mithin im Verhältnis τ schneiden. Der Punkt I erfüllt aber genau diese Forderung. Damit erhalten wir ein zweites Paar zueinander senkrechter Richtungen IC und MF , welche die Rolle der Koordinatenachsen von Abbildung 6 übernehmen. Zeichnet man schliesslich die Viertelkreise in den Quadraten ein, so schneiden sie die Winkelhalbierenden der neuen Achsen in den Punkten S, T, U, V, \dots , welche neben den Stützpunkten A, C, F, I, M, \dots zugleich auch Punkte der exakten goldenen Spirale sein müssen. Sie ist in Abbildung 8 nicht eingezeichnet, weil sie sich nur sehr wenig von den approximierenden Viertelkreisen unterscheidet. Die Tangenten an die goldene Spirale weichen allerdings in den Stützpunkten leicht von den Rechtecksseiten ab. Diese Bemerkung stammt aus dem Buch „Unvergängliche Geometrie“ von H. S. M. Coxeter (Birkhäuser Verlag, 1963, Seite 205) und war Anlass für die vorliegende Untersuchung. Konkret ergibt sich für dieses $k = \frac{2\ln(\tau)}{\pi}$ gemäss Abbildung 7 ein Winkelunterschied von etwa 3.75° .

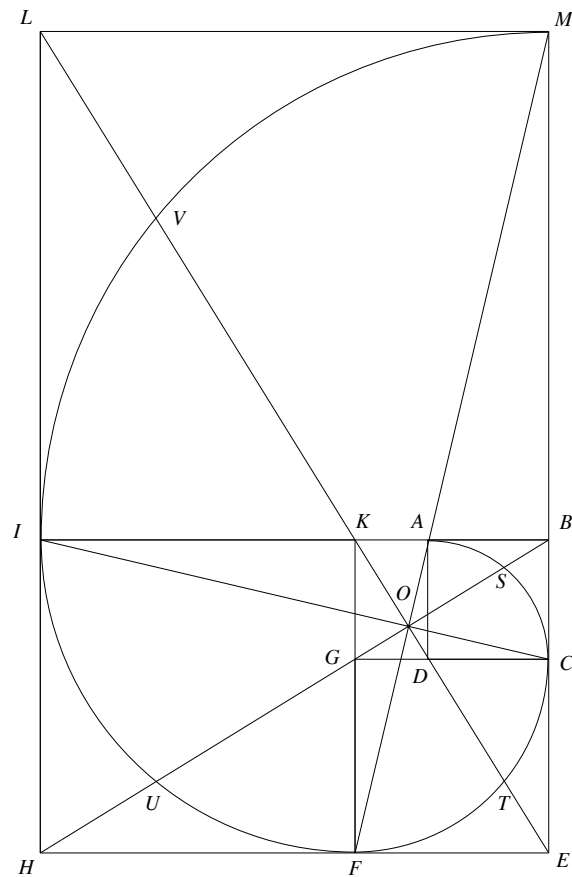


Abbildung 8: Die Folge von goldenen Rechtecken und die approximierte goldene Spirale

7 Die Fibonacci-Spirale als Annäherung an die goldene Spirale

Als letzten Spezialfall einer Spirale sei hier die Fibonacci-Spirale erwähnt (Abbildung 9).

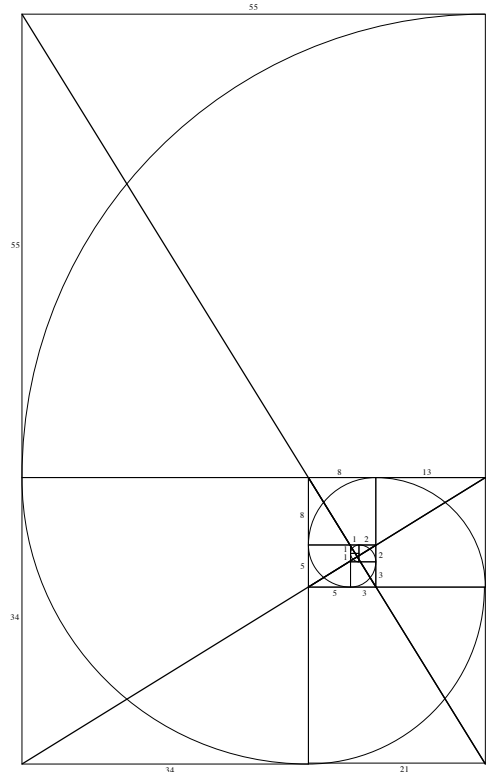


Abbildung 9: Fibonacci-Spirale

Wir starten mit zwei (kleinen) aneinander anliegenden Einheitsquadraten. Dieses Rechteck mit Seitenverhältnis 2 zu 1 wird durch ein Quadrat mit Seitenlänge 2 zu einem Rechteck mit Seitenverhältnis 3 zu 2 ergänzt, dieses mit einem Quadrat mit Seitenlänge 3 zu einem Rechteck mit Seitenverhältnis 5 zu 3, usw. Die Folge der Rechtecke haben also die Fibonacci-Zahlen 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... als Seitenlängen. Sie besteht zwar nicht aus ähnlichen Rechtecken, jedoch sind sie sehr bald kaum von goldenen Rechtecken unterscheidbar, da der Grenzwert der Quotienten aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen sich τ nähert. Dank der Strichdicke unterscheiden sich in Abbildung 9 die Diagonalen im Rechteck mit den Seiten 5 und 8 schon nicht mehr von der Diagonalen im Rechteck mit den Seiten 13 und 21. Damit bilden die eingezeichneten Viertelkreise — ausser im Zentrum — eine gute Annäherung an die goldene Spirale von Abbildung 8.

8 Nautilus und die logarithmische Spirale

Verschiedene zeichnerische Möglichkeiten zur Darstellung logarithmischer Spiralen sind jetzt ausgeleuchtet. Die goldene Spirale begegnet uns in der Natur leider selten. In Abbildung 1 beispielsweise liegt eine Spirale mit $k \approx -\ln(1.7)/\pi$ vor, da pro halbe Umdrehung eine Streckung mit dem Faktor von etwa 1.7 gemessen wird. Mit den heutigen Darstellungsmöglichkeiten kann die Kurve auf eine Folie gedruckt und mit der Kontur des Nautilus mehr oder weniger gut zur Deckung gebracht werden (Abbildung 10). Nur im Zentrum ist die Abweichung gross, was uns an die Fibonacci-Spirale erinnert.

