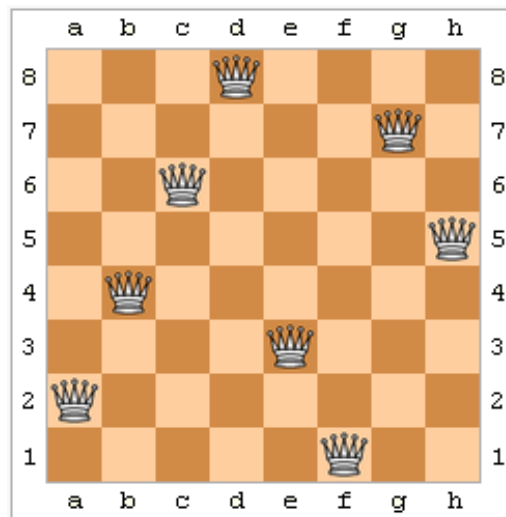




Bulletin

Juni 2010 – Juin 2010

N° 113

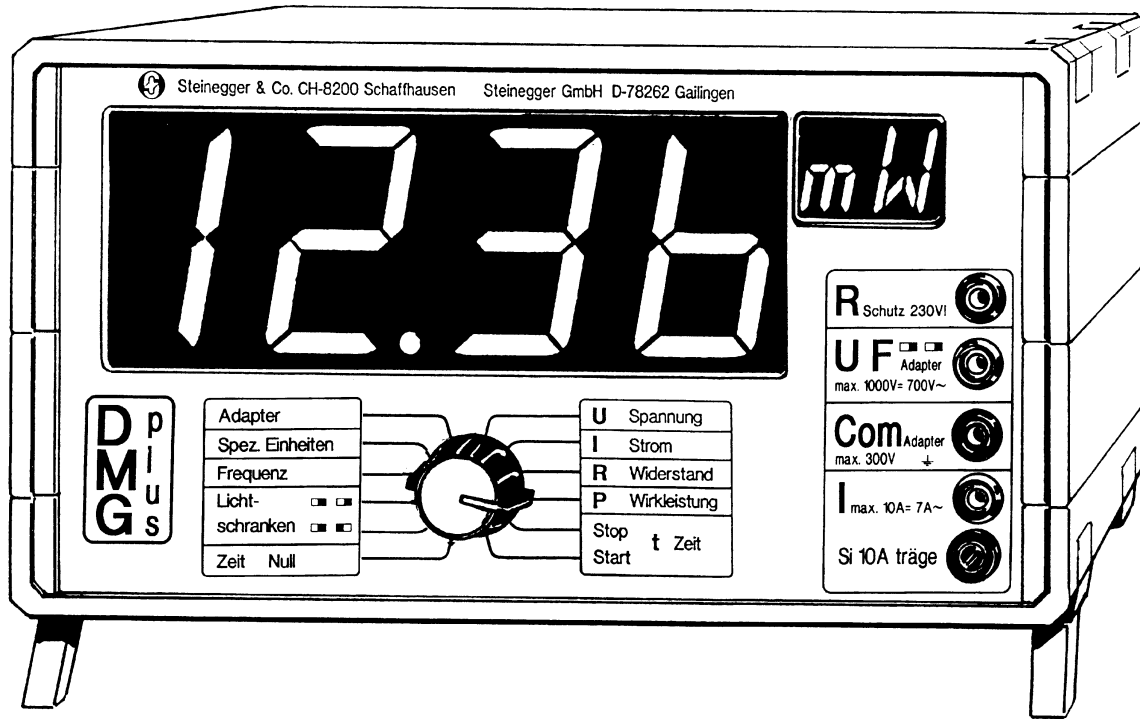


VSMP – SSPMP – SSIMF

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica

Demonstrations-Digitalmultimeter

DMG plus Art. Nr. 160



Das neue vollautomatische Digitalmessgerät für Schulen; kompromisslose Qualität zu erstaunlich günstigem Preis!

- Misst: Gleich- und Wechselspannung (echt eff.) 0.1 mV - 1000 V \cong
- Gleich- und Wechselströme (echt eff.) 1 nA - 10 A \cong
- Widerstände 0.1 Ω - 20 M Ω
- Wirkleistung (!) 1 μ W - 10 kW
- Zeit / Lichtschranken 0.001 s - 2'000 s
- Frequenz 10 Hz- 20 kHz
- 56 mm hohe Ziffernanzeige - bis auf 25m Distanz ablesbar
- 2000 Messpunkte und vollautomatische Bereichswahl
- Viele Zusatzgeräte direkt anschließbar

Preis nur: SFr 1'180.- (inkl. MWSt)

Die kostenlose „Kurzbedienungsanleitung zum DMG plus“ erhalten Sie direkt von Hersteller:

Steinegger & Co.
Rosenbergstrasse 23
8200 Schaffhausen



Internet: www.steinegger.de
Telefon: 052-625 58 90
Fax: 052-625 58 60

In dieser Nummer – *Dans ce numéro*

<i>Mathematik 2010: Das 10-Jährige Jubiläum der SGM</i>	3
<i>Herbert Bruderer</i> <i>ETH Zürich unterrichtet vor Ort an Mittelschulen:</i> <i>ein Gespräch mit Juraj Hromkovic</i>	5

Deutschschweizerische Mathematikkommission **8**

<i>Armin P. Barth</i> <i>Wie stark ist das System?</i> <i>– Zwei Betrachtungen zur Trisektion des Winkels</i>	8
---	---

<i>Rainer Hauser</i> <i>Zählen ist Messen in der nullten Dimension</i> <i>Oder: Was macht man mit halben Koordinatenachsen?</i>	17
---	----



<i>Peter Gallin</i> <i>Die Geometrisch echte Ausgleichsgerade</i>	22
--	----

<i>H. R. Scheebeli</i> <i>Rezension: Engel, J., Anwendungsorientierte Mathematik:</i> <i>Von Daten zur Funktion</i>	25
---	----

<i>H. R. Scheebeli</i> <i>Bericht zur Maturarbeit: Populationen im Wettstreit</i>	28
--	----

<i>Andreas Nüesch</i> <i>Schule von Schülern für Schüler</i>	30
---	----



Commission Romande de Mathématiques **31**

<i>Didier Müller</i> <i>Le problème à n dames pour illustrer les métaheuristiques</i>	31
---	----

Deutschschweizerische Physikkommission **35**

DPK

<i>Martin Lieberherr</i> <i>Gebrochener Stab</i>	35
---	----

<i>Christian Stulz</i> <i>Physik und Medizin: eine Plakatserie der DPK für</i> <i>Interdisziplinarität im Physikunterricht</i>	40
--	----

Kurse

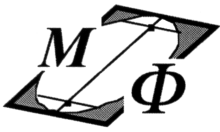
<i>Cours CRM</i>	
Histoire et épistémologie des mathématiques dans les temps modernes	42
21. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht	43
Horizonte im Mathematikunterricht erweitern – zusammenarbeiten mit Biologie, Chemie, Informatik oder Physik	46
Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht	48
Radioaktivität: Bedrohung oder harmloses Naturphänomen?	49
Die Physik der Elementarteilchen	50
<hr/>	
Impressum	54

Internet-Adressen – *Adresses Internet*

<http://www.vsmf.ch> — <http://www.sspmp.ch> — <http://www.ssimf.ch>

Page de titre

Exemple de solution du problème à n dames, voir article de Didier Müller, page 31.



Mathematik 2010: Das 100-jährige Jubiläum der SMG

2010 ist zwar nicht weltweit das Jahr der Mathematik - für die Schweizer Mathematik allerdings ist es trotzdem ein besonderes Jahr. Die Schweizerische Mathematische Gesellschaft SMG wurde 1910 gegründet und feiert somit ihren hundertsten Geburtstag.

Zu diesem Anlass findet am 1. und 2. Oktober ein Festkolloquium (mit Vorträgen für ein fachlich nicht spezialisiertes Publikum) an der Universität Bern statt. Am Freitag Nachmittag sind ein Vortrag von Friedrich Hirzebruch über seine Zeit in Zürich mit Heinz Hopf sowie ein Vortrag von Etienne Ghys geplant, gefolgt vom offiziellen Festakt und einem Apero. Am Samstag folgen Vorträge von Jean-Pierre Bourguignon und dem Fields Medal Träger und Knotentheoriespezialisten Vaughan Jones. Den Schlusspunkt bildet die Vernissage einer Ausstellung mit Bildern von Eugen Jost.



Eugen Jost hat seinen ersten Mathematikkalender 2008 zum Jahr der Mathematik gestaltet. Zum diesjährigen Jubiläum gibt es eine Schweizer Ausgabe mit Bezug zur SMG. Josts Bilder lassen staunen, und bei längerer Betrachtung erschliessen sich immer wieder neue Facetten. Die Ausstellung "Spielfelder" im Institut für Bildungsmedien, Helvetiaplatz 2 in Bern, ist vom 4. Oktober bis zum 30. November 2010 jeweils am Montag bis am Freitag, 10 Uhr bis 17.30 Uhr geöffnet.



Zudem gibt es einen Wettbewerb für junge mathematikbegeisterte Künstlerinnen und Künstler: Wer malt das tollste Bild zum Thema "Mathematik ist cool"? Teilnahmeberechtigt sind Schülerinnen und Schüler bis zum 6. Schuljahr. Einsendeschluss ist Ende Oktober. Die Preisverleihung zu diesem Wettbewerb findet am Mittwoch, 24. November 2010, 16 Uhr in der Ausstellung "Spielfelder" statt.



Ebenfalls in der Ausstellung "Spielfelder" erhalten Zauberlehrlinge zudem die Gelegenheit, dem berühmten Zauberer Siderato, der selber Mathematiker ist, über die Schulter und auf die Finger zu schauen. Eine Voranmeldung ist erforderlich.



Die Schweizerische Mathematische Gesellschaft sponsert einen zweiten Wettbewerb: Prämiert wird die beste Maturarbeit im Schuljahr 2008/09 oder 2009/10 im Bereich (oder interdisziplinär mit Bezug zu) Mathematik. Die Einsendefrist ist bis Ende Juni verlängert, und die Preisverleihung findet im Rahmen des Festaktes zur 100-Jahr-Feier statt.



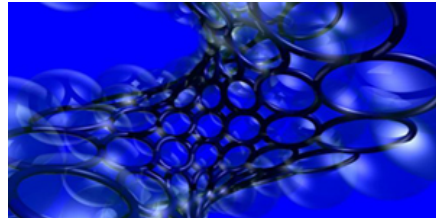
Schliesslich wird in diesem Sommer auch der Festband **math.ch/100** zum 100-jährigen Bestehen der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft erscheinen, mit insgesamt dreiundzwanzig Beiträgen zur Mathematik in der Schweiz. Die Geschichte der SMG, Mathematisches und Biographisches zu herausragenden Schweizer Mathematikern sowie Frauen in der Schweizer Mathematik sind nur einige der Themen. Der Band wird allen SMG Mitgliedern gratis zugeschickt.



Die Zeitschrift *Elemente der Mathematik* widmet ihre vierte Ausgabe in diesem Jahr ganz dem Jubiläum: In zahlreichen Artikeln werden Perlen der Schweizer Mathematik aus der jüngeren und älteren Geschichte dargestellt. So werden unter anderem mathematische Themen aus dem Schaffen von Leonhard Euler, Jakob Bernoulli, Jakob Steiner, Ludwig Schläfli, Heinz Hopf, Adolf Hurwitz, Georges de Rham und Hugo Hadwiger präsentiert.



Die interaktive Ausstellung IMAGINARY des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach gastiert vom 21. September bis zum 7. Oktober an der ETH Zürich. Präsentiert werden Visualisierungen, interaktive Installationen, virtuelle Welten, 3D-Objekte und ihre theoretischen Hintergründe. In dieser Ausstellung wird Mathematik zu Bildern von ausserordentlicher Schönheit. Virtuelle Welten machen Mathematik zu beeinflussbarer Kunst und zu verstehbarer Wissenschaft. Ein einzigartiges Erlebnis insbesondere für Schulklassen. Die Exponate werden vor Ort von Assistentinnen und Assistenten erklärt.