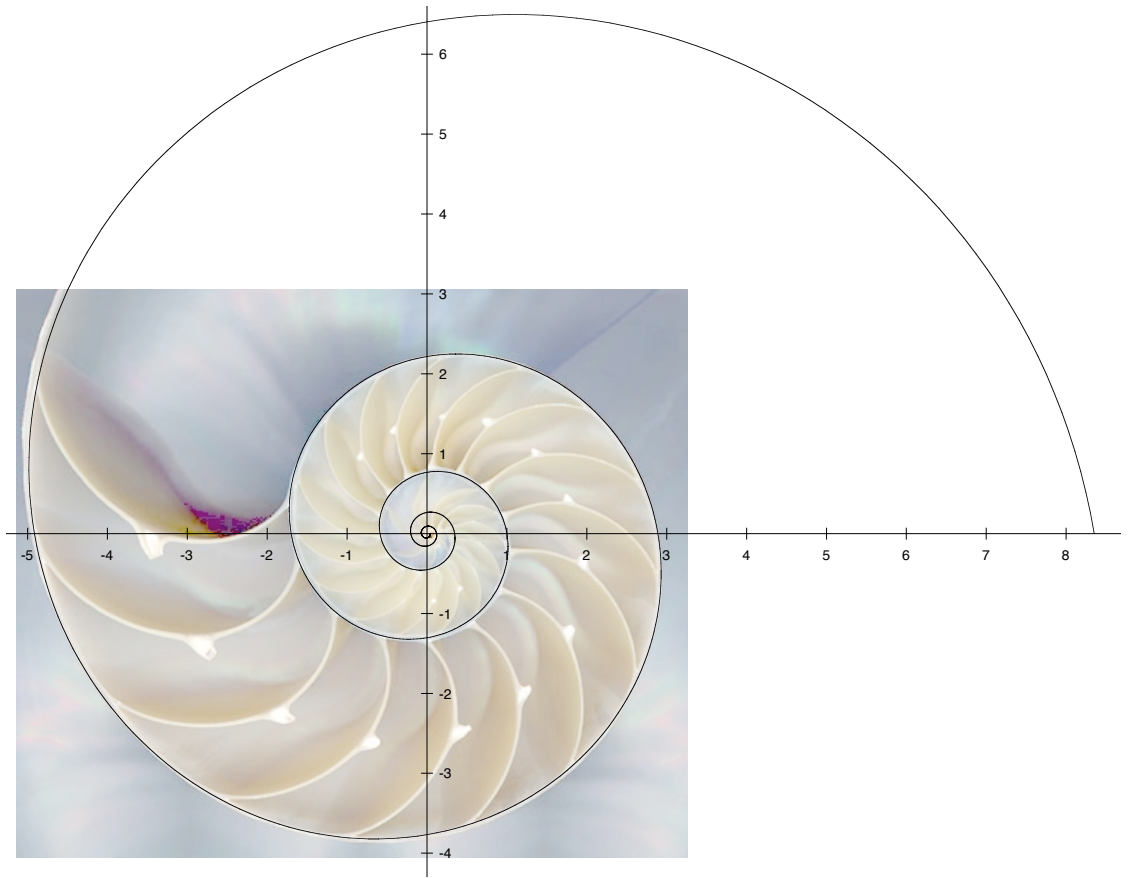


Abbildung 10: Nautilus-Schale mit überlagerter Spirale

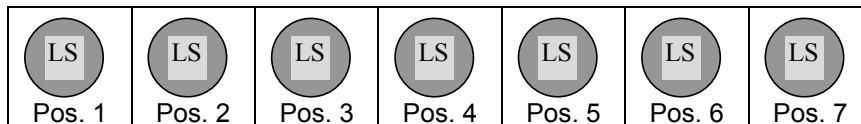
Lucky Seven

- die Mathematik hinter dem Spiel

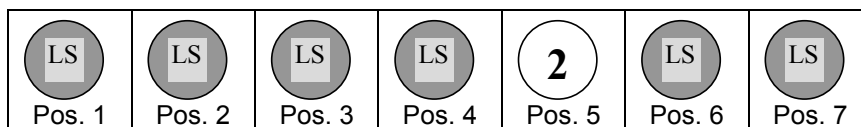
Armin P. Barth

Kürzlich schenkte mir Joyce, eine gute Freundin aus England, ein Exemplar des Spiels *Lucky Seven*. Sie wollte sofort spielen und mich schlagen, und ganz unerwartet gab mir ihre Gewinnsucht Gelegenheit, ihr gegenüber die Vorzüge der Mathematik zu erläutern – und immer wieder den Satz „*It's your choice, Joyce*“ zu sagen.

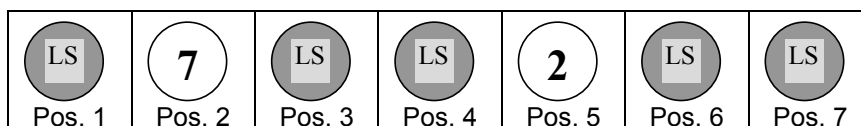
A fast, addictive game you won't want to put down, versprach die Hülle des Spiels. Und so wird es gespielt: Man spielt mit sieben Karten, die auf der Vorderseite mit den Zahlen 1 – 7 bedruckt und auf der Rückseite einheitlich mit der Aufschrift LS (Lucky Seven) versehen sind. Die Regeln verlangten, dass Joyce die Karten mischte, um sie dann verdeckt in einer Reihe vor sich auszulegen. Gleichzeitig musste vereinbart werden, welche dieser Karten an Position 1 (üblicherweise linker Anfang der Reihe) und welche an Position 7 (rechtes Ende der Reihe) liegt.



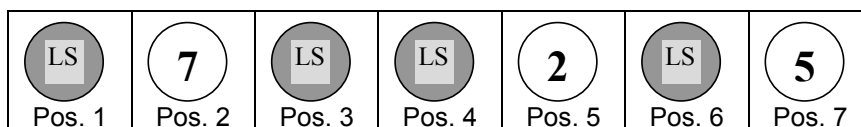
Nun wählte Joyce eine beliebige Karte aus und drehte sie um:



Die „2“ bedeutete, dass sie als nächstes die Karte an Position 2 umzudrehen hatte:



Die „7“ verwies auf Position 7. Folglich musste nun die dort platzierte Karte umgedreht werden:



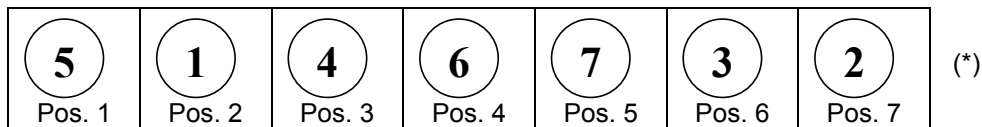
Die neue Karte verwies auf Platz 5. Da die dort platzierte Karte aber schon umgedreht worden war, war Joyce's Durchgang zu Ende, was sie überaus ärgerte, denn ein Siegespunkt wäre für sie nur notiert worden, wenn es ihr gelungen wäre, *alle* Karten umzudrehen. *Now it was my turn.*

Es stellte sich heraus, dass im Laufe der nächsten zehn Durchgänge weder Joyce noch ich einen Siegespunkt verbuchen konnte. *Joyce was not amused!* Aber schon bald wich die Enttäuschung neu-

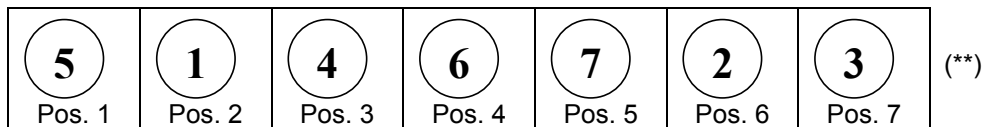
gerigen Fragen, und wenn es überhaupt einen Weg hin zu Antworten gab, so führte dieser durch Ländereien der Mathematik.

Kann man dieses Spiel überhaupt gewinnen?

Zu denken, ein Spiel, das zehnmal hintereinander nie gewonnen wurde, könne prinzipiell nicht gewonnen werden, wäre ja eine durchaus geschickte Verarbeitung von Enttäuschung. Aber es ist natürlich falsch. Joyce äusserte schon bald folgende Idee: Sie hatte beobachtet, dass manchmal das Spiel bereits mit der ersten Karte zu Ende war, als nämlich deren Zahl ihrer eigenen Position entsprach. Folglich, meinte sie, müsse eine Kartenreihe dann zum Sieg führen, wenn an keiner einzigen Position die Karte liegt, deren Zahl mit der eigenen Position übereinstimmt. Ich bildete die folgende Reihe, in der diese Eigenschaft zweifellos erfüllt war, und sagte: „It’s your choice, Joyce.“



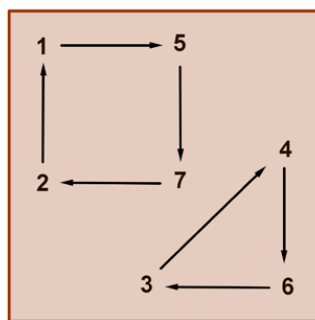
Wo auch immer sie anfang, nach drei oder vier Schritten war das Spiel zu Ende. Manch einer wäre durch eine solche Falsifizierung einer Idee entmutigt worden. Nicht so Joyce; sie schob Karten hin und her und wartete bald mit dieser neuen Reihe auf:



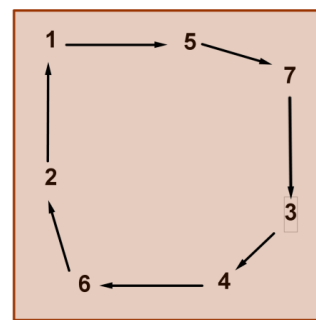
Egal, wo man einsteigt, das ist einer Siegerreihe. Okay, es geht also doch. Man kann gewinnen, aber ein Sieg scheint extrem selten zu sein. Oder doch nicht?

Permutationen und Zykel

Ich erklärte Joyce, was Permutationen sind. Die oben abgebildeten Kartenreihen (*) und (**) sind ja nichts anderes als Permutationen der Zahlen 1 – 7. Ich zeichnete beide auf:



(*)



(**)

Mathematiker würden für (**) den Ausdruck (1 5 7 3 4 6 2) verwenden und ihn so verstehen, dass 1 auf 5 und 5 auf 7 und 7 auf 3 und 3 auf 4 und 4 auf 6 und 6 auf 2 und 2 auf 1 abgebildet wird. Diese Permutation besteht also aus einem einzigen Zykel. Für die Kartenreihe (*) würden sie den Ausdruck (1 5 7 2)(3 4 6) notieren. Er macht deutlich, dass die Permutation aus zwei Zykeln besteht, und dass es keine Möglichkeit gibt, den Zykel, in den man hineingeraten ist, zu verlassen. Joyce dämmerte es: Bei Lucky Seven stellt jede Kartenreihe eine Permutation der Zahlen 1 – 7 dar. Soll eine Kartenreihe zum Erfolg führen, so darf sie nicht aus ≥ 2 Zykeln bestehen.

Lucky One, Lucky Two, Lucky Three

Joyce drängte darauf herauszufinden, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass man bei einem Durchgang einen Siegespunkt holt. Ich schlug vor, wir könnten ein paar Spezialfälle betrachten. Mathematische Probleme können ja oft dadurch gelöst werden, dass sie zuerst künstlich verkleinert oder dass Spezialfälle untersucht werden.