Informationen und Bedingungen sowie Anmeldetalons zu allen genannten Aktivitäten finden sich auf der Homepage der SMG unter

www.math.ch/100

Christine Riedtmann
Vizepräsidentin der SMG

ETH Zürich unterrichtet vor Ort an Mittelschulen

Ein Gespräch mit Juraj Hromkovic, Professor für Informationstechnologie und Ausbildung der ETH Zürich

Seit dem Schuljahr 2008/2009 dürfen die Schweizer Gymnasien erstmals das neue Ergänzungsfach Informatik ausschreiben. Weil die Informatik mit der Maturareform von 1995 weitgehend aus unseren Mittelschulen verbannt wurde, mangelt es an gut ausgebildeten Lehrkräften und geeigneten Lehrmitteln. Um die Lage zu verbessern, hat die ETH Zürich ein Ausbildungs- und Beratungszentrum für Informatikunterricht (ABZ) gegründet. Es bietet eine Vielzahl von Weiterbildungsmöglichkeiten für Informatiklehrpersonen an.

Was für eine Informatik soll an unseren Mittelschulen unterrichtet werden?

Juraj Hromkovic: Seit der Maturareform von 1995 wird in den Gymnasien von Ausnahmen abgesehen nur noch das Anwenden von Informatikmitteln (Informations- und Kommunikationstechnik) gelehrt und geübt. Dieses notwendige, aber kurzlebige Anwenderwissen wird fälschlicherweise auch „Informatik“ genannt. Es kann mit anderen gymnasialen Fächern wie Mathematik und Physik nicht verglichen werden. Als man 2006 über die Wiedereinführung der Informatik in Form eines gymnasialen Ergänzungsfachs nachdachte, war die Zielsetzung klar: Der Informatikunterricht soll die gleiche Tiefe und Langlebigkeit haben wie die Ausbildung in der Mathematik und den Naturwissenschaften. Das neue Ergänzungsfach soll die mathematisch-naturwissenschaftliche Denkweise mit der konstruktiven Denkweise einer Ingenieurdisziplin verknüpfen. Die ETH Zürich hat eine lange Tradition in der Aus- und Weiterbildung von Informatiklehrkräften. Wie uns 2006 bewusst wurde, genügte die bisherige Lehramtsausbildung jedoch nicht.

Woran fehlte es denn?

Es gab einen Mangel an gut ausgebildeten Lehrkräften, die eine hochwertige Informatik unterrichten konnten. Im Unterschied zu anderen Fächern fehlten geeignete Lehrmittel und Erfahrungen aus einer langjährigen Unterrichtspraxis. Überdies musste der schwer angeschlagene Ruf der Informatik in der Öffentlichkeit verbessert werden.

Welche Ziele hat das Ausbildungs- und Beratungszentrum für Informatikunterricht?

Das Ausbildungs- und Beratungszentrum für Informatikunterricht (ABZ) der ETH Zürich versucht, die vielschichtigen Probleme ganzheitlich zu lösen. Zunächst geht es darum, Lehrkräfte weiterzubilden, vielfältige Unterrichtsmaterialien und Lehrmittel herzustellen und in den Schulen zu erproben, interessierte Jugendliche mithilfe der Informatik-Olympiade zu fördern und Veranstaltungen über die Informatikforschung für die breite Öffentlichkeit anzubieten. Das ABZ gehört zu dem Ende Oktober 2009 eröffneten Kompetenzzentrum für Lehren und Lernen.

Worin besteht der neue Ansatz des ABZ?

Die Qualität der Schule hängt massgeblich von den Lehrpersonen ab. Die Aus- und Weiterbildung von Informatiklehrkräften an der ETH ist für praktizierende Lehrpersonen zu aufwändig. Daher haben wir uns entschieden, mit unseren Ausbildungskonzepten direkt in die Schulen zu gehen und eine fachliche und fachdidaktische Ausbildung vor Ort anzubieten. Diese Weiterbildung umfasst nicht nur Kurse für Lehrpersonen, sondern auch Informatikunterricht in den Klassen der beteiligten Schulen. Der Projektunterricht kann ein paar Wochen bis zu mehrere Semester dauern.

Welches ist das zurzeit wichtigste Vorhaben des ABZ?

Das grösste laufende Projekt des ABZ ist das Weiterbildungszentrum Graubünden. Es handelt sich um ein zweijähriges Vorhaben, bei dem 18 Tage lang Weiterbildungskurse zu unterschiedlichen Themen der Informatik erteilt werden. Zwei Jahre lang wird zudem das Ergänzungsfach Informatik in einer Klasse an der Schweizerischen Alpinen Mittelschule Davos unterrichtet. Die Lehrkräfte aus Chur, Schiers und Davos können den Unterricht jederzeit besuchen. Das ABZ beteiligt sich ferner an der Weiterbildung von Informatiklehrkräften im Tessin. Beide Vorhaben werden von der Hasler-Stiftung unterstützt. Wir hoffen, dass diese Beispiele auch andere Kantone zu einer Zusammenarbeit mit dem ABZ anregen. Bisher fand die Weiterbildung vor Ort in kleinerem oder grösserem Rahmen in Schulen der Kantone Aargau, Basel, Luzern, Schaffhausen, St. Gallen und Zürich statt.

Wodurch zeichnen sich die Lehrmittel des ABZ aus?

Bei der Entwicklung der Lehrmittel versuchen wir, nicht nur unterschiedliche Gebiete der Informatik abzudecken, sondern auch didaktisch das laut Pisa-Studie grösste Problem – die starke Beziehung zwischen dem Lernerfolg und der Ausbildung der Eltern – anzugehen. Unsere Lehrmittel sind wie ausführliche Leitprogramme aufgebaut und daher zum Selbstunterricht geeignet. Anhand des umfangreichen Übungsmaterials kann man beliebig schnell und beliebig oft wiederholen, was man nicht verstanden hat. Für die Lehrkräfte enthalten die Lehrbücher fachdidaktische Hinweise und Lösungsvorschläge zu häufig auftretenden Verständnisproblemen.

Lehrmittel

- Hromkovic, Juraj: Lehrbuch Informatik. Vorkurs Programmieren, Geschichte und Begriffsbildung, Automatenentwurf. Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden 2008, 512 Seiten,
- Hromkovic, Juraj: Sieben Wunder der Informatik. Eine Reise an die Grenze des Machbaren mit Aufgaben und Lösungen. Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden 2009, 360 Seiten,
- Hromkovic, Juraj: Einführung in die Programmierung mit Logo. Lehrbuch für Unterricht und Selbststudium. Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden 2010, 272 Seiten,

Wie fördert das ABZ die Jugendlichen?

Das ABZ übernahm die fachliche Betreuung der Informatikolympiade vor vier Jahren. Dabei führen wir ein fortlaufendes, ganzjähriges Training mit mehreren Runden und Trainingscamps durch. Mit zwei Silbermedaillen im Jahr 2008 wurde das Informatikteam das erfolgreichste Schweizer Team auf internationalen Olympiaden.

Gibt es auch öffentliche Veranstaltungen?

Mit öffentlichen Veranstaltungen wie der Open Class „Sieben Wunder der Informatik“ möchte die ETH auf die wissenschaftlichen Beiträge der Informatik hinweisen. Beliebt sind auch die Programmierkurse für Kinder und Erwachsene.

Webseiten

Ausbildungs- und Beratungszentrum für Informatikunterricht
elektronische Tutorate

www.abz.inf.ethz.ch

www.cta.ethz.ch

Kompetenzzentrum für Lehren und Lernen

www.educ.ethz.ch

Lehrdiplom für Maturitätsschulen

www.didaktischeausbildung.ethz.ch

Schweizer Informatik-Olympiade

www soi.ch

Zertifikatslehrgang Informatik für Lehrkräfte

www.inf.ethz.ch/ch/zertifikat

Das Gespräch führte Herbert Bruderer, Mitarbeiter des ABZ.

Gesprächsteilnehmer (für Bildzeile)

Prof. Dr. Juraj Hromkovic, Professor für Informationstechnologie und Ausbildung der ETH Zürich

Bilder: Dieter Seeger

Umfang: 6 400 Anschläge (mit Kästen)

Stand: 10.2.2010

Anlagen:

- Fotos

Maple™ 14 Now Available!

Maple is an essential tool for teachers and students in any mathematical discipline. It lets you explore, visualize, and solve even the most complex mathematical problems, reducing errors and providing greater insight into the math. Maple's intuitive user interface leads the pack among math software, with Clickable Math™ techniques to ensure that students are instantly productive and engaged.


The latest release, Maple 14, introduces the MapleCloud™ Document Exchange, a revolutionary way to create, share, and receive technical documents all within a single integrated environment.

Bring complex problems to life in your classroom!

Request your **free evaluation copy** of Maple 14.

Go to: www.maplesoft.com/switzerland


Maplesoft
Mathematics • Modeling • Simulation

Telephone: (0)445 800 801 

© Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., 2010. Maplesoft, Maple, MapleCloud, and Clickable Math are trademarks of Waterloo Maple Inc. All other trademarks are the property of their respective owners.





Wie stark ist das System?

- Zwei Betrachtungen zur Trisektion des Winkels

Armin P. Barth

Wenigstens teilweise ist die Mathematik mit dem Lösen von Schachproblemen vergleichbar: Eine erlaubte, konsistente Grundstellung soll aufgrund eines entscheidbaren Satzes von Spielregeln in eine klar definierte Endstellung übergeführt werden. Betrachten wir als Beispiel ein simples Wortproblem: Ein *Wort* sei eine endliche Kette von Buchstaben aus der Menge $\{A, B, C, D, E\}$, und $ABCDE$ sei die Grundstellung. Als Spielregeln erlauben wir alle Schritte, bei denen zwei unmittelbar nebeneinander stehende Buchstaben eines Wortes vertauscht werden und das Wort sonst aber keine Änderung erfährt. So wäre also etwa $CADEB \rightarrow CDAEB$ ein gemäss Spielregeln erlaubter Schritt, weil der Wortteil AD eine Vertauschung erfahren hat. Kann die Endstellung $EDCBA$ aus der Grundstellung erreicht werden? Und kann die Endstellung $ACEBC$ erreicht werden?

Grundsätzlich stellt sich bei solchen Problemen die Frage, ob die Spielregeln stark genug sind, damit all das erreicht werden kann, was in einem gewissen Sinne wünschenswert ist. In unserem kleinen Wortproblem etwa ist es natürlich leicht möglich, durch ein paar regelkonforme Vertauschungen die Endstellung $EDCBA$ zu erreichen, aber es ist grundsätzlich unmöglich, die Endposition $ACEBC$ zu generieren, weil sie zwei Buchstaben C enthält, während in der Grundstellung bloss einer vorkommt, und weil die Anzahl Vorkommen eines Buchstabens in diesem System eine Invariante ist.

Die Spielregeln statten das System mit einem gewissen Mass an „Stärke“ aus, und es ist für jedes regelbasierte System – für das kleine Wortproblem ebenso wie für jede streng formalisierte Disziplin der Mathematik – interessant zu ergründen, wie stark es genau ist, wozu es in der Lage ist, und es mindestens genauso interessant zu erforschen, wozu es nicht in der Lage ist.

Ein exzellentes Beispiel hierfür bietet die Dreiteilung des Winkels. Das ist an sich eine banale Sache, doch je nachdem, wie stark die Spielregeln sind, mit denen man das System ausstattet, kann es ein schwieriges oder gar unmögliches Unterfangen sein. Wir stellen im Folgenden zwei Systeme einander gegenüber, das sehr bekannte System der Konstruktion mit Zirkel und Lineal, das nicht mächtig genug ist, um die Trisektion eines beliebigen Winkels zu ermöglichen, und das sicher weniger bekannte System der *Origami-Konstruktion*, in dem die Aufgabe überraschenderweise leicht lösbar ist. Wenn diese Ausführungen einen Wert für die Schule haben sollen, dann vielleicht den, Schülerinnen und Schülern in aller Deutlichkeit vor Augen führen, dass jegliches mathematische Arbeiten innerhalb eines genau abgesteckten Systems (von Definitionen, Axiomen, Regeln und Methoden) stattfindet, dass alle innerhalb des Systems erarbeiteten Erkenntnisse immer relativ zur Ausstattung des Systems gesehen werden müssen und dass die im System zugelassenen Mittel natürlich dessen Wirkungsbereich und somit auch die Menge an möglichen Erkenntnissen begrenzen.

Warum sind Zirkel und Lineal nicht stark genug?

Das Problem der Trisektion eines Winkels geht auf die antiken Griechen zurück und entstand etwa zeitgleich mit zwei anderen berühmten Problemen: der Quadratur des Kreises und dem Delischen Problem¹. Die Spielregeln, die die Griechen zur Lösung dieser Probleme zuließen, sind schnell aufgezählt: Es sind die folgenden (auf einer gegebenen Einheitsstrecke aufbauenden) Konstruktionen mit Zirkel und Lineal:

- Verbinden zweier schon konstruierter Punkte mittels Lineal (und allfällige Verlängerung der Strecke auf beiden Seiten).
- Einen Kreis zeichnen um einen schon konstruierten Punkt als Mittelpunkt mit einem Radius, der durch den Abstand zweier schon konstruierter Punkte bestimmt ist und so in den Zirkel genommen werden kann.
- Konstruktion neuer Punkte als Schnittpunkte von Strecken, Geraden und Kreisen.

¹ Nach einer Legende soll um 430 v. Chr. auf der griechischen Insel Delos die Pest gewütet haben. Das Orakel versprach den Ratsuchenden Abhilfe durch Verdoppelung des (Inhaltes des) würfelförmigen Altars im Tempel des Apoll.

Berechnungen oder der Einsatz eines Massstabes sind in diesem System jedoch untersagt. Allein mit den beschriebenen Mitteln sollten also die erwähnten Probleme gelöst werden. Ist es verwunderlich, dass sich bezüglich der Möglichkeiten eines Systems Beeinträchtigungen ergeben, wenn man seine Mittel stark einschränkt? Eigentlich nicht. Es wundert sich ja auch niemand darüber, dass man mit einer Waschmaschine nicht backen kann. Wenn also als erlaubte Spielregeln ausschliesslich die oben beschriebenen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal zur Verfügung stehen, was für Aufgaben können dann gelöst werden? Es ist ziemlich leicht einzusehen, dass – aufbauend auf einer Strecke der Länge 1 – zu jeder rationalen Zahl eine Strecke entsprechender Länge konstruiert werden kann. Zudem lassen sich Quadratwurzeln konstruieren. In seinem Werk „Theorie der geometrischen Konstruktionen“ (1952) hat Ludwig Bieberbach diese Frage endgültig geklärt, indem er den folgenden Satz bewies:

Satz:

Mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind alle und nur die Punkte, deren Koordinaten in einem gegebenen oder konstruierten rechtwinkligen Koordinatensystem sich durch Quadratwurzelausdrücke aus den Koordinaten der gegebenen Punkte darstellen lassen, das heisst aus ihnen durch die vier Grundrechnungsarten und den Prozess des Quadratwurzelziehens bei endlich oftmaliger Verwendung dieser Operationen gewonnen werden können.

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal vermögen also quadratische Gleichungen zu lösen. Um die Trisektion eines beliebigen Winkels zu schaffen, sind die Möglichkeiten dieses Systems allerdings zu eingeschränkt. Obwohl der dritte Teil bestimmter Winkel (etwa 90° oder 135° usw.) leicht konstruktiv hergestellt werden kann, ist es unmöglich, mit den erlaubten Methoden jeden vorliegenden Winkel zu teilen. Pierre Laurent Wantzel hat 1837 bewiesen, dass es keine Zirkel-und-Lineal – Konstruktion geben kann, die jeden beliebigen Winkel exakt dreiteilt. Die Grundidee eines Beweises sei hier kurz in Erinnerung gerufen:

- Kann man den Cosinus eines Winkels konstruieren, so auch den Winkel selbst, wie man leicht am Einheitskreis erkennt. Wir stellen uns also die Frage, ob es möglich ist, eine Strecke der Länge $\cos(\alpha/3)$ zu konstruieren, wenn α ein gegebener Winkel ist.
- Eine trigonometrische Formel für dreifache Winkel lautet:

$$\cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x).$$

Ersetzen wir x durch $\alpha/3$, so erhalten wir

$$\cos(\alpha) = 4 \cos^3(\alpha/3) - 3 \cos(\alpha/3).$$

- Die Zahl $\cos(\alpha/3)$ ist also Lösung der kubischen Gleichung

$$4u^3 - 3u = a$$

in der Variablen u .

- Man kann nachweisen, dass eine Lösungsformel für diese Gleichung, die für alle Werte von a gelten soll, nicht ohne eine dritte Wurzel auskommen kann.
- Mit Zirkel und Lineal kann man aber keine dritten Wurzeln konstruieren, sondern nur zweite, vierte, usw. Daher ist eine Konstruktion, die jeden beliebigen Winkel dreiteilt, unmöglich.

Insbesondere ist etwa der Winkel 60° nicht konstruktiv dreiteilbar, so dass also das reguläre 9-Eck nicht konstruiert werden kann. Und das ist bei weitem keine Ausnahme, hat Bieberbach doch bewiesen, dass die Menge der dreiteilbaren Winkel abzählbar ist und die Menge der nicht-dreiteilbaren folglich überabzählbar.

Mit Kranichen gegen Leukämie

Wie eingangs bemerkt, entscheiden die Mittel, mit denen man ein System ausstattet, über seine Stärke. Es ist also nicht verwunderlich, dass die Winkeldreiteilung in einem ganz anderen System, das mit anderen Mitteln ausgestattet ist, geschafft werden kann.

Origami ist ein solches System. Die japanische Papierfaltkunst hat eine über 2000 Jahre dauernde Geschichte. Sie hat sich schon vor der Erfindung des Papiers anhand anderer Materialien entwickelt, und lange Zeit war sie (wohl aufgrund des teuren Papiers) nur für zeremonielle Zwecke ausgeführt worden. Beginnend mit einem meist quadratischen Bogen Papier entstehen bei Origami ohne Verwendung von Schere und Klebstoff erstaunliche Kunstwerke wie etwa der traditionelle Kranich.



Abb. 1 Ein Origami-Kranich

Wer 1000 Kraniche faltet, soll nach der Legende bei den Göttern einen Wunsch frei haben. Sadako Sasaki, ein an Leukämie erkranktes Strahlenopfer der Atombombe, musste leider erfahren, dass das bloss eine Legende ist: Sie verstarb trotz massenhaften Faltens von Kranichen, und seither sind Kraniche ein Symbol des Widerstandes gegen Atomkriege. Will man zeigen, dass Origami als System stark genug ist, um einen beliebigen Winkel dreiteilen zu können, muss man erst die im System erlaubten Mittel präzisieren. Konstruktionen bei Origami umfassen grob gesagt alle Konstruktionsschritte, die, beginnend mit den Randstrecken und Eckpunkten oder weiteren auf dem Papier vorgegebenen Punkten und Geraden, durch Anbringen von Faltkanten und Erzeugen weiterer Punkte geleistet werden können. Humiaki Huzita und Koshiro Hatori² haben hierfür ein System von Axiomen aufgestellt:

1. Zu zwei Punkten gibt es eine Faltkante, die die beiden Punkte verbindet.
2. Zu zwei Punkten gibt es eine Faltkante, die den einen auf den anderen Punkt faltet.
3. Zu zwei Geraden gibt es eine Faltkante, die die eine auf die andere faltet.
4. Zu einem Punkt und einer Geraden gibt es eine Faltkante, die senkrecht zur Geraden und durch den Punkt verläuft.
5. Zu zwei Punkten und einer Geraden gibt es eine Faltkante, die den ersten Punkt auf die Gerade faltet und durch den zweiten Punkt führt.
6. Zu zwei Punkten und zwei Geraden gibt es eine Faltkante, die den ersten Punkt auf die erste Gerade und den zweiten Punkt auf die zweite Gerade faltet.
7. Zu einem Punkt und zwei Geraden gibt es eine Faltkante, die den Punkt auf die erste Gerade faltet und die senkrecht zur zweiten Geraden ist.

George Martin hat sogar bewiesen, dass ein einziges Axiom ausreicht, um das System Origami formal zu beschreiben³. Nun, da die Spielregeln bekannt sind, kann man sich fragen, wozu dieses System in der Lage ist. Überraschenderweise ist es in einem gewissen Sinne stärker als das System der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, denn einige der hier beschriebenen Konstruktionsschritte sind mit Zirkel und Lineal nicht ausführbar. Diese grössere Stärke manifestiert sich zum Beispiel darin, dass Origamifaltungen in der Lage sind, die Trisektion des Winkels zu leisten.

Den dritten Teil eines Winkels falten

Die folgende Abbildung zeigt, wie ein auf einem quadratischen Bogen Papier gegebener Winkel in drei gleiche Teile gefaltet werden kann:

1. Bringe den zu teilenden Winkel an.
2. Bringe irgendwo eine horizontale Faltkante AB an. Öffne das Papier danach wieder.
3. Falte die Grundseite auf AB, wodurch die neue Faltkante CD (auf halber Höhe) entsteht. Öffne wieder.
4. Lass die Faltkante s dadurch entstehen, dass E auf CD und gleichzeitig A auf den Winkelschenkel gefaltet wird. Danach nicht entfalten!
5. Bringe diejenige Faltkante an, die die schon existierende und in C endende Kante zu F verlängert.
6. Entfalte nun alles und verlängere die im 5. Schritt erzeugte Faltkante bis zur Ecke E.
7. Falte nun die Grundseite EG auf die Gerade EF. Diese letzte Faltkante zusammen mit der Faltkante EF dritteln den gegebenen Winkel.

² H. Huzita, „Understanding Geometry through Origami Axioms“, in: J. Smith e.a.: Proceedings of the First International Conference on Origami in Education and Therapy (COET91), 1992, British Origami Society

³ G. E. Martin, „Geometric Constructions“, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1997