	$n =$	Anzahl Perm.	davon günstig	Gewinnchance
Lucky One	1	$1! = 1$	1	1/1
Lucky Two	2	$2! = 2$	1	1/2
Lucky Three	3	$3! = 6$	2	1/3

Lucky One ist nicht der Rede wert. Die einzige Karte mit dem Aufdruck „1“ liegt an Position 1; indem man sie „auswählt“ und umdreht, gewinnt man. Bei Lucky Two gibt es nur zwei mögliche Startkonstellationen:

$$(1\ 2) \text{ und } (1)(2).$$

Die Notation $(1\ 2)$ zeigt uns, dass 1 auf 2 und 2 auf 1 abgebildet wird, genauer, dass die Karte an Position 1 auf Position 2 verweist (also den Aufdruck „2“ hat) und die Karte an Position 2 auf Position 1 zeigt (also den Aufdruck „1“ hat). Eine solche Permutation nennt man auch *Zykel der Länge 2*. Die Notation $(1)(2)$ enthält zwei Zykel der Länge 1. 1 wird auf sich selber, und 2 wird auf sich selber abgebildet. Während die Reihe links eine Gewinnkonstellation ist, führt die andere zum Verlust. Die Wahrscheinlichkeit, Lucky Two zu gewinnen, ist also 1/2.

Bei Lucky Three gibt es sechs mögliche Startkonstellationen:

$$(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1)(2\ 3), (2)(1\ 3), (3)(1\ 2), (1)(2)(3).$$

Die zweite von rechts etwa hat einen Zykel der Länge 1, weil an Position 3 die Karte mit Aufdruck „3“ liegt, und einen Zykel der Länge 2, weil die Karte an Position 1 auf Position 2 verweist und umgekehrt. Egal, wo man anfängt, das Spiel ist nach einem oder zwei Schritten zu Ende. Gewinnen kann man nicht. In der Tat sind von den sechs möglichen Konstellationen nur die beiden ersten günstig, die je aus genau einem Zykel bestehen, so dass also eine Gewinnwahrscheinlichkeit von 1/3 besteht. Ein Muster zeichnet sich ab: 1/1, 1/2, 1/3. Wie gross wird wohl die Gewinnwahrscheinlichkeit bei sieben Karten sein?

Joyce durchschaut Lucky Seven

Joyce wurde mutiger und hielt mir nun einen Vortrag: Im Extremfall handelt man sich beim Auslegen der sieben Karten sieben Zykel ein:

$$(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7).$$

Es gibt offenbar nur eine Möglichkeit, dies zu erreichen, indem man an Position i die Karte mit der Aufschrift „ i “ platziert ($i = 1, 2, \dots, 7$). (Zugegeben: Die i -Notation stammt von mir.) Für genau sechs Zykel gibt es schon viel mehr Möglichkeiten, und es ist nicht sofort klar, wie viele das sind:

$$(1)(2)(3)(4)(5)(6\ 7), (1)(2)(3)(4)(5\ 6)(7), (1)(2)(3\ 7)(4)(5)(6), \text{ usw.}$$

Aber sie sind alle nicht günstig im Hinblick auf einen Sieg. Auch die entsprechenden Anzahlen von Permutationen mit 5, 4, 3 oder 2 Zykeln sind nicht offensichtlich. Und auch sie sind uns alle nicht willkommen. Und ohnehin wären wir an ihnen im Moment nur dann interessiert, wenn sie es gestatten würden auszurechnen, wie viele Permutationen aus genau einem Zykel bestehen, denn das sind ja die Siegerkonstellationen. Wie viele Permutationen der Zahlen 1 – 7 bestehen also aus genau einem Zykel der Länge 7? Das war die Frage aller Fragen.

Stirling-Zahlen

Ich machte Joyce auf ihren 1770 verstorbenen Landsmann James Stirling aufmerksam, der sich der Berechnung solcher Anzahlen gewidmet hat. Bezeichnet man mit $s_{n,k}$ oder $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ die Anzahl Permutationen der Zahlen aus $\{1, 2, \dots, n\}$, die aus genau k Zykeln aufgebaut sind, so kann man unsere vielen Fragen und spärlichen Antworten wie folgt notieren:

- $s_{7,7} = 1$ oder allgemein: $s_{n,n} = 1$.
- $s_{7,0} = 0$ oder allgemein: $s_{n,0} = 0$.
- $s_{7,1}$ ist die für uns brennend interessante Anzahl günstiger Kartenkonstellationen.
- $P = s_{7,1} / 7!$ ist die Wahrscheinlichkeit, eine Siegeskonstellation zu legen.
- $s_{7,6}, s_{7,5}, s_{7,4}, s_{7,3}, s_{7,2}$ kennen wir alle (auch noch) nicht.
- Die sogenannte *Karamata-Notation* $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ erlaubt, durch die Rekursionsformel

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$ eine verblüffende Analogie zu den Binomialkoeffizienten herzustellen, aber dies wäre für Joyce natürlich Kauderwelsch gewesen.

Die Zahlen $s_{n,k}$ heissen *Stirling-Zahlen erster Art*.

Die von Joyce so dringend gesuchte Zahl $s_{7,1}$ ist leicht zu finden. Wir müssen bloss konstruktiv denken und uns fragen, auf wie viele Arten wir den einen Zykel der Länge 7 mit Zahlen füllen können. Zunächst einmal ist es egal, mit welcher Zahl wir die erste Stelle des Zyklus besetzen, da zum Beispiel

$$(1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7) = (2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 1) = (3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 1 \ 2) = \dots$$

alle dieselbe Permutation bedeuten, einfach zyklisch vertauscht.

Ist die erste Zahl einmal gewählt, haben wir sechs Möglichkeiten zur Besetzung der zweiten Stelle, dann fünf für die dritte und so weiter. Insgesamt gibt es also $6!$ günstige Permutationen. Und daher ist die Gewinnwahrscheinlichkeit gleich $P = 6! / 7! = 1 / 7$. Der Schritt zu Lucky n ist nun ein winziger. Von $n!$ möglichen Kartenreihen sind $(n-1)!$ günstig. Es ist also $s_{n,1} = (n-1)!$, und die Wahrscheinlichkeit, bei einem Spieldurchgang einen Punkt zu holen, ist

$$P = (n-1)! / n! = 1 / n.$$

Joyce wurde klar, dass das Spiel nicht besonders spannend ist; es ist ja keinerlei strategisches Manipulieren möglich. Ist die Kartenreihe einmal ausgelegt, ist es egal, wo man einsteigt. Man steigt einfach in einen Zykel ein und wird ein bisschen herumgewirbelt, und in durchschnittlich einem von sieben Versuchen hat man das Glück, in einem Zykel der Länge 7 zu stecken. Der grosse Gewinn des Spielens war also nicht die Faszination der spielerischen Möglichkeiten, sondern die Faszination der mathematischen Analyse.

Dem brasilianischen Mathematiker Paulo Ribenboim verdanken wir den Ausdruck „Les nombres, des amis qui nous donnent des problèmes.“ In meinem Fall war Joyce diese „amie“, die mir ein Problem geschenkt hat.

Bericht zur Maturarbeit

Ein probabilistischer Primzahltest

Balz Bürgisser, Realgymnasium Rämibühl Zürich

Problemstellung

Primzahlen faszinieren die Menschen seit über 2000 Jahren: Primzahlen treten unregelmässig auf, und sie lassen sich durch keine Formel genau erfassen. Bis heute ist es den Mathematikern nicht gelungen, eine Methode zu entdecken, mit der man bei einer grossen (ungeraden) natürlichen Zahl innert nützlicher Frist feststellen kann, ob sie eine Primzahl ist. In der Not entwickelten die Mathematiker probabilistische Primzahltest: Diese erlauben in kurzer Zeit die Feststellung, dass die vorgegebene natürliche Zahl keine Primzahl ist oder mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit eine Primzahl ist; wobei die Wahrscheinlichkeit umso höher wird (und sich 1 nähert), je mehr man den Primzahltest – mit wechselnden Werten für den Parameter – durchläuft.

Der Test von Solovay-Strassen ist ein solcher probabilistischer Primzahltest. Er basiert auf

dem Euler-Kriterium: für eine beliebige ungerade Primzahl p gilt $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod{p}$ für alle

natürlichen Zahlen a mit $1 \leq a < p$, wobei $\left(\frac{a}{p}\right)$ das Legendre-Symbol (bzw. das Jacobi-Symbol)

bezeichnet. Wenn p eine zusammengesetzte Zahl ist, erfüllen höchstens $\frac{p-1}{2}$ der Zahlen a

mit $1 \leq a < p$ die obige Kongruenz. Diese Tatsache ergibt einen effizienten Primzahltest.