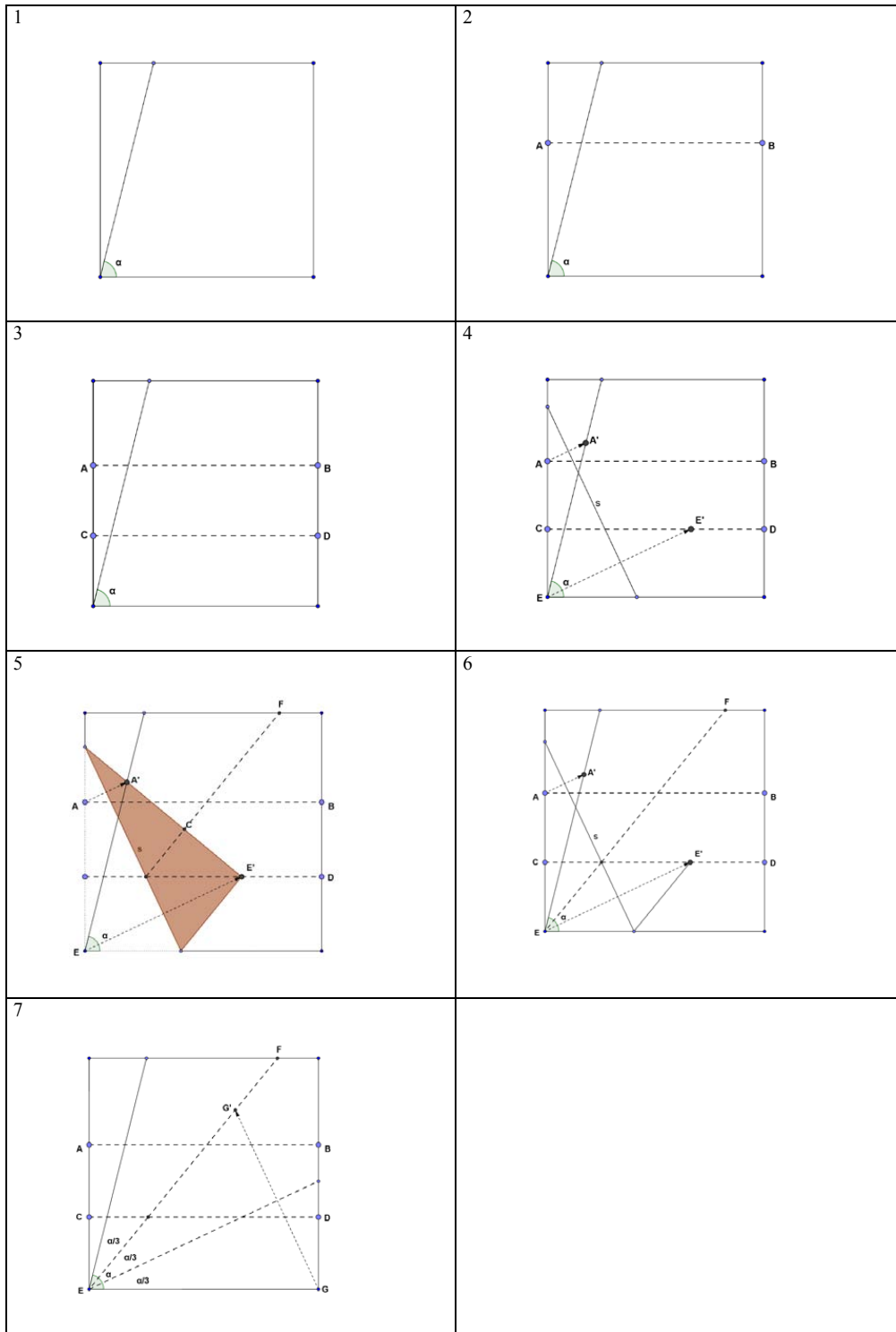
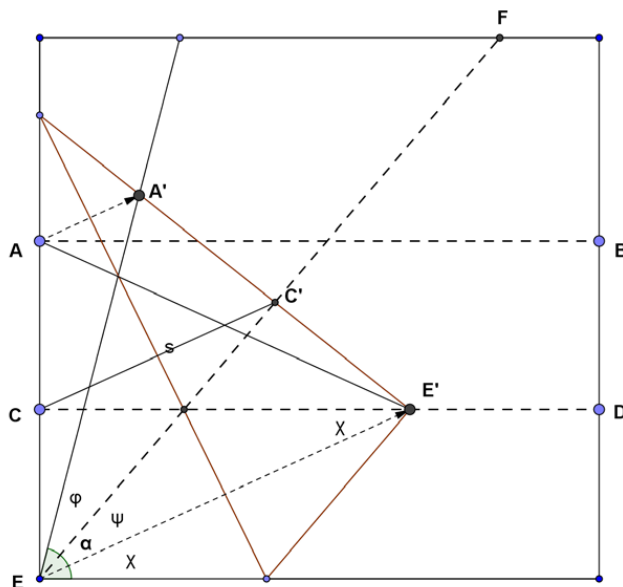


Abb. 2 Mit Origami einen Winkel dreiteilen

Warum entsteht dadurch eine exakte Winkeldreiteilung? Dazu müssen wir nachweisen, dass $\varphi = \psi = \chi$ ist:



Nun, offenbar ist das Dreieck AEE' gleichschenkelig mit $\overline{EA} = \overline{EE'}$, da $E'C$ eine Höhe in diesem Dreieck ist und überdies $\overline{AC} = \overline{CE}$ gilt. Da das Dreieck $A'E'E$ aus dem Dreieck AEE' durch Spiegelung an der Faltkante s hervorgeht, ist auch das Dreieck $A'E'E$ gleichschenkelig mit $\overline{EA'} = \overline{EE'}$. Zudem ist aus demselben Grund EC' eine Höhe in diesem Dreieck, und sie teilt $A'E'$ hälftig. Daher gilt $\varphi = \psi$. Dass überdies $\psi = \chi$ gilt, folgt unmittelbar aus dem letzten Konstruktionsschritt. Daher ist $\varphi = \psi = \chi$.

□

Origami kann jede kubische Gleichung lösen

Was macht das System Origami so stark, dass es ein Problem lösen kann, das mit klassischen Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen nicht gelöst werden kann? Nun, der Hauptunterschied besteht wohl darin, dass das letztgenannte System Quadratwurzel­ausdrücke im Sinne Bieberbachs erzeugt und somit quadratische Gleichungen lösen kann, während Origami in der Lage ist, kubische Gleichungen zu lösen. Das versetzt Origami in die Lage, die Winkeldreiteilung und übrigens auch das Delische Problem zu lösen⁴. Wir wollen hier zeigen, dass zu jeder kubischen Gleichung der Art $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ eine Lösung „erfaltet“ werden kann.

Hier ist der Falt-Algorithmus:

<p>Eine Lösung der kubischen Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ falten:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Markiere auf dem Bogen Papier die Punkte $P_1 = (a/1)$ und $P_2 = (c/b)$. 2. Bringe die Faltkanten $L_1 : y = -1$ und $L_2 : x = -c$ an. 3. Sei $y = tx + u$ die (nach den Axiomen von Huzito-Hatori existierende) Faltkante, die P_1 auf L_1 und gleichzeitig P_2 auf L_2 faltet. Bringe diese Faltkante an. 4. Dann ist t Lösung der obigen kubischen Gleichung.
--

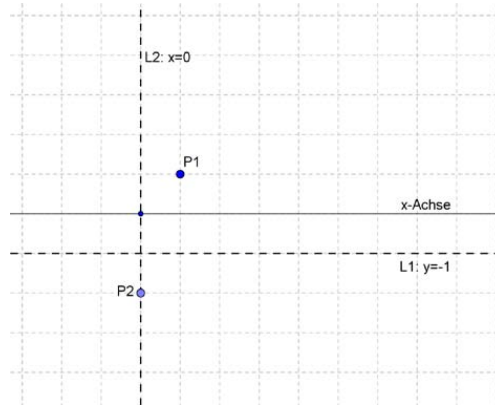
⁴ Da Origami jede kubische Gleichung lösen kann, kann insbesondere die Gleichung $x^3 - 2 = 0$ gelöst werden, und genau das muss ja geschehen, damit das Volumen eines Würfels verdoppelt wird.

Wir wollen das zuerst an einigen Beispielen überprüfen:

a) Die Gleichung $x^3 + x^2 - 2x = 0$ lösen.

Hier ist $a = 1, b = -2, c = 0$, also $P_1 = (1/1), P_2 = (0/-2), L_1 : y = -1$ und $L_2 : x = 0$.

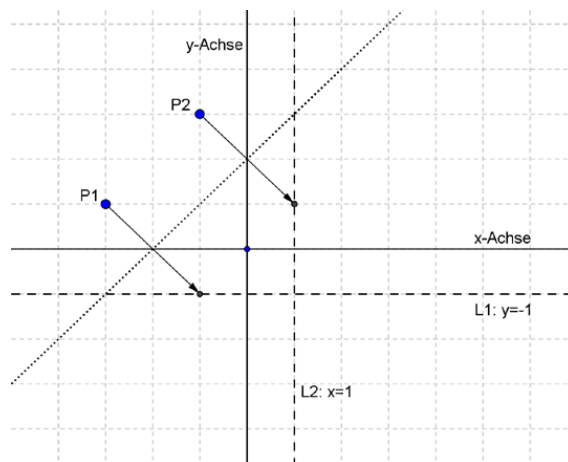
Die Faltkante, die P_1 auf L_1 und P_2 auf L_2 faltet, ist die x -Achse mit Steigung $t=0$. Folglich ist 0 eine Lösung der Gleichung – und das stimmt ja auch.



b) Die Gleichung $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 = 0$ lösen.

Hier ist $a = -3, b = 3, c = -1$, also $P_1 = (-3/1), P_2 = (-1/3), L_1 : y = -1$ und $L_2 : x = 1$.

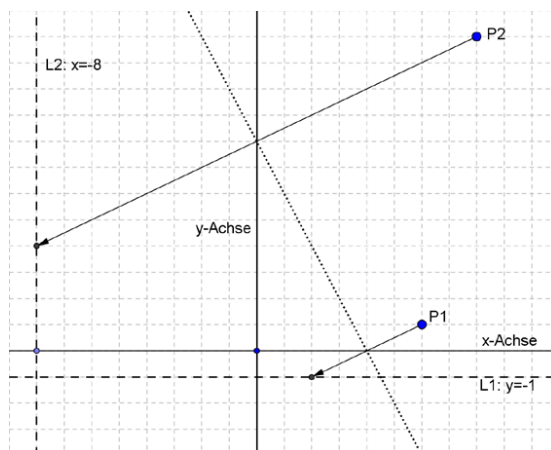
Die Faltkante, die P_1 auf L_1 und P_2 auf L_2 faltet, ist die Gerade $y = x + 2$ mit Steigung $t=1$. Folglich ist 1 eine Lösung der Gleichung – und das stimmt ja auch.



c) Die Gleichung $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^3 = 0$ lösen.

Hier ist $a = 6, b = 12, c = 8$, also $P_1 = (6/1), P_2 = (8/12), L_1 : y = -1$ und $L_2 : x = -8$.

Die Faltkante, die P_1 auf L_1 und P_2 auf L_2 faltet, ist die Gerade $y = -2x + 8$ mit Steigung $t = -2$.
 Folglich ist -2 eine Lösung der Gleichung – und das stimmt ja auch.

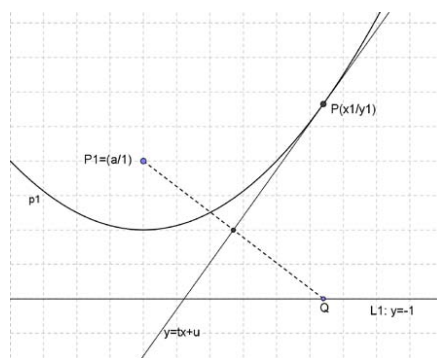


Es bleibt nachzuweisen, dass dieser Falgorithmus zwingend zu einer Lösung der kubischen Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ führt. Das Schöne daran ist, dass wir beim Nachweis zahlreiche Wissens-elemente einsetzen, die im gymnasialen Mathematikunterricht von Bedeutung sind. Daher eignen sich diese Überlegungen überdies zur Repetition von früher Gelerntem.

Zunächst: Bei dieser Konstruktion wird unter anderem der Punkt P_1 auf die horizontale Gerade L_1 gefaltet. Das ist eine Situation, die stark an Parabeln erinnert: Fasst man nämlich P_1 als Fokus und L_1 als Leitgerade einer Parabel auf, so wird die Faltkante eine Tangente an diese Parabel sein. Und da gleichzeitig P_2 auf L_2 gefaltet wird, kann die gesamte Konstruktion aufgefasst werden als das Anbringen der gemeinsamen Tangente an zwei Parabeln. Es ist diese Idee, die bei unserem Vorgehen den Weg leuchtet. Durch die Koordinaten von P_1 und P_2 sowie die Gleichungen von L_1 und L_2 sind die beiden Parabeln bekannt. Die Bedingung, dass die Faltkante eine gemeinsame Tangente ist, wird das gewünschte Resultat hervorbringen.