Der Schüler A interessierte sich für Primzahlen und wollte mit seiner Maturarbeit genauer erkunden, ob er für ein Mathematik-Studium geeignet sei. Ich schlug ihm die Beschäftigung mit dem probabilistischen Primzahltest von Solovay-Strassen vor, was er motiviert in Angriff nahm.

Ergebnisse und Erfahrungen

Der Schüler hat sich zuerst in die Gruppen-, Ring- und Körpertheorie eingearbeitet und sich mit den Restklassenringen $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ beschäftigt. In dieser Phase waren Leitplanken und Ermutigungen notwendig. Das genaue Beweisen eines Sachverhalts wurde an einfachen Sätzen aus der Gruppentheorie eingeübt, beispielsweise am Theorem, dass die Ordnung einer Untergruppe stets die Ordnung der Gruppe teilt.

Dann beschäftigte sich der Schüler mit der Euler Funktion φ . Diese ist ja für eine beliebige natürliche Zahl m definiert als $\varphi(m) = \text{Anzahl zu } m \text{ teilerfremde natürliche Zahlen } < m$. Dann „entdeckte“ er den Satz von Euler-Fermat: Für eine beliebige natürliche Zahl m gilt

$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ für alle zu m teilerfremden a . Ein wichtiges Erlebnis für den Schüler war, als

er erkannte, dass der Beweis dieses Satzes elegant und einfach wurde, wenn man die Gruppentheorie auf die multiplikative Gruppe der teilerfremden Restklassen $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ anwendet.

Dann war der Maturand nicht mehr zu halten: Er beschäftigte sich mit dem Legendre- und dem Jacobi-Symbol und bewies das Euler-Kriterium mit eigenen Überlegungen detailliert.

Von da war es nur noch ein kleiner Schritt zur Formulierung des Theorems von Solovay-Strassen; dessen genauer Beweis war allerdings ein harter Brocken, da der chinesische Restsatz mehrmals geschickt angewendet werden muss. Der Maturand hat eigene Ideen und Wege in den Beweis eingebracht und sich so intensiv mit ihm auseinandergesetzt, dass er sogar eine Verschärfung des Theorems entdeckte. Aus dem Theorem leitete er den Primzahltest von So-

lovay-Strassen ab: Er beschrieb den Algorithmus in einem Flussdiagramm und berechnete die Anzahl Iterationen, um mit 99-prozentiger Sicherheit eine ungerade natürliche Zahl als Primzahl zu identifizieren. Beispielsweise berechnete der Schüler selbständig, dass eine hundertstellige ungerade Zahl mittels dem Test von Solovay-Strassen in 15 Durchläufen mit mindestens 99-prozentiger Sicherheit als Primzahl (und mit 100-prozentiger Sicherheit als zusammengesetzte Zahl) erkannt werden kann.

Bemerkungen

Der Schüler A belegte das neusprachliche Maturitätsprofil. Er war seit einigen Jahren durch sein Interesse und seine Begabung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich aufgefallen. Er kam zu mir, da er die Maturarbeit in Mathematik schreiben wollte – und zwar wollte er sich mit Primzahlen beschäftigen und zugleich sein Studium an der ETH genau bestimmen und vorbereiten. Probabilistische Primzahltests haben ihn sofort fasziniert und intrinsisch so stark motiviert, dass er sich selbständig in höhere Algebra und Zahlentheorie einarbeitete. Das schrittweise logische Schliessen beim Beweisen und auch das präzise Formulieren eines mathematischen Sachverhaltes haben wir zusammen in mehreren Besprechungen geübt.

Literatur:

Neben zahlreichen Quellen im Internet benützte A. folgende Bücher:

- Amann, Herbert und Escher, Joachim. Analysis 1, dritte Auflage, Birkhäuser Verlag: Basel-Boston-Berlin 2007. ISBN 3-7643-7755-0
- Lugowski, Herbert und Weinert, Hann Joachim. Grundzüge der Algebra, vierte Auflage, Verlag B.G. Teubner: Leipzig 1957
- Remmert, Reinhold und Ullrich, Peter. Elementare Zahlentheorie, dritte Auflage, Birkhäuser-Verlag: Basel-Boston-Berlin 2008. ISBN 978-3-7643-7730-4
- Scheid, Harald und Frommer, Andreas. Zahlentheorie, vierte Auflage, Spektrum Akademischer Verlag: München 2007. ISBN 978-3-8274-1692-6

Leistungsnachweise und Prüfungen in Mathematik – einmal anders

Martin Huber, ZHAW und UZH

Kollege Karl Weber und ich unterrichten seit einigen Jahren das Fach „Mathematik für Architekten“ am Baudepartement der ZHW/ZHAW. Neu für die Fachhochschule in Winterthur ist die Einteilung des Unterrichts in zwei Stunden Vorlesung und zwei Stunden Übungen, beides am selben Vormittag. Etwa 60 Studierende besuchen im ersten Studienjahr diesen Unterricht, welcher im Campus Tössfeld in der ehemaligen Sulzer-Halle 180 stattfindet, wo die Studierenden auch ihre Arbeitsplätze haben. Vom didaktischen Standpunkt scheint der Vorlesungs-/Übungsbetrieb gegenüber dem bis anhin gepflegten Unterricht in Klassen von 20 bis 30 Studierenden ein Rückschritt zu sein. Im Ganzen machen wir jedoch gute Erfahrungen, namentlich wohl auch durch die gute Betreuung in den Übungsstunden und die sorgfältige Ausarbeitung der Musterlösungen zu den Übungsaufgaben, die wir ja nicht irgend einem Assistenten übertragen können.

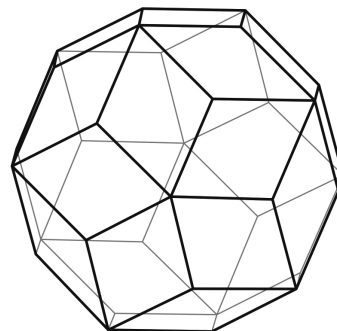
In anderen Studiengängen an der Fachhochschule oder auch an Gymnasien wird die Mathematik oft als „Killerfach“ empfunden. Dass dies hier in keiner Weise der Fall ist, liegt an der vorwiegend unkonventionellen Art unserer Prüfungen bzw. Leistungsnachweise. Während der Semester gibt es neben den üblichen Einzelprüfungen auch *Prüfungen in Zweier- oder Dreiergruppen*, *Gruppenhausaufgaben* sowie *Gruppen-Referate*.

Die Gruppen-Hausaufgabe, welche zum Leistungsnachweis des vergangenen Herbstsemesters zählt, haben wir am 23. Dezember gestellt; sie muss am 20. Januar abgegeben werden. Dazwischen liegen vier Wochen; es ist allerdings zu bedenken, dass diese Wochen nicht nur Weihnachten und Neujahr enthalten, sondern dass die Studierenden im Januar auch ihre Arbeiten in den Architekturhauptfächern abschliessen und abgeben müssen.

Unsere **Gruppen-Hausaufgaben** bestehen jeweils aus zwei Teilen. Der erste Teil ist einem Thema gewidmet, welches in direktem Zusammenhang steht mit der Vorlesung. Die folgende Aufgabe dieser Art stellten wir vor einem Jahr:

Aufgabe 1

Im Bild sehen Sie ein *Rhombentricontaeder* (auch Rhombendreissigflächner genannt). Dieses Polyeder besteht aus dreissig kongruenten Rhomben. Es entsteht als Hülle der Durchdringung eines regulären Ikosaeders und eines regulären Dodekaeders; d.h. als kleinstes konvexes Polyeder, welches das Ikosaeder und das Dodekaeder umfasst. Das Rhombentricontaeder gehört zur Klasse der dual-archimedischen oder Catalanschen¹ Körper.



¹ Benannt nach dem belgischen Mathematiker Eugène Ch. Catalan (1814–1894)

- Stellen Sie das Rhombentricontaeder normal-axonometrisch dar. Beginnen Sie mit einem Würfel mit der Kantenlänge a . Zeichnen Sie darin zunächst das reguläre Ikosaeder (Konstruktion gemäss Vorlesung). Zeichnen Sie dann im Würfel auch das reguläre Dodekaeder (vgl. Übung 4, Aufgabe 5) und zwar so, dass je eine Ikosaederkante und eine Dodekaederkante aufeinander senkrecht stehen und sich gegenseitig halbieren. Jede Seitenfläche des Rhombentricontaeders hat nun eine Ikosaederkante als lange und eine Dodekaederkante als kurze Diagonale.
- Alle Seitenflächen sind zueinander kongruente Rhomben. Berechnen Sie die Seite s , die Diagonalen e und f sowie die Winkel eines solchen Rhombus. Geben Sie s, e, f als Ausdrücke in der Variablen a (Würfelkantenlänge) an. Stellen Sie Zahlenwerte, die nicht rational sind, in Wurzelform dar.
- Bestimmen Sie die Anzahl k der Kanten sowie die Eckenzahlen e_3 und e_5 . Dabei bedeutet e_m die Anzahl der Ecken, in denen sich m Kanten treffen.
- Die Kanten des Rhombentricontaeders können in Parallelscharen eingeteilt werden. Die Rhomben, zu welchen die Kanten einer solchen Schar gehören, bilden eine sog. *Zone*. Aus wie vielen Rhomben besteht jede Zone? Wie viele Zonen gibt es? Begründen Sie Ihre Antworten!