Betrachten wir zuerst diejenige Parabel p_1 , die P_1 als Fokus und L_1 als Leitgerade hat. Ihre Gleichung ist

$$p_1: y = \frac{1}{4}(x - a)^2 \quad (1)$$



Da P_1 auf L_1 gefaltet wird, ist die Faltkante $y = tx + u$ die Mittelsenkrechte von P_1Q , und diese wiederum ist Tangente an die Parabel p_1 im Punkt $P(x_1 / y_1)$, wobei P und Q dieselbe x -Koordinate haben. Die Steigung t der Faltkante ist gleich

$$t = \frac{d}{dx} p_1(x_1) = \frac{1}{2}(x_1 - a).$$

Und da sie durch den Punkt (x_1 / y_1) führen muss, lautet ihre Gleichung:

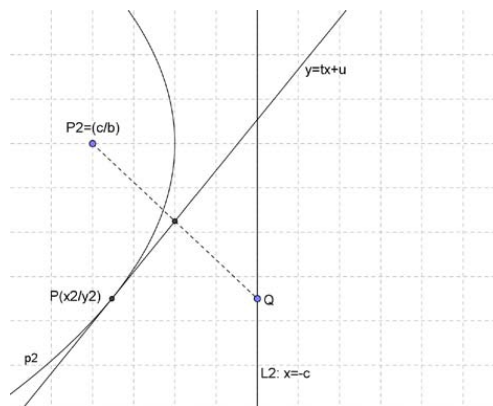
$$y = \underbrace{\frac{x_1 - a}{2}}_t \cdot x + y_1 - \underbrace{\frac{(x_1 - a) \cdot x_1}{2}}_u \quad (2)$$

Einfaches Nachrechnen unter Berücksichtigung von (1) zeigt, dass t und u wie folgt zusammenhängen:

$$u = -t^2 - at \quad (3)$$

Sei nun p_2 diejenige Parabel, die P_2 als Fokus und L_2 als Leitgerade hat. Dazu müssen wir allerdings annehmen, dass $c \neq 0$ ist; der Fall $c = 0$ ist trivial und wird dem Leser überlassen. Die Parabel gehorcht der Gleichung

$$p_2 : x = \frac{1}{4c}(y - b)^2 \quad (4)$$



Da P_2 auf L_2 gefaltet wird, ist die Faltkante $y = tx + u$ die Mittelsenkrechte von P_2Q , und diese wiederum ist Tangente an die Parabel p_2 im Punkt $P(x_2 / y_2)$, wobei P und Q dieselbe y -Koordinate haben. Wegen

$$\frac{d}{dy} p_2(y_2) = \frac{1}{2c}(y_2 - b)$$

ist die Steigung t der Faltkante gleich

$$t = \frac{2c}{y_2 - b}.$$

Und da sie durch den Punkt (x_2 / y_2) führen muss, lautet ihre Gleichung auch so:

$$y = \underbrace{\frac{2c}{y_2 - b}}_t \cdot x + y_2 - \underbrace{\frac{2cx_2}{y_2 - b}}_u \quad (5)$$

Einfaches Nachrechnen zeigt, dass t und u wie folgt zusammenhängen:

$$u = b + \frac{c}{t} \quad (6)$$

Fügt man (3) und (6) zusammen, so findet man schliesslich

$$\begin{aligned} -t^3 - at &= b + \frac{c}{t} \\ \Leftrightarrow -t^3 - at^2 &= bt + c \\ \Leftrightarrow 0 &= t^3 + at^2 + bt + c \end{aligned}$$

Also ist t Lösung unserer kubischen Gleichung. □

Diese Überlegungen machen deutlich, dass all das, was Mathematik kann und was sie nicht kann, stets im Zusammenhang gesehen werden muss mit den Mitteln, mit denen das aktuell benutzte System ausgerüstet wird. Übrigens erscheint Origami höchstens auf den ersten Blick als zwar schöne und reizvolle, aber doch eigentlich nutzlose Kunst. Gerade in den letzten Jahren taten sich ganz unerwartete Anwendungsfelder für die Papierfaltkunst auf. Wann immer ein Objekt an einen Ort transportiert werden soll, wo es eine gewisse Grösse entfalten muss, während es für die Reise dorthin aber klein und kompakt sein muss, ist Origami nicht weit weg. Wenn im Jahr 2014 das *James Webb Space Telescope*, der Nachfolger des *Hubble-Teleskopes*, ins All geschickt werden soll, dann wird der riesige Spiegel nach – allerdings sehr einfacher – Origami-Art gefaltet sein, damit er in die Rakete passt und sich an seinem Bestimmungsort reibungslos entfaltet. Viel raffinierter wird die Faltung bei dem erst projektierten *Eye-glass Telescope* sein, dessen Spiegel nach Entfaltung die Grösse eines Fussballfeldes haben wird. Eine ähnliche Methode wird benutzt, um Solarsegel für den Transport zu falten und um am Computer das schnelle Entfalten und Aufblasen von Airbags zu studieren. (Mehr Details zu diesen Anwendungen finden Sie etwa in den Publikationen von Robert J. Lang oder unter www.langorigami.com.) Zhong You von der Universität Oxford hat einen Stent zur Öffnung von Blutgefässen entwickelt, der sich nach Origami-Art klein faltet für den Transport zur verstopften Stelle und sich dort reibungslos entfaltet, um das Gefäss von innen zu stützen. Diese Beispiele machen deutlich, wie zahlreich und gleichzeitig überraschend die Anwendungen der Mathematik sein können.

Zählen ist Messen in der nullten Dimension Oder: Was macht man mit halben Koordinatenachsen?

Rainer Hauser, Thalwil, Schweiz
(rainer.hauser@gmail.com)

Zusammenfassung

Die Dimension eines Vektorraums ist offensichtlich immer eine ganzzahlige Grösse. Es gibt aber daneben auch eine massstheoretische Definition der Dimension von Räumen und Teilen davon, die über die Selbstähnlichkeit bestimmt ist und zu beliebigen nicht-negativen reellen Zahlen als Dimension einer Punktmenge führen kann. Sie ist so gewählt, dass das Mass einer kompakten, nicht-leeren Punktmenge eine Zahl grösser als Null und kleiner als Unendlich wird. Diese Definition kann durchaus im Unterricht auf gymnasialer Stufe eingeführt und zur Herleitung einiger nicht-trivialer Einsichten verwendet werden. Sie kann auch dazu benutzt werden, um ein vertieftes Verständnis für die Gemeinsamkeiten und Unterschiede von Zählen und Messen als historisch früh entstandene, ursprüngliche mathematischen Tätigkeiten zu gewinnen.

1 Eine Basis aus zweieinhalb Vektoren

Meine Betrachtungen zum Thema Dimension wurden angeregt durch ein Gespräch, das ich vor einem Jahr in einem Bus zwischen zwei Schülern, die vermutlich kurz vor der Matur standen, belauschte. Es ging anfänglich um die vierte Dimension und Folgerungen daraus. Nach einer Pause meinte der eine Schüler plötzlich wahrscheinlich mit Bezug auf eine frühere Diskussion, es sei gar nicht wahr, dass man Zahlen in jedem Fall auf reelle Zahlen erweitern könne, denn die Dimension müsse immer eine ganze Zahl sein.

So unklar mir der Zusammenhang war, in dem diese Behauptung gemacht wurde, so gern hätte ich mich in das Gespräch eingemischt und der Schlussfolgerung widersprochen. Ich tat es dann doch nicht, möchte aber hier darauf eingehen. Eine für die oberen Klassen im Gymnasium taugliche Erklärung dafür, dass die Dimension nicht unbedingt ganzzahlig sein muss, braucht keine komplizierten, mathematisch exakten Definitionen wie etwa die Hausdorff-Dimension, sondern kann mit einfachen, intuitiv verständlichen Mitteln auskommen.

Mit dem Begriff Dimension verbindet man normalerweise die Zahl Eins für eine Gerade, die Zahl Zwei für eine Ebene und die Zahl Drei für den gesamten Raum, der uns umgibt, und den man mathematisch als Vektorraum oder als Euklid'schen Raum modelliert. Diese Vorstellung führt zum n -dimensionalen Raum, den man mit \mathbb{R}^n bezeichnet, der von n Basisvektoren aufgespannt ist, und in dem das kartesische Koordinatensystem mit n senkrecht aufeinander stehenden Achsen bei expliziten Berechnungen hilft. Die Zahl n ist eine natürliche Zahl.

Mathematiker lieben es, Begriffe zu verallgemeinern. So wurden aus den natürlichen Zahlen \mathbb{N} die ganzen Zahlen \mathbb{Z} , die rationalen Zahlen \mathbb{Q} , die reellen Zahlen \mathbb{R} und die komplexen Zahlen \mathbb{C} . Die Multiplikation, die ursprünglich aus der Addition einer Anzahl gleicher Summanden entstand, wie auch die Potenz, die zur Vereinfachung der Schreibweise für die Multiplikation einer Anzahl gleicher Faktoren eingeführt wurde, lösten sich schnell von dieser Abhängigkeit vom Konzept Anzahl und damit auch von den natürlichen Zahlen, sodass Faktoren und Exponenten jetzt beliebige reelle (oder komplexe) Zahlen sein können.

Bleibt man bei der Definition der Dimension im Vektorraum als die Mächtigkeit eines minimalen Erzeugendensystems oder anschaulich als Anzahl Achsen im Koordinatensystem, so kann man sich schwerlich vorstellen,

wie man den Begriff Dimension auf beliebige nicht-negative reelle Zahlen erweitern könnte. Selbst wenn man zum Begriff Matroid als Verallgemeinerung von Vektorräumen und ähnlichen Strukturen in der Graphentheorie übergeht, bleibt die Dimension, die dort Rang heisst, eine natürliche Zahl.

In Euklid'schen Räumen spielen aber nicht nur affine Aspekte wie die lineare Abhängigkeit von komplanaren Vektoren, sondern auch metrische Aspekte wie das Mass einer Punktmenge eine Rolle, und hier ist die Dimension ebenfalls eine wichtige Grösse. Wir sind uns gewohnt, ein Stück Kurve in Meter, ein Stück Fläche in Quadratmeter und ein Stück Raum in Kubikmeter zu messen. Diese masstheoretische Seite des Begriffs Dimension und die obige Definition als Mächtigkeit eines minimalen Erzeugendensystems passen für "normale", zusammenhängende und einfach begrenzte Punktmenge bestens zusammen. Dass man beim Wechsel von der Einheit Meter zur Einheit Dezimeter mit einem Faktor zehn, beim Wechsel von der Einheit Quadratmeter zur Einheit Quadratdezimeter mit einem Faktor hundert und beim Wechsel von der Einheit Kubikmeter zur Einheit Kubikdezimeter mit einem Faktor tausend multiplizieren muss, ist uns selbstverständlich.

2 Balanceakt zwischen Null und Unendlich

Der Unterschied zwischen Länge und Fläche war aber nicht immer so klar. Das englische Mass "Furlong" ist ein Längenmass, das sehr eng mit dem Flächenmass "Acre" verbunden ist. Wenn man einen Acker mit einem Pflug bearbeitet und dabei dafür sorgt, dass alle Furchen den gleichen standardisierten Abstand von einander haben, so ist die Gesamtlänge der Furchen effektiv ein Mass für die Fläche eines Feldes. Im Allgemeinen lassen sich Flächen aber nicht mit einem Längenmass und Längen nicht mit einem Flächenmass messen. Eine Strecke von einem Meter Länge hat die Fläche Null, weil sie beliebig dünn ist, und eine Fläche von einem Quadratmeter hat die Länge Unendlich, weil es eben keinen minimalen Abstand für die Furchen gibt. Deshalb muss man beim Messen aufpassen, dass man die richtige Einheit wählt, um ein brauchbares, endliches Mass zu bekommen. Die Grösse, die uns bei diesem Balanceakt zwischen Null und Unendlich unterstützt, ist wieder die Dimension, diesmal jedoch nicht mehr definiert als Mächtigkeit eines minimalen Erzeugendensystems, sondern durch masstheoretische Überlegungen. Wählen wir sie zu gross, wird das Mass Null. Wählen wir sie hingegen zu klein, wird das Mass Unendlich.

Messen in der Geometrie hat immer etwas mit den Kongruenzabbildungen zu tun. Sind zwei Figuren kongruent, so haben sie das gleiche Mass. Wenn ich einen Meterstab so verschiebe, drehe und – was nicht ganz so einfach, in diesem Fall aber auch gar nicht nötig ist – spiegle, dass er auf dem zu messenden Objekt zu liegen kommt, kann ich dessen Länge ablesen. Hier spielt die Dimension noch keine Rolle. Eine weitere Forderung an das Messen kommt von der Ähnlichkeit. Wenn man eine geometrische Figur vergrössert oder verkleinert, oder wenn man die Einheiten, in denen man misst, anders wählt, so erwartet man, dass sich das Mass entsprechend ändert. Wenn ich etwa die Kanten eines Quaders verzehnfache oder seinen Inhalt in Kubikdezimeter statt Kubikmeter messe, so vertausendfacht sich der für das Volumen gemessene Wert.

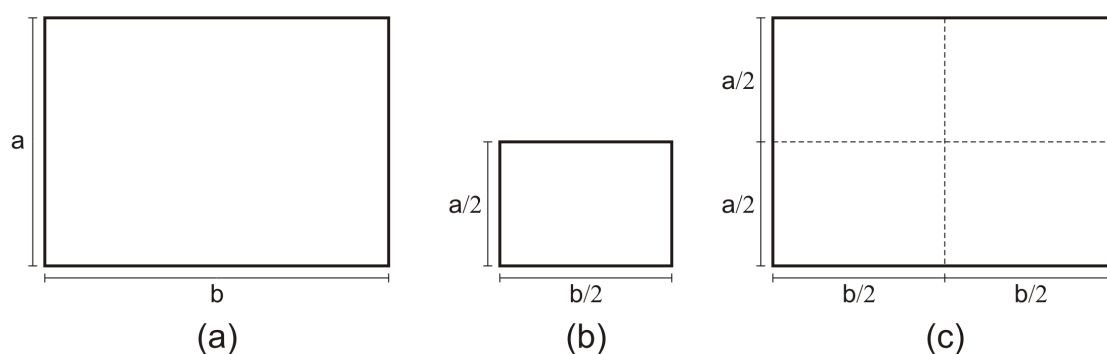


Abbildung 1: Selbstähnlichkeit eines Rechtecks.

Die Abbildung 1 veranschaulicht diesen Vorgang am Beispiel eines Rechtecks, dessen Kanten halbiert wurden. Das ursprüngliche Rechteck mit Seitenlängen a und b ist in Abbildung 1(a) und das verkleinerte Rechteck in Abbildung 1(b) gezeigt. Abbildung 1(c) zeigt, wie man mit vier Kopien des verkleinerten Rechtecks das ursprüngliche Rechteck exakt überdecken kann. Man kann somit erwarten, dass die Fläche des grossen Rechtecks viermal die Fläche des kleinen Rechtecks ist. Das nennt man Selbstähnlichkeit, denn das grosse Rechteck ist zu den vier kleinen Rechtecken – also zu Teilen seiner selbst – ähnlich.

Weil man dasselbe Spiel auch durchführen kann, indem man die Kanten des Rechtecks drittelt, viertelt oder durch irgendeine natürliche Zahl n teilt, statt sie zu halbieren, und man immer noch feststellt, dass die so entstandenen n^2 Rechtecke zum ursprünglichen Rechteck ähnlich sind und dieses exakt überdecken, lässt sich die Gesetzmässigkeit ableiten, dass der Faktor, mit dem sich die Fläche beim Übergang vom grossen Rechteck zu den kleinen Rechtecken verkleinert, gleich dem quadrierten Faktor ist, mit dem sich die Seitenlängen verkleinern. Es gibt also ein vorgegebenes Mass L , mit dem wir lineare Grössen (hier die Seitenlängen) messen, und ein abgeleitetes Mass M , mit dem wir die zu untersuchende Punktmenge (hier die Rechtecksfläche) messen, und diese beiden Grössen hängen durch $M = L^2$ zusammen. Bei einem Quader, dessen Kanten wir in n gleiche Teile zerschneiden, sodass n^3 zum ursprünglichen Quader ähnliche, aber kleinere Quader entstehen, heisst der Zusammenhang $M = L^3$.

Geht man davon aus, dass man als Referenzmass immer ein lineares Mass L – also einen Meterstab zur Messung von Längen – zur Verfügung hat, so kann man diese Formel zu

$$M = L^d \tag{1}$$

für das zu berechnende Mass M und die Dimension d der zu messenden Punktmenge verallgemeinern. Daraus folgt $\log M = d \cdot \log L$ und somit die Gleichung

$$d = \frac{\log M}{\log L} \tag{2}$$

für die Dimension. Diese Gleichung besagt, dass die Dimension eines Rechtecks 2 ist, weil man n^2 kongruente Rechtecke braucht, um daraus ein grosses, zu diesen kleineren Rechtecken ähnliches Rechteck mit n -facher Seitenlänge zu konstruieren, während die Dimension eines Quaders analog 3 ist, weil man n^3 kongruente Quader benötigt, um daraus einen grossen, zu diesen kleineren Quadern ähnlichen Quader mit n -facher Kantenlänge zu fabrizieren.

Für alltägliche geometrische Figuren wie Strecken, Rechtecke und Quader sind die obigen Betrachtungen zwar richtig, machen aber noch nicht wirklich Sinn. Erst wenn man zu anderen Punkt Mengen wie die in der Abbildung 2 gezeigte Kochkurve übergeht, führen sie zu neuen Einsichten.

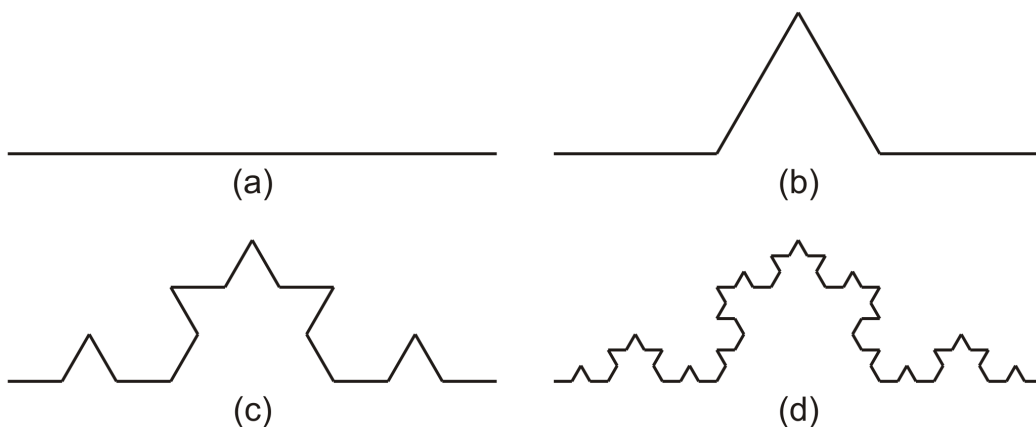


Abbildung 2: Vier Iterationen der Kochkurve.

Die Kochkurve ist das Ergebnis von unendlich vielen Schritten, von denen die ersten vier in Abbildung 2 vorgestellt werden. Man beginnt mit einer Strecke wie in Abbildung 2(a), drittelt sie, ersetzt das mittlere Stück durch zwei Strecken, die gleich lang sind wie das ersetzte Drittel, und bekommt die in Abbildung 2(b) gezeigte Figur. Im nächsten Schritt drittelt man jede der vier Strecken und verfährt gleich wie vorher mit der ursprünglichen Strecke, was zur Figur in Abbildung 2(c) führt. In derselben Weise bekommt man im nächsten Schritt das in Abbildung 2(d) präsentierte Resultat.

Der Grenzwert dieser nicht abbrechenden Konstruktion hat eine unendliche Länge, denn mit jedem Schritt vergrößert sich die Länge um den Faktor $4/3$. (Die Längen bilden also eine geometrische Folge mit einem Quotienten grösser als 1.) Gefühlsmässig würde man aber auch nicht vermuten, dass die resultierende Figur nach unendlich vielen Schritten eine Fläche ist, die man in Quadratmeter messen kann, sondern dass sie die Fläche Null hat. (Die durch die ursprüngliche Strecke nach unten und durch die Kochkurve nach oben begrenzte Fläche lässt sich hingegen messen und hat einen endlichen Wert, wie man unter <http://de.wikipedia.org/wiki/Kochkurve> nachlesen kann.) Trotzdem ist diese aus den Punkten der Kochkurve allein bestehende Punktmenge in gewissem Sinne messbar, wenn man annimmt, dass die beiden Gleichungen (1) und (2) allgemein gelten und eine masstheoretische Grösse namens Dimension definieren.

Hier kommt die Selbstähnlichkeit ins Spiel, die beim Rechteck in der Abbildung 1 zwar ebenfalls existierte, dort aber noch nichts Wesentliches zum Verständnis beitrug. Die ganze Kochkurve ist ähnlich zu jedem der vier Teilkurven, die aus den vier Strecken in der Abbildung 2(b) entstehen. (Es ist zu beachten, dass diese Ähnlichkeit eine Folge der unendlich vielen Konstruktionsschritte ist, denn nach nur endlich vielen Schritten sind die Teile nicht ähnlich zum Ganzen.) Setzt man jetzt aus vier gleichen Kochkurven eine grössere Kochkurve zusammen, deren lineares Mass L – also die Länge vom Punkt ganz links zum Punkt ganz rechts – dreimal so gross ist wie dasjenige der ursprünglichen Kochkurve, so vergrößert sich das Mass M um einen Faktor vier, weil man ja vier gleiche Kochkurven zusammengesetzt hat. Somit berechnet sich die Dimension nach Gleichung (2) zu $d = \log 4 / \log 3 \approx 1.26$.

3 Meter hoch eine gebrochene Zahl

Wir haben in der Kochkurve also ein Beispiel für eine Punktmenge mit einer nicht-ganzzahligen Dimension gefunden. Wird ihre Länge – also ihr lineares Mass – in Meter (m) gemessen, so wird sie selber in der Einheit Meter hoch 1.26 ($m^{1.26}$) gemessen. Darunter kann sich vermutlich kaum jemand konkret etwas vorstellen. Weil 1.26 erstens sowieso nur gerundet und zweitens keine besonders einfache Zahl ist, suchen wir lieber eine Punktmenge mit einer etwas angenehmeren Dimension. Eine solche finden wir in einer Variante der Cantormenge, deren Konstruktionsschritte in der Abbildung 3 gezeigt sind. (Wir haben deshalb nicht die normalerweise als Cantormenge bezeichnete Punktmenge gewählt, weil diese die Dimension $d = \log 2 / \log 3 \approx 0.63$ hat, was ebenfalls keine besonders einfache Zahl ist.)

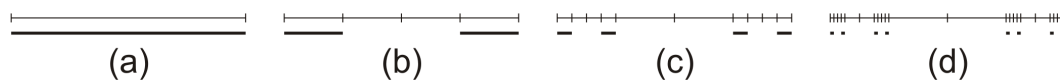


Abbildung 3: Vier Iterationen einer Cantormenge.

Um diese Punktmenge zu konstruieren, beginnt man mit der in Abbildung 3(a) dargestellten Strecke wie bei der Kochkurve, schneidet dann aber nur die mittlere Hälfte davon weg, ohne sie durch etwas zu ersetzen. (Zum besseren Verständnis ist bei den Konstruktionsschritten jeweils ein Massstab über der resultierenden Menge eingezeichnet worden.) Mit den beiden verbleibenden, in Abbildung 3(b) als Resultat dieser Operation gezeigten Strecken verfährt man gleich, erhält die vier in Abbildung 3(c) gezeigten Strecken und schneidet auch bei diesen die mittlere Hälfte weg, sodass die acht bereits sehr kurzen Strecken in Abbildung 3(d) übrig bleiben. Dieser Vorgang wird wie bei der Kochkurve wiederholt, bis nach unendlich vielen Schritten die Cantormenge als Grenzwert übrig bleibt.

Ihre Dimension bestimmt man wie oben. Möchte man aus solchen Mengen eine grössere zusammensetzen, so braucht man zwei und verdoppelt damit das Mass M der Punktmenge, vervierfacht jedoch das lineare Mass L , weil man zwischen die beiden Cantormengen noch zwei gleich lange Stücke ohne Punkte einfügen muss. Die Dimension bestimmt sich wieder aus der Gleichung (2), und wir bekommen $d = \log 2 / \log 4 = 0.5$, was zwar eine hübsche Zahl ist, was es aber immer noch nicht leicht macht, sich mit Hilfe der dazu passenden Cantormenge etwas unter der Einheit Meter hoch ein Zweitel ($m^{1/2}$) vorzustellen.