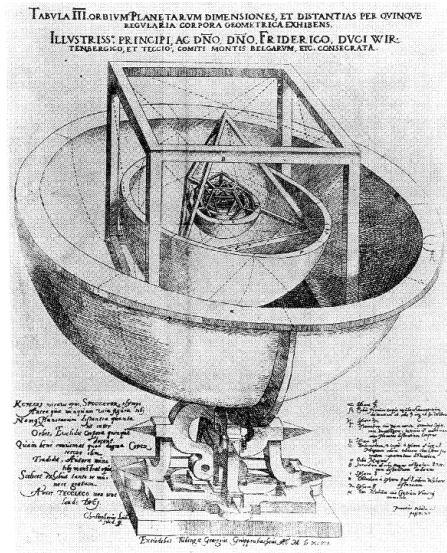
Der zweite Teil der Hausaufgabe steht meistens in einem lockereren Zusammenhang mit der Vorlesung. Er kann beispielsweise einem Bild geweiht sein, in welchem mathematische Objekte dargestellt werden. Hier ist eine solche Aufgabe; sie wurde ebenfalls vor einem Jahr gestellt.

Aufgabe 2 (Aufgabe der besonderen Art)

Im Vortrag von U. Wittorf wurde die nebenstehende, von Johannes Kepler (1571–1630) stammende Zeichnung projiziert. Als 25-Jähriger publizierte Kepler das „Mysterium Cosmographicum“, zu deutsch *das Weltgeheimnis*, ein Werk, in welchem diese Figur zu finden ist. Um Ihnen das Umfeld, in welchem die Figur entstanden ist, leichter zugänglich zu machen, haben wir einen von M. Huber verfassten Artikel über die Entstehung des astronomischen Weltbildes aufs Netz kopiert.

Bearbeiten Sie nun folgende Aufgaben:

- Beschreiben Sie zuerst einmal, was Sie in der Figur sehen.
- Stellen Sie die Bedeutung dar, welche die in der Figur sichtbaren geometrischen Objekte für das Weltbild Keplers hatten. Besprechen Sie auch wichtige Phasen der Geschichte dieser Weltvorstellung.
- Berechnen Sie sodann die Radien der In- und Umkugeln der fünf regulären Polyeder in Abhängigkeit von deren Seite.



d) Berechnen Sie aufgrund der Resultate von c) die Verhältnisse zwischen den Radien der in der Figur sichtbaren Kugelflächen und vergleichen Sie mit den heutigen Werten. Zum Vergleich geben wir Ihnen die Zahlen für die mittleren Radien der Planetenbahnen.

Merkur: $57.9 \cdot 10^6$ km, Venus: $108.2 \cdot 10^6$ km, Erde: $149.6 \cdot 10^6$ km,
 Mars: $27.9 \cdot 10^6$ km, Jupiter: $779 \cdot 10^6$ km, Saturn: $1432 \cdot 10^6$ km.

Damit solche Aufgaben für den Leistungsnachweis brauchbar sind, müssen Spielregeln aufgestellt werden:

Spielregeln für diese Gruppenarbeit:

In der Regel nützen Sie das Wissen und Können, das in der Gruppe vorhanden ist. Allerdings können und wollen wir nicht verhindern, dass Sie Gedanken mit Mitgliedern anderer Gruppen austauschen. Aber die Lösung, die Sie abgeben wollen, sollen Sie innerhalb der eigenen Gruppe gestalten. Falls Sie von jemand ausserhalb Ihrer Gruppe profitiert haben, so schreiben Sie auf Ihr Blatt, wer der Urheber der guten Idee ist (eine Art Quellenangabe, wie bei einer wissenschaftlichen Arbeit). Selbstverständlich ist Abschreiben nicht gestattet. Identische Aufgaben oder Aufgabenteile werden mit 0 Punkten bewertet – gleichgültig, ob es sich dabei um das Original oder die Kopie handelt.

Die Ergebnisse übertreffen regelmässig unsere Erwartungen. Vor allem zeigt sich, dass bei diesen Arbeiten von fast allen Gruppen viel Zeit und Sorgfalt investiert wird. Es gibt auch immer wieder Studierende, welche bei der Darstellung der Lösungen ungewöhnliche und kreative Ideen verwirklichen, an welche die Aufgabensteller gar nicht gedacht haben. Abgeschrieben wird selten und wenn schon, dann nur im Kleinen. Durch gute Lösungen gelingt es dadurch manchen Studierenden, ungenügende Leistungen aus den Einzelprüfungen wettzumachen.

Mit den **Gruppenreferaten** werden die folgenden *Ziele* angestrebt:

1. Das ausgewählte Thema wird sorgfältig erarbeitet, didaktisch aufbereitet und in freier Rede verständlich vorgetragen.
2. Die Referate ergänzen die im Modul „Mathematik für Architekten“ behandelten Themen und tragen zu einem umfassenderen Bild der Mathematik bei.
3. Die Schlüsselqualifikationen *Selbständigkeit* und *Teamfähigkeit* werden durch diese Gruppenarbeit gefördert.

Der *Auftrag* an die Studierenden lautet wie folgt:

Die Studierenden bilden Zweier- oder Dreiergruppen. Jede Gruppe bearbeitet eines der nachstehenden Themen. Die Gruppen arbeiten weitgehend selbstständig. Sie treffen die Dozenten in der Regel zu zwei Besprechungen. Bei diesen Besprechungen sind alle Mitglieder der Gruppe anwesend. Die Vorträge dauern 20–25 Minuten; alle Gruppenmitglieder beteiligen sich daran. Den Mitstudierenden ist vor dem Vortrag eine Zusammenfassung (maximal 3 Seiten) abzugeben, die als Einführung in das Thema dient. Vortrag und Zusammenfassung werden benotet.

Es folgt hier ein Auszug aus der Themenliste:

- Die Lösung geometrischer Aufgaben mit Kongruenztransformationen
- Die perspektivische Affinität
- Die Inversion
- Das Problem des Apollonios
- Geometrische Konstruktionen mit dem Zirkel allein
- Das Steinersche Problem
- Parkettierungen der Ebene

- Flächenberechnung bei Polygonen
- Fraktale Geometrie
- Proportionen in der Architektur 1: Ist architektonische Schönheit messbar?
- Proportionen in der Architektur 2: „Architektur ist gefrorene Musik“
- Proportionen in der Architektur 3: Die Harmonik des Hans Kayser
- Proportionen in der Architektur 4: Le Corbusiers Modulor
- Der Satz des Pythagoras
- Aufsetzen von Pyramiden
- Symmetrische Würfeldurchdringungen
- Fullerene: Kohlenstoff-Moleküle mit vielen Atomen

Dass die Studierenden den Ansprüchen des von ihnen gewählten Themas nicht immer genügen können, ist nicht zu verhindern; kennen wir doch bei der Themenvergabe (jeweils im November) die Einzelnen noch zu wenig. Wenn aber gute Studierende anspruchsvolle Themen bearbeiten, dann können ausgezeichnete Vorträge resultieren. In sehr guter Erinnerung sind mir Referate zu den Themen „Steinersches Problem“, „Parkettierungen der Ebene“ und „Symmetrische Würfeldurchdringungen“ geblieben.

Die vier Themen über „Proportionen in der Architektur“ werden meistens von Studierenden gewählt, welche wenig Vertrauen in ihr mathematisches Können haben. Es ist jedoch mindestens so anspruchsvoll, zu einem Thema wie „Modulor“ einen guten Vortrag zu halten wie zu einem der geometrischen Themen. Bei ungenügender Leistung darf der Vortrag mit demselben Thema wiederholt werden.