Um einerseits ein Gefühl dafür zu bekommen, was eine Einheit hoch eine gebrochene Zahl ist, und um andererseits zu überprüfen, ob die masstheoretisch definierte Dimension zu konsistenten Ergebnissen führt und nicht nur eine sinnlose Zahl ist, betrachten wir das Beispiel einer Sierpinski Menge in der Abbildung 4. Bei der Konstruktion solcher Mengen geht man von einem Quadrat aus, das man in n gleich grosse Quadrate zerlegt. Von diesen kleinen Quadraten wählt man eine feste Anzahl und Anordnung aus, die man entfernt, während man die übrig bleibenden Quadrate wieder gleich behandelt wie das ursprüngliche Quadrat. Die Sierpinski Menge ist wie schon bei der Kochkurve und der Cantormenge der Grenzwert dieser Konstruktion nach unendlich vielen Schritten. Sie ist das zweidimensionale Pendant zur eindimensionalen Cantormenge. Bei der Sierpinski Menge in Abbildung 4 ist das ursprüngliche, in Abbildung 4(a) vorgestellte Quadrat in vier kleinere Quadrate zerlegt worden, von denen wie in Abbildung 4(b) gezeigt die Quadrate oben links und unten rechts entfernt werden. Mit den verbleibenden beiden Quadraten verfährt man gleich und erhält nach einem weiteren Schritt beziehungsweise nach zwei weiteren Schritten die Situationen in den Abbildungen 4(c) und 4(d).

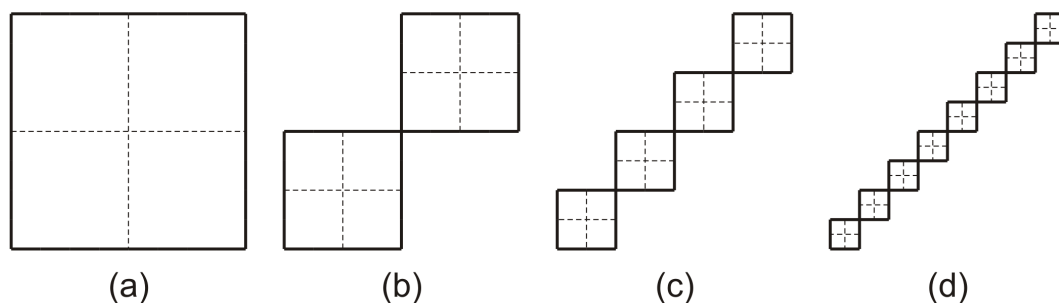


Abbildung 4: Vier Iterationen einer Sierpinski Menge.

Um aus solchen Mengen eine grössere zu konstruieren, braucht man zwei dieser Mengen, sodass $M = 2$ gilt, und man verdoppelt dabei die Länge, sodass auch $L = 2$ gilt. Entsprechend ist die Dimension $d = 1$. Das scheint vernünftig, denn das Resultat nach endlich vielen Schritten sieht wie eine digitalisierte Strecke aus, sodass es nachvollziehbar ist, dass der Grenzwert eine Strecke der Dimension 1 ist. Es gibt natürlich noch andere Sierpinski Mengen mit derselben Dimension. Teilt man beispielsweise das ursprüngliche Quadrat wie ein Schachbrett in n^2 Quadrate und behält n irgendwie angeordnete Felder, so hat die resultierende Sierpinski Menge zwar ebenfalls die Dimension 1, sieht aber im Allgemeinen nicht mehr wie eine Strecke aus.

Wir sind uns gewohnt, den Meter als grundlegendes Mass für Längen, Quadrat- und Kubikmeter aber als abgeleitete Masse für Flächen und Volumen zu sehen. Hätte ein Volk jedoch nicht erst ein Mass für Längen, sondern direkt ein Mass für Flächen erfunden, weil nur die gerechte Verteilung von Ackerland von Interesse war, Längen aber niemand brauchte, liesse sich die Gleichung (2) immer noch anwenden, wobei L als Referenzmass jetzt ein Flächenmass wäre. (Man kann sich vorstellen, dass Flächen durch normierte, quadratische Platten gemessen werden.) Die Sierpinski Menge in Abbildung 4 hätte dann die Dimension $d = 1/2$, weil sich die Fläche L als Referenzmass vervierfacht, während sich das Mass M nur verdoppelt. Auch das macht Sinn, denn gemessen in Aren mit $1a = 100m^2$ sind $10m = 1a^{1/2}$. In gleicher Weise kann man aus dem Liter als Hohlmass mit $1dm = 1l^{1/3}$ ein Längenmass gewinnen. Das sind zwei Beispiele von Einheiten hoch einen Bruch, die man bis zu einem gewissen Grad verstehen kann.

4 Zählen und Messen

Nicht nur bei der vierten Dimension, die mathematisch interessierte Menschen wie die beiden von mir im Bus belauschten Schüler nach wie vor fasziniert, sondern auch bei chaotischen Punktmengen mit irgendwelchen Werten für die Dimension kommt die menschliche Vorstellungskraft, wie wir gesehen haben, schnell an ihre Grenzen. Nur Strecken als eindimensionale und einfach berandete Flächen und Körper als zwei- und dreidimensionale Objekte sind uns geläufig. Wie steht es aber mit dem Punkt als nulldimensionalem Objekt? Mit dieser Frage wollen wir uns zum Schluss befassen.

Weil jede von Null verschiedene Grösse hoch Null immer Eins ergibt, muss auch für Einheiten wie Meter, Kilometer und Millimeter $m^0 = km^0 = mm^0 = 1$ gelten. Das heisst aber, in der nullten Dimension verschwinden die Einheiten. Wegen Gleichung (1) ist das Mass M eines Punktes unabhängig von L immer 1. Weil sich die Masse disjunkter Punktmengen bei der Vereinigung addieren, und weil je aus einem einzelnen Punkt bestehende Punktmengen genau dann disjunkt sind, wenn die Punkte verschieden sind, ist Zählen Messen in der nullten Dimension, und das Mass von n verschiedenen Punkten ist einfach die Anzahl n . Die Kardinalität übernimmt somit – für endliche Punktmengen – die Rolle des Masses. Als zwar verwandte, aber doch verschiedene Tätigkeiten haben sich Zählen und Messen in der Geschichte teils recht unterschiedlich entwickelt, wie man in *How Mathematics Happened – The First 50,000 Years* von Peter S. Rudman (Prometheus Books, Amherst, 2007) nachlesen kann. Dazu gab es aber keinen Grund, denn Zählen ist so betrachtet einfach eine Form von Messen. Praktisch mag das keine allzu nützliche Erkenntnis sein, interessant ist sie allemal.

Die geometrisch echte Ausgleichsgerade

Peter Gallin, Universität Zürich

1 Einleitung

Gegeben sind in der xy -Ebene n Punkte $P_i(x_i/y_i)$ mit den Koordinaten (x_1, x_2, \dots, x_n) und (y_1, y_2, \dots, y_n) . Im Stochastikunterricht des Gymnasiums¹ berechnet man normalerweise die Gleichung der sogenannten Ausgleichsgeraden, indem man sie durch $y - \bar{y} = m(x - \bar{x})$ ansetzt, wobei die Mittelwerte $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ und $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ die Koordinaten des Schwerpunkts $S(\bar{x}/\bar{y})$ aller n Punkte liefern. Durch den plausiblen Trick, die Ausgleichsgerade durch den Schwerpunkt laufen zu lassen, vermeidet man das in der Hochschule übliche Verfahren, bei dem die Ausgleichsgerade durch die Gleichung $y = mx + q$ angesetzt wird und damit zwei Unbekannte m und q zu bestimmen sind, was auf das Differenzieren einer Funktion mit zwei Variablen hinausläuft.

2 Die normale Ausgleichsgerade

Das entscheidende Kriterium für die Festlegung der Ausgleichsgeraden ist das Minimum einer Summe von Abstandsquadraten. Dabei berechnet man üblicherweise die **vertikalen**, also in y -Richtung gemessenen Abstände der n Punkte von der Geraden. Dies liefert die folgende zu minimierende Funktion $f(m)$:

$$f(m) = \sum_{i=1}^n (y_i - (\bar{y} + m(x_i - \bar{x})))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y} - mx_i + m\bar{x})^2$$

Durch mechanisches Ausmultiplizieren des Quadrats mit vier Summanden erhält man wohl am schnellsten — sicher nicht am elegantesten — eine vereinfachte Form für $f(m)$:

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 + n\bar{y}^2 + m^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + nm^2\bar{x}^2 - 2\bar{y} \sum_{i=1}^n y_i - 2m \sum_{i=1}^n x_i y_i + 2m\bar{x} \sum_{i=1}^n y_i + 2m\bar{y} \sum_{i=1}^n x_i - 2nm\bar{x}\bar{y} - 2m^2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i$$

Ersetzen wir hier die Summen $\sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}$ und $\sum_{i=1}^n y_i = n\bar{y}$, so erhalten wir:

$$f(m) = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 + m^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - nm^2\bar{x}^2 - 2m \sum_{i=1}^n x_i y_i + 2nm\bar{x}\bar{y}$$

Kürzen wir schliesslich noch mittels der Varianzen² $\sigma_x^2 = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2)$ und $\sigma_y^2 = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2)$, sowie der Kovarianz $c_{xy} = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y})$ ab, so ergibt sich:

$$f(m) = n(\sigma_y^2 + m^2\sigma_x^2 - 2mc_{xy})$$

Über das Nullsetzen der Ableitung ergibt sich derjenige Wert von m , der f minimal macht:

$$f'(m) = n(2m\sigma_x^2 - 2c_{xy}) \stackrel{!}{=} 0 \quad \implies \quad m = \frac{c_{xy}}{\sigma_x^2}$$

Dass wir mit diesem Extremum tatsächlich ein Minimum erhalten haben, lässt sich aufgrund der nach oben offenen parabolischen Gestalt des Graphen von $f(m)$ sofort einsehen. So zeigt sich im Nachhinein der Vorteil von diesem nicht-elegantem Bestimmen der vereinfachten Form von $f(m)$, anstatt gleich mit der ersten Form von $f(m)$ ins Ableiten einzusteigen.

¹Robert Ineichen, Hansjürg Stocker: Stochastik. Einführung in die elementare Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Rieber Verlag Luzern 2007, 11. unveränd. Auflage, ISBN: 3723900429.

²Es ist hier unerheblich, ob man durch n oder $n-1$ teilt.

3 Die Ausgleichsgerade der schräg gemessenen Abstandsquadrate

Nun haben meine Schüler aufgrund der geometrischen Fragestellung zurecht beanstandet, dass es sehr willkürlich sei, die vertikalen Abstände zu betrachten. Auch die horizontalen Abstände könnte man ja analog behandeln, was aber an der ungerechten Behandlung der Variablen x und y nichts ändert. Einige schlugen vor, dass man die Summe der horizontalen und vertikalen Abstandsquadrate minimieren sollte, was aber — wegen dem Auftreten der Steigung $\frac{1}{m}$ — auf ein Problem 4. Grades in m führte und nicht befriedigte. So versuchten wir die wirklichen, schräg gemessenen Abstände der Punkte von der Ausgleichsgeraden zu betrachten. (Dass dies bei stochastischen Fragestellungen nicht sinnvoll ist, wurde diskutiert.) Damit war eine willkommene Gelegenheit gekommen, die Hessesche Normalform der Geradengleichung zu repetieren oder ein zweites Mal herzuleiten. Es ist nämlich dank Ähnlichkeit von Steigungsdreiecken offensichtlich, dass man den vertikalen Abstand eines Punktes von einer Geraden mit Steigung m nur durch $\sqrt{1+m^2}$ dividieren muss, um den schräg gemessenen Abstand zu erhalten. Damit ergibt sich die neue zu minimierende Funktion $g(m)$ direkt aus der Funktion $f(m)$:

$$g(m) = \frac{1}{(\sqrt{1+m^2})^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y} - mx_i + m\bar{x})^2 = \frac{n}{(1+m^2)} (\sigma_y^2 + m^2\sigma_x^2 - 2mc_{xy})$$

Erst beim Ableiten wird der Unterschied grösser:

$$g'(m) = \frac{n}{(1+m^2)^2} \left((2m\sigma_x^2 - 2c_{xy})(1+m^2) - (\sigma_y^2 + m^2\sigma_x^2 - 2mc_{xy}) \cdot 2m \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\implies (m\sigma_x^2 - c_{xy})(1+m^2) = m\sigma_y^2 + m^3\sigma_x^2 - 2m^2c_{xy}$$

In dieser Gleichung fällt die dritte Potenz von m weg und wir erhalten eine quadratische Gleichung in m :

$$m^2c_{xy} + m(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) - c_{xy} = 0$$

$$m_{1/2} = \frac{\sigma_y^2 - \sigma_x^2 \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \sqrt{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2 + 4c_{xy}^2}}{2c_{xy}} .$$

Da das Vorzeichen von m gleich dem Vorzeichen von c_{xy} sein muss, muss der Zähler positiv sein, und damit gilt nur das Pluszeichen vor der Wurzel. In der Tat rechnet man nach, dass $g''(m_1) > 0$ und $g''(m_2) < 0$. Ausserdem kann man nachweisen, dass beim Berechnen von $\frac{1}{m_1}$ (natürlich nach Erweitern mit dem konjugierten Wurzelterm) in der obigen Formel genau x und y vertauscht werden, womit also vollständige Gerechtigkeit unter den Variablen x und y nachgewiesen ist. Abschliessend sei angemerkt, dass man unter dem Stichwort „orthogonal regression“ einiges zu diesem Thema im Internet findet.