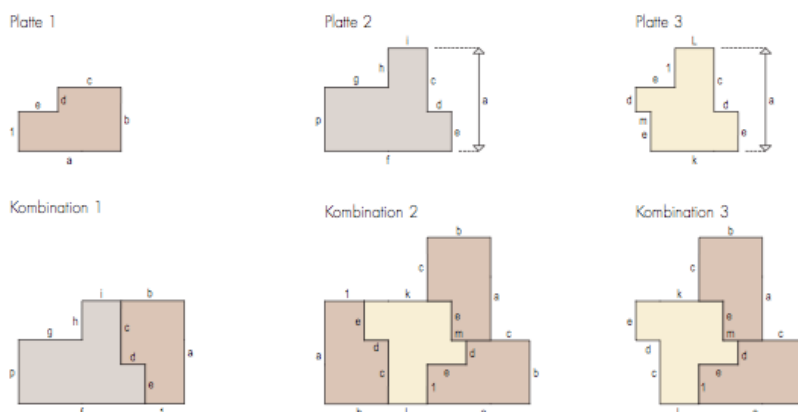
Die Assessment-Prüfung

Am Ende des ersten Studienjahrs findet die Assessment-Prüfung statt. Das Ergebnis hat für die Schlussnote dasselbe Gewicht wie jede der beiden Semesternoten. Zunächst führten wir diese Prüfung in schriftlicher Form durch. Sie bestand aus zwei Teilen, einer Einzel- und einer Gruppenprüfung. Diese Form behagte uns von Jahr zu Jahr weniger. Nach Absprache mit dem Studiengangleiter entschlossen wir uns vor drei Jahren, diese Prüfung von da an als mündliche Einzelprüfung durchzuführen. Neu daran ist, dass die Studierenden die Wahl haben zwischen einem Referat und einer (konventionellen) Prüfung über Inhalte der Vorlesung. Die Idee des Referates schlug von Anfang an ein. Jedes Jahr sind es mindestens 90% der zu Prüfenden, welche diese Option wählen. Konkret bedeutet dies, dass der/die Studierende Aspekte des Gruppenthemas vertiefen oder aber ein völlig neues Thema wählen kann. Neu stehen solche Themen zur Verfügung, welche Inhalte des zweiten Semesters voraussetzen. Beispiele sind:

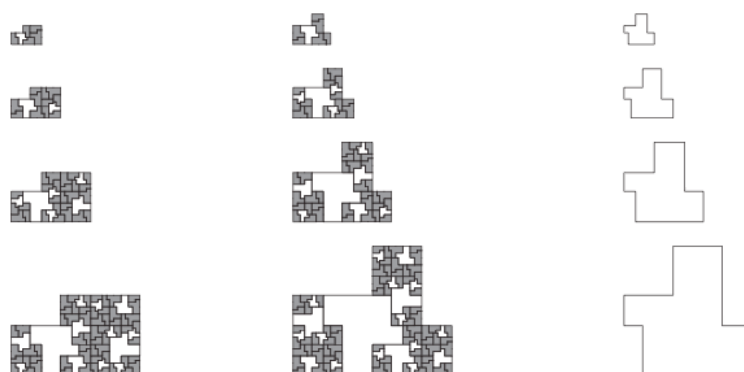
- Die Orientierung von Sakralbauten
- Die Keplerschen Gesetze: Sonne, Erde und Mond
- Sonnen- und Mondfinsternisse
- Bestimmung des Osterdatums
- Von der Kugel zur Karte: Kartenentwürfe der Erde
- Funkortung: Fremd- und Eigenpeilung

Weil die Assessment-Prüfung erst im August stattfindet, haben die Studierenden genügend Zeit für die Vorbereitung. Zur Unterstützung bieten wir an vier Vormittagen während der unterrichtsfreien Zeit Besprechungen an. Studierende, welche bei der Prüfungsvorbereitung wenig Aufwand treiben wollen, wählen meistens die Option „konventionelle mündliche Prüfung“. Dementsprechend sind die Resultate hier eher unbefriedigend. Nicht so bei den Referaten. Neben braven Vorträgen, welche knapp das umsetzen, was in den Besprechungen erarbeitet wurde, gibt es auch sehr gute, ja in seltenen Fällen hervorragende Leistungen.

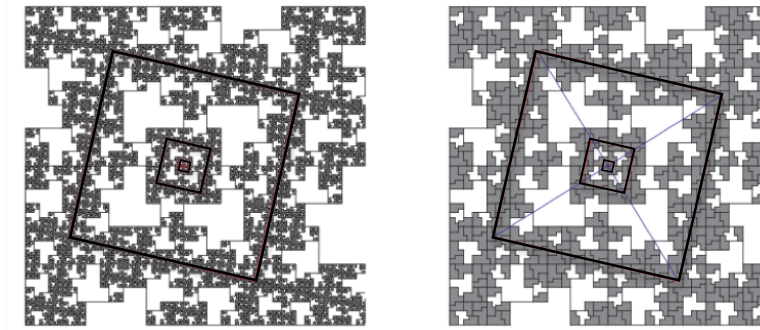
So hat etwa der Student Roman Pfister im Sommer 2008 die Parkettierung untersucht, welche von Daniel Libeskind und Cecil Balmond für die Fassade des Erweiterungsbaus des Victoria and Albert Museums in London vorgesehen worden war. Es handelt sich dabei um eine Weiterentwicklung der aperiodischen A3-Parkettierung des Amateur-Mathematikers Robert Ammann. Die drei Grundbausteine der A3-Parkettierung sind so beschaffen, dass sie bei geeigneter Kombination wieder dieselben Formen ergeben.



Im Gruppenvortrag war es im Wesentlichen darum gegangen, das – aus Geldmangel nicht zur Ausführung gelangte – Projekt von Libeskind und Balmond vorzustellen und die Proportionen der Grundbausteine des A3-Parketts zu berechnen. Im Parkettierungsschema für das Projekt von Libeskind und Balmond sind der erste und der zweite Baustein und ihre Vergrößerungen stets dunkel, der dritte und seine Vergrößerungen stets weiss gefärbt. Werden die weiss gefärbten Teile als leer interpretiert, so entsteht eine Art fraktaler Struktur. In einer Publikation von Balmond wird die Parkettierung deshalb „Fractile“ genannt.

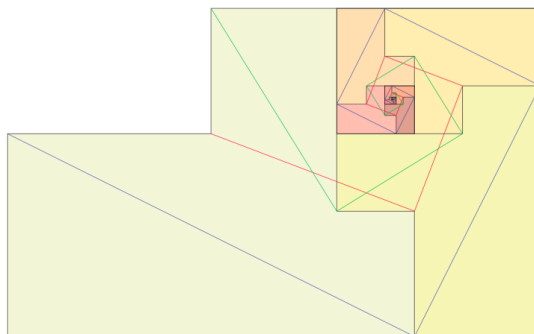
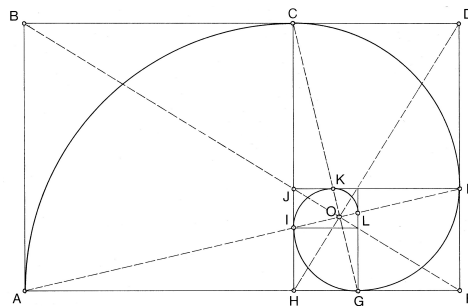


Für den Vortrag an der Assessment-Prüfung hat Pfister diese Struktur untersucht und ist dabei zu interessanten Entdeckungen gekommen. Ich möchte hier nur auf zwei Aspekte eingehen. Einerseits entstehen bei diesem Muster zwei senkrechte Scharen von parallelen Strecken, welche bei einer grösseren parkettierten Fläche gut sichtbar sind, weil sie die leeren Flächen meiden. Wie den folgenden Ausschnitten zu entnehmen ist, bilden diese Scharen konzentrische Quadrate. Man beachte, dass die Figur rechts eine Vergrößerung des Zentrums der linken Figur wiedergibt.



Roman Pfister hat nun gezeigt, dass bei diesen Figuren das Verhältnis $1 : \rho^3$ gleich mehrfach vorkommt, wobei $\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ der Major der im goldenen Schnitt geteilten Einheitsstrecke bezeichnet.

Ferner hat er einen Zusammenhang mit der sog. *Goldenen Spirale* herausgearbeitet. Letztere besteht aus einer geometrischen Folge von Viertelskreisen mit Quotient r . In der nebenstehenden Figur sind die ersten sechs Viertelskreise eingezeichnet. Die goldene Spirale hat fraktalen Charakter und windet sich um den Schnittpunkt der Diagonalen BF bzw. DH der goldenen Rechtecke AFDB bzw. CHFD. Der elementarste Zusammenhang zum A3-Parkett besteht darin, dass das Sechseck AHJEDB gerade die Form des ersten Bausteins besitzt.



Inspiziert von der goldenen Spirale, hat Pfister auch gesehen, dass der Baustein 1 in eine unendliche geometrische Folge (mit Quotient r) von Bausteinen der Form 2 zerlegt werden kann. Mit diesem schönen Resultat und der zugehörigen Figur möchte ich diesen Bericht abschliessen.

Measurements and their Uncertainties, *A Practical Guide to Modern Error Analysis*, Ifan G. Hughes and Thomas P.A. Hase, 136 Seiten, ca 25 CHF, Oxford University Press, Oxford, New York, 2010, ISBN 978-0-19-956633-4

Für experimentelle Wissenschaften ist der Umgang mit Messungen und Messdaten essenziell, auch – oder gerade – im Unterricht mit Anfängern, sei es in einem Praktikum, einem Laborkurs, in der Informatik bei Monte-Carlo-Simulationen oder bei Maturaarbeiten.