4 Beispiel

Will man durch die Punkte $P_1(1/1)$, $P_2(3/1)$, $P_3(4/3)$ und $P_4(5/4)$ und deren Schwerpunkt $S(\frac{13}{4}/\frac{9}{4})$ die **normale** Ausgleichsgerade g_{nv} mit minimaler vertikaler Abstandsquadratsumme legen, berechnet man

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{4} (51 - 4 \cdot (\frac{13}{4})^2) = \frac{35}{16} \quad \text{und} \quad c_{xy} = \frac{1}{4} (36 - 4 \cdot \frac{13}{4} \cdot \frac{9}{4}) = \frac{27}{16} .$$

Daraus ergibt sich die Steigung $m_v = \frac{c_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{27}{35} \approx 0.7714$ und die Gleichung der Geraden g_{nv}

$$g_{nv} : \quad y = \frac{27}{35} \cdot (x - \frac{13}{4}) + \frac{9}{4} = \frac{27}{35}x - \frac{9}{35} .$$

Will man die horizontale Abstandsquadratsumme minimieren, berechnet man zusätzlich

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{4} (27 - 4 \cdot (\frac{9}{4})^2) = \frac{27}{16} .$$

Dies liefert die Steigung $m_h = \frac{\sigma_y^2}{c_{xy}} = 1$ und die Gleichung der Geraden g_{nh} :

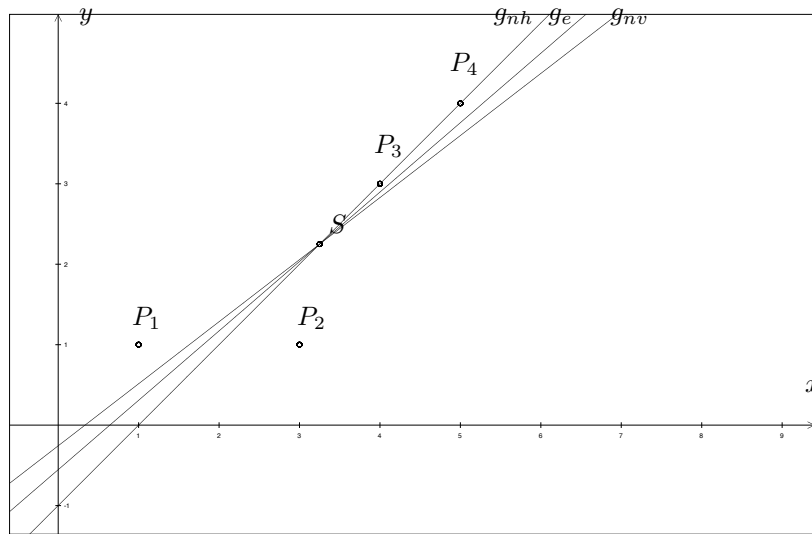
$$g_{nh} : y = 1 \cdot \left(x - \frac{13}{4}\right) + \frac{9}{4} = x - 1$$

Berechnen wir aus $16\sigma_x^2 = 35$, $16\sigma_y^2 = 27$ und $16c_{xy} = 27$ die Steigung m_1 , so erhalten wir

$$m_1 = \frac{-8 + \sqrt{64 + 4 \cdot 27^2}}{2 \cdot 27} = \frac{-4 + \sqrt{745}}{27} \approx 0.862766$$

und die Gleichung der „echten“ Ausgleichsgeraden g_e , welche „zwischen“ den anderen beiden liegt:

$$g_e : y = \frac{-4 + \sqrt{745}}{27} \cdot \left(x - \frac{13}{4}\right) + \frac{9}{4} \approx 0.86x - 0.55 .$$



Anwendungsorientierte Mathematik: Von Daten zur Funktion *Eine Einführung in die mathematische Modellbildung für Lehramtsstudierende*, J. Engel, [Mathematik für das Lehramt], 468 Seiten, CHF ??, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2010, ISBN 978-3-540-89086-7

Jede Epoche kennt Werkzeuge, die für die Mathematik relevant werden, sowohl für deren Anwendung als auch deren Vermittlung. Planimetrie, Konstruktionsaufgaben, Zirkel und Lineal sind ein Beispiel, das zeigt, wie Unterricht oft wesentlich mitbestimmt wird durch Denk- und Handlungsweisen, die sich auf Werkzeuge beziehen und sich in der Bewältigung von Problemen messen lassen wollen. Nostalgisch erscheinen Rechenschieber, Logarithmentafel und Formelsammlung neben Papier und Bleistift als Metaphern für die Werkzeuge der Schulanalyse von damals.

Der vorliegende Text von J. Engel zeigt das Potential des Computereinsatzes im Unterricht ab der Sekundarstufe I. Der Computer ist einerseits Rechenknecht, der prinzipiell verstandene Operationen ausführt, aber auch Kommunikationshilfe beim Beschaffen von Daten im Internet, Multimediagerät bei der Darstellung von Ergebnissen oder in der Vermittlung von Sachverhalten, Plattform für reale oder virtuelle Experimente oder für die Auswertung von echten Daten mit entsprechender Software, insbesondere auch Freeware.

Ein Kernanliegen des Autors ist es, Mathematik im Bezug zur Lebenswelt der Unterrichteten erlebbar werden zu lassen. Aufgaben mit erfundenen Einkleidungen und fiktiven Daten, deren einziger Zweck ist, ein Dressurkunststücklein abzurufen, sind zwar in den Schulen noch weit verbreitet. Solche Aufgaben aus einer heilen Schulwelt gaukeln Modellbildung vor, statt sie zu vermitteln, denn sie lassen die Widersprüche zur Realität nie ernsthaft in Erscheinung treten. Mit Widersprüchen muss sich Modellbildung aber auseinandersetzen. Engel erweitert den Horizont, indem er zeigt, wie aus echten Daten Funktionen werden können, die bedeutungsvolle Informationen kodieren und die man mit Methoden der Statistik, der Analysis oder der Linearen Algebra entschlüsseln, weiterverarbeiten und zur Modellierung benutzen kann. Die Daten selbst können aus wissenschaftlichen Datenbanken, aus der Zeitung, aus eigenen Versuchen oder aus jenen im Unterricht eines beliebigen Faches stammen. Diese Offenheit ist wesentlich für die wirklichkeitsbezogene Modellierung. Ohne Computer wäre das Sammeln, Aufbereiten, Auswerten, Komprimieren, Prüfen, Umformen oder Darstellen der Daten in der verfügbaren Unterrichtszeit nicht zu leisten. Die Unterrichtspraxis belegt, dass die Bedienung der zeitgenössischen Hilfsmittel bei der Datenerfassung, z.B. bei der Auswertung von Videoaufzeichnungen zwar Hindernisse erzeugen kann, öfter aber auch Motivation und Erfolgsfaktoren, weil diese Mittel den Realitätsbezug erlebbar machen und der i-pod-Generation oft schon vertraut sind.

Engel setzt der Kritik von Freudenthal [*Wenn man im traditionellen Mathematikunterricht schon Anwendungsmöglichkeiten berührt, so geschieht das immer nach dem Muster der anti-didaktischen Umkehrung.*] sein Konzept der Verwendung realer, nicht nur realistischer Daten entgegen. Technologieeinsatz ist im Verständnis des Autors immer unterstützend und nicht Selbstzweck im Unterricht. Er setzt folglich von den Unterrichtenden Bereitschaft voraus, sich mit Technologieeinsatz jenseits von Zirkel, Lineal und Taschenrechner zu befassen.

Der Text gliedert sich in

1. Mathematikanwendung als Modellbildung, insbesondere Modellieren funktionaler Abhängigkeiten.
2. Standardmodelle und Naturgesetz: Die Gliederung nach verschiedenen Funktionstypen zeigt mathematische Zusammenhänge mit Systematik auf, die den Unterricht ab der Sekundarstufe I strukturieren könnte. Die sprechenden Beispiele bieten Gelegenheit,

Modellbildung zu üben und anhand echter Phänomene Modelle zu bewerten. Eindrücklich ist, wie Engel es schafft, an Beispielen auf vielfältige Art lernen zu lassen.

3. Lass die Daten Sprechen: Es werden verschiedene Methoden erklärt, um aus diskreten Daten Funktionen zu erzeugen: Interpolationen, Splines.
4. Die Grenzen des Wachstums: Verschiedene Populationsmodelle werden wiederum je nach Modellannahmen systematisch entwickelt und anhand von Daten kritisch bewertet. Diskretes Wachstum, logistische Differenzgleichung, gekoppelte Populationen und stetige Modellierung gekoppelter Systeme sind das Gerüst im Aufbau.
5. Verrauschte Signale und funktionale Modelle: Was ist Rauschen, was ist Signal und wie lässt sich die Botschaft vom Lärm trennen? Regressionen und im allgemeinen parametrische Kurvenanpassung.
6. Durch Glätten der Daten zur Funktion
7. Nichtparametrische Methoden zum Kurvenschätzen

Eine Beschreibung der Datensätze und Anmerkungen zur Software runden den Text ab. Die Gestaltung ist vorzüglich gelungen. Die Vielzahl der Beispiele mit echten Daten, den zugehörigen Grafiken und Auswertungen ist überzeugend.

Erfahrung zeigt, dass es realistisch ist, auch im gymnasialen Unterricht mindestens die ersten vier Kapitel als Grundmuster für den Unterricht zu verwenden. Gerade im Zusammenhang mit Unterrichtsprojekten (u.a. Maturaarbeiten) ist es sehr zu begrüßen, dass weitergehende statistische oder numerische Methoden nun auch in die Lehrerbildung einbezogen werden. Ferner zeigt der Text, dass die unvernetzte systematische Gliederung des Unterrichtes in Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik einem wenig tauglichen Konzept entspricht. Engel zeigt klar, wie eine Verflechtung von Analysis mit Numerik oder mit linearer Algebra oder Stochastik sich auch im Gymnasium bewerkstelligen lässt, ohne dass ein Chaos angerichtet wird. Dabei wird der Mathematikunterricht durch den Computer gerade nicht trivialisiert, sondern durch neuartige Perspektiven und Einsichten bereichert.

Ich wünsche diesem Text die verdiente grosse Verbreitung, damit er jene Breitenwirkung entfalten kann, die nötig ist, um den allgemeinbildenden und grundlegenden Mathematikunterricht den Bedürfnissen und Möglichkeiten des Informationszeitalters gerecht werden zu lassen.

H.R. Schneebeli, Wettingen

Bericht zur Maturarbeit

Populationen im Wettstreit

H.R. Schneeбели, Kantonsschule Baden

Problembeschreibung

Wir stellen uns eine Insel vor, auf der sich Hasen und Füchse vermehren. Das ist die klassische Räuber-Beute-Situation. Man geht dann davon aus, dass die Füchse den Bestand der Hasen dezimieren, bis Futtermangel zur Abnahme des Fuchsbestandes führt. In den entsprechenden Differenzgleichungen (oder auch Differentialgleichungen) wird die Grösse des Konfliktpotenzials zwischen den H Hasen und den F Füchsen proportional zum Produkt $p = H \cdot F$ angenommen, weil es zwischen H Hasen und F Füchsen p Zweierbegegnungen gibt. Für die kleine hypothetische Insel ist diese Modellvorstellung üblich und brauchbar, aber wie steht es, wenn man alle Füchse und alle Hasen Nordamerikas betrachtet? Hier kann kein Fuchs alle Hasen bedrohen und eine Begegnung zwischen Hase und Fuchs beansprucht eine