Wer in diesem Zusammenhang einen kurzen Referenztext sucht, der einen modernen Standpunkt einnimmt, sich auf Wesentliches beschränkt, die Bedürfnisse und Arbeitsbedingungen der Praktiker realistisch einschätzt und daher auch mal mit Faustregeln arbeitet, wird mit diesem Text mehr als zufrieden sein.

Was könnte überzeugender sein als folgende Hinweise zur Entstehung des Textes? An der University of Durham wurde ein Kurs *Discovery Skills* angeboten, der sich an Studierende richtet, bevor sie ihre Laborarbeiten im Studium als Naturwissenschaftler oder in den technischen Wissenschaften beginnen. Es werden keine statistischen Vorkenntnisse angenommen. Im Gegensatz zu traditionellen Darstellungen wird davon Gebrauch gemacht, dass in vielen Versuchen heute die Messdaten von Computern erfasst werden, auf denen auch Dienstprogramme wie Tabellenkalkulation oder grafische Darstellungen verfügbar sind. Der Computereinsatz reduziert den Bedarf an formellen oder technischen Analysiskenntnissen im Vergleich zu traditionellen Behandlungen. So wird für die Fehlerrechnung nicht mehr die Linearisierung einer Funktionen $f : x \mapsto f(x)$ benutzt, sondern man nutzt die auf dem Rechner implementierten Funktion f selbst und berechnet $|f(\bar{x} + \sigma) - f(\bar{x})|$ als Näherung für die zu erwartende Auswirkung eines Messfehlers der typischen Grösse σ in der Nähe des Mittelwertes \bar{x} einer Reihe von Messdaten, die mit der Funktion f weiter verarbeitet werden. Diese Art der Fehlerrechnung ist auch im Gymnasium realistisch, sogar wenn anstelle eines PCs oder Laptops nur ein Taschenrechner vorhanden ist, der mit Listen statistische Auswertungen vornehmen kann und dessen Funktionen auf Listen anwendbar sind.

Datenanalyse ohne Computer ist für die heutige Schule ein unangemessenes, perspektivenloses Unterfangen, weil die für die Statistik hinreichend grossen Datenmengen sich gar nie behandeln lassen. Hughes und Hase zeigen einen sehr gut durchdachten Weg, um den Computer in der Fehleranalyse und der Fehlerrechnung einzusetzen. Dank dem Computer rücken auch das Testen von Hypothesen und das Anpassen von Funktionen mit Regressionsmodellen in die Reichweite der Schulpraxis. Warum ist es klug, nach Möglichkeiten zu suchen, Datensätzen als Punkte, die sich längs einer Geraden verteilen, aufzeichnen zu lassen? Fähigkeiten unseres Auges unterstützen uns dann in der Mustererkennung. Sie ist hilfreich bei einer Einführung in Parameterschätzung und einfache nichtlineare Regressionsmodelle. Die Rolle von geeigneten Abstraktionen und Vereinfachungen wird klar hervorgehoben. Das ist bei der Datenauswertung mit dem Computer ein guter Punkt, weil das potente Hilfsmittel dazu verführt, mehr als sinnvoll oder nötig zu rechnen.

Ausführlich wird auch auf die Darstellung von Messdaten in Laborberichten eingegangen. Dabei werden natürlich Grafiken mit entsprechenden Programmen erzeugt. Aber wie sollen die Grafiken beschriftet werden? Welche Elemente müssen zusätzlich in die Grafik eingezeichnet werden, damit aus dem Datensatz beim Betrachten die wesentliche Botschaft hervortritt?

Für einen Grundkurs im Umgang mit Daten, ist es nicht zwingend, auf die formale Behandlung der χ^2 -Statistik, die von den Autoren benutzt wird, einzugehen. Manche Ideen lassen sich im ersten Durchgang weniger formal anhand von Grafiken zum Beispiel mit Histogrammen vermitteln.

Der Text ist hervorragend gestaltet mit gut durchdachten Randspalten, die oft einfache aber erhellende Grafiken oder zusammenfassende Kommentare oder Stichworte enthalten.

Für einmal ist ‘der Rand breit genug, um alles Nötige zu sagen’.

Ich empfehle dieses Buch sehr als Anregung für alle, die im Unterricht mit experimentellen Daten arbeiten und Schüler auf den Umgang mit Daten und statistischen Methoden mit den Werkzeugen unserer Zeit vorbereiten wollen.

H.R. Schneebeli, Wettingen

Buchbesprechung

H.R. Schneebeli

28. November 2010

Differential- und Integralrechnung

Eine anwendungsbezogene Einführung mit TI-Nspire™ CAS, 2. erweiterte und überarbeitete Auflage 2010, Robert Märki, vii und 188 Seiten, ©Texas Instruments, erhältlich über die TI-Materialdatenbank: www-ti-unterrichtsmaterialien.net

Dieser Text gibt eine kompetente Antwort auf wesentliche Fragen, die sich alle stellen sollten, die Mathematik am Gymnasium unterrichten:

- Welchen Stellenwert hat das Aufzeichnen von *Funktionsgraphen* in der Analysis? Bedrohen Grafikrechner die Qualität des Unterrichts?
- Wie wesentlich sind die algorithmisch ausführbaren *Rechenregeln* der Analysis für die Allgemeinbildung oder als Grundlagen einer Ausbildung nach dem Gymnasium?
- Welches sind die tragenden Elemente in der elementaren Analysis? Welche Beziehung besteht zwischen den Algorithmen des *Differentialkalküls* und jenen *Grundbegriffen*, mit denen in der Schulanalysis argumentiert wird?
- Welche Rolle sollen *numerische Verfahren* in der gymnasialen Mathematik spielen? Was haben numerische Gleichungslöser, numerisches Differenzieren, numerische Integration mit Analysis zu tun?
- Wie zentral sind Extremalaufgaben in der gymnasialen Analysis?
- Auf welche interessanten Gebiete und motivierenden Beispiele müssen wir verzichten, weil uns die *Zeit fehlt*, sie angemessen im Gymnasium zu behandeln?
- Welchen Nutzen zieht das Gymnasium aus einem durchdachten *Einsatz von Technologie* im Mathematikunterricht?
- Welchen Nutzen haben Erstsemestriker an den Hochschulen, wenn sie ein *qualitatives Verständnis für dynamische Systeme* dank dem Einsatz von Technologie schon aus dem Gymnasium mitbringen? Was hilft es, wenn sie erste Erfahrungen mit Begriffen wie Vektorfeld, Stromlinie, dynamisches System mitbringen und wenn ihnen eine einfache Technologie dazu Anschauungen in typischen Beispielen und Anwendungen vermitteln konnte?

Robert Märki gibt auf diese Fragen wohl durchdachte und im Unterricht erprobte Antworten. Es lohnt sich auf jeden Fall, seine Erfahrungen zur Kenntnis zu nehmen.

Ein besonderes Qualitätsmerkmal des Textes: Er ist kurz und er bringt eine Auswahl der zentralen und wesentlichen Ideen und Ergebnissen der Analysis auf den Punkt. Wer

dieses Buch durcharbeitet, erreicht alle Ziele im Analysisunterricht, die eine erfolgreiche Fortsetzung an den Hochschulen garantieren. Aber es gilt mehr: Die Motivation für die behandelte Mathematik ist stimmig, sie steht im richtigen historischen Kontext – auch und gerade aus heutiger Perspektive, weil moderne Hilfsmittel helfen, diese Grundlegendes anschaulich zu vermitteln. Wenn sich Rechnungen automatisieren lassen, gewinnt man Zeit und Freiraum, um Gedankengänge begrifflich zu verankern und tiefere Zusammenhänge aufzudecken. Der Autor hat sich weise auf eine knappe Auswahl beschränkt. Alles, was er bearbeitet, wird gut begründet und mustergültig ausgeführt. Damit sind wesentliche Voraussetzungen für einen nachhaltigen Unterricht erfüllt.

Es folgt eine kurze Übersicht zu den Inhalten: Veränderung und Änderungsrate sind Anlass zur Definition der Ableitung. Von Beginn an werden Prozesse betrachtet und Differentialgleichungen benutzt, um Prozesse zu beschreiben. Ausgangspunkt ist Newton's Abkühlungsgesetz. Wer Differenzenquotienten versteht, kann sie nutzen, um mit dem Abkühlungsgesetz – einer Differentialgleichung – die Temperatur in der Zukunft näherungsweise vorauszusagen. Die einfache Methode von Euler kommt damit rasch zum Zug. In knapper Form wird der *Ableitungsbegriff* als Grenzwert eingeführt. Die Idee der Linearisierung wird erlebbar: Wenn man mit dem 'Mikroskop' in die kleinen Umgebungen eines Punktes auf einem glatten Funktionsgrafen hineinzoomt verschwindet die Krümmung!

Es folgen einige Ableitungen bei speziellen Funktionen und die generischen Ableitungsregeln. Typische Anwendungen der Ableitung ergänzen die Begriffsbildung. Ein Kaptiel ist dem Paar Exponential- und Logarithmusfunktion gewidmet. Auf den folgenden 20 Seiten werden elementare aber interessante Beispiele zu Differentialgleichungen aus allerlei Anwendungen aus der Sicht der Modellbildung behandelt. Wiederum liefert Eulers Verfahren erste Näherungen an Lösungen.

Die Behandlung des Integrals ist auf dem Weg zu formalen Lösungen von Differentialgleichungen natürlich unverzichtbar. Das bestimmte Integral wird als Grenzwert von Riemannsummen eingeführt. Der Hauptsatz ist als Anfangswertproblem formuliert.

Nach weniger als 100 Seiten beginnt das zentrale Kapitel mit Dynamischen Systemen in einer sehr gut gestalteten geometrischen Einkleidung: Vektorfelder im Phasenraum, Stromlinien als Lösungen. Wiederum nehmen numerische Näherungsverfahren dem Thema die Schärfe und bereiten einen unmittelbaren Zugang zur zentralen Botschaft vor: Wesentliche schulgerechte Anwendungen aus verschiedenen Wissensgebieten.

Nebenbei sei bemerkt: Newton hat (stark vereinfacht gesagt) Grundlagen der Analysis gelegt, um mit der Lösung von Differentialgleichungen zeigen zu können, wie die Keplergesetze aus dem Gravitationsgesetz folgen. Der Ausbau der Himmelsmechanik hat vor mehr als 100 Jahren eine modernere Sicht auf Differentialgleichungen eröffnet: dynamische Systeme. Es ist erfreulich, dass Robert Märki uns zeigt, wie die Schulmathematik sich diesem Thema öffnen kann, wenn die Prioritäten im Unterricht entsprechend gesetzt werden.

Ein kurzes Kapitel zu den trigonometrischen Funktionen und Schwingungen zeigt eine moderne Darstellung eines bekannten Themas.

Die Technologie bringt es wiederum mit sich, dass die Rechenlast beim Thema Taylorentwicklung unbedeutend wird. Die Grafikfähigkeit vermittelt zudem sofort die wesentlichen geometrischen Einsichten über Funktionsgrafen und Taylornäherungen. Wir sehen unmittelbar die Idee: verallgemeinerte Tangenten höherer Ordnung.

Separation der Variablen ist die einzige analytische Methode, die zum Lösen explizit ausgearbeitet wird. Sie wird dann benutzt für die Lösung der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Der Text wird abgerundet durch Lösungen zu den Aufgaben, Hinweise zum Einsatz des

TI-Nspire™ CAS mit Beispielen, die vorführen, wie dieses Werkzeug klug eingesetzt werden kann, um Ordnung in die Vielfalt der Funktionsgraphen zu bringen. Das gelingt nur dank mathematischem Verständnis für den (geistigen) Werkstoff und das real existierende Werkzeug, hier ein CAS-Rechner. Damit schliesst der Autor auch einen Generalverdacht aus: ‘Knopfdruckmathematik’ ist keine zwingende Folge des CAS-Einsatzes.

Obwohl der Autor seine Beispiele auf eine spezielle Hard- und Software ausrichtet, sind seine Anregungen, Ergebnisse, Einsichten von grosser Tragweite und allgemeinem Interesse. Die Folgerungen sind im wesentlichen unabhängig vom konkret verwendeten Hilfsmittel. Allerdings sind die im Buch verwendeten Werkzeuge bezüglich Handhabung und Leistung speziell auf den Unterricht im Gymnasium zugeschnitten. Die Software kann auf einem PC oder auf einem Handheld benutzt werden. Wer diese Mittel einsetzt, kann viele Beispiele aus dem Text ohne Zusatzaufwand unmittelbar im eigenen Unterricht übernehmen.

Vielleicht sind Sie, liebe Leserin, lieber Leser auch beeindruckt von Märkis Text. Vielleicht zweifeln Sie noch, ob Sie oder Ihre Schüler damit auch arbeiten könnten. Versuchen Sie es auf jeden Fall. Beginnen Sie vielleicht mit Teilen aus dem Text im Rahmen des Schwerpunktfaches PAM oder in einer Arbeitswoche. So können Ihnen echte Anwendungen aus Physik, Biologie, Chemie gelingen und Ihren Schülern Grunderfahrungen zur Modellbildung ausserhalb der Mathematik vermitteln. Überlegen Sie aufgrund der eigenen Erfahrungen, wie auch Ihre Klassen im Grundkurs von neuen Perspektiven und vom Technologieeinsatz profitieren könnten. Damit wäre eine zukunftssträchtige Entwicklung angestossen. Robert Märkis eigene berufliche Laufbahn wurde davon wesentlich geprägt. Es ist äusserst verdienstvoll, dass er seine Materialien mit uns allen teilt, sie zur weiteren Nutzung anbietet und uns damit hilft, einen wesentlichen Schritt in der eigenen beruflichen Entwicklung mit geringerem Risiko und geringerer Anstrengung zu vollziehen, als wenn wir alles alleine entwickeln sollten.

Robert Märki hat keinen Aufwand gescheut, grundlegende Konzepte für einen zeitgemässen Analysisunterricht auszudenken, bekannte Muster anzupassen und zu erproben. Wir sind ihm zu tiefstem Dank verpflichtet, dass er uns einen *knappen und praxiserprobten Text erster Güte* zu einem bescheidenen Preis vorlegt.

H.R. Schneebeli, Wettingen

Ja - Oui - Sì



Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und -lehrer (VSG) werden.

J'aimerais devenir membre de la Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique (SSPMP) et de la société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire (SSPES).

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

Beitrag/Montant/Quota: Fr. 120.- (VSG-SSPES-SSISS) + Fr. 40.- (SSIMF-SSPMP-VSMP)

Frau/Mme/Sig.ra Herr/M./Sig. Prof. Dr.

Name/Nom/Cognome:

Vorname/Prenom/Nome:

Adresse/Indirizzo (privat/privato):

Plz-Ort/NP-Ville/CAP-Luogo:

(Land/Pays/Paese):

Email: (Tel):

(Geburtsdatum/Date de naissance/Data di nascita):

Sprache/Langue/Lingua: D F I.

Schule/école/scuola: Kanton/canton/cantone:

Kategorie/Catégorie/Categoria: activ/actif/attivo passive/passif/passivo

Student/-in, étudiant(e), studente/ssa.

Einsenden an/envoyer à/inviare a:

VSG-SSPES-SSISS, Postfach 8742 (Waisenhausplatz 14), 3001 Bern

oder per Internet: www.vsg-sspes.ch

Impressum

Herausgeber – *Éditeur*

VSMP / SSPMP / SSIMF

Korrespondenz – *Correspondance*

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Layout – *Mise en page*

Jean-Luc Barras jeanluc.barras@gmail.com
Es Novallys 224 Tél. 026 912 98 24
1628 Vuadens

Inserateverwaltung – *Publicité*

Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch
Weinbergstrasse 3 Tel. 055 410 62 36
8807 Freienbach

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

– *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:

Ganzseitige Fr. 500.–
Halbseitige Fr. 300.–

Beilagen:

bis 20 g Fr. 500.–
über 20 g Nach Vereinbarung

Adressänderung – *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder – Membres de la SSPMP :
VSG – SSPES – SSISS
Sekretariat, Postfach 8742
3001 Bern

Abonnenten die nicht Mitglieder der VSG sind:

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Auflage – *Tirage*

900. Erscheint dreimal jährlich.

Präsidentin VSMP – SSPMP – SSIMF

Elisabeth McGarrity mcgarrity@rhone.ch
Bäjiweg 45 Tel. 079 34 34 862
3902 Brig-Glis

Deutscheschweizerische Mathematikkommission

Hansjürg Stocker hjstocker@bluewin.ch
Friedheimstrasse 11 Tel. 044 780 19 37
8820 Wädenswil

Deutscheschweizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@gymburgdorf.ch
Marienstrasse 21 Tel. 031 534 66 74
3005 Bern

Commission Romande de Mathématique

Patrick Hochuli patrick.hochuli@gfbienne.ch
Alex-Moser 50 Tél. 032 365 60 15
2503 Bienne

Commission Romande de Physique

Jean-Daniel Monod jean-daniel.monod@urbanet.ch
Rue du Bugnon 14 Tél. 021 701 38 62
1030 Bussigny

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Vincenzo d'Alberti 13
6600 Locarno Tél. 091 751 14 47

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

– *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 116	30.04.2011 (20.06.2011)
Nr. 117	31.08.2011 (20.10.2011)
Nr. 118	31.12.2011 (20.02.2012)

Druck und Versand – *Imprimerie*

Niedermann Druck AG
Rorschacherstrasse 290
9016 St. Gallen

Internet-Adressen – Adresses Internet

<http://www.vsmf.ch> — <http://www.sspmp.ch> — <http://www.ssimf.ch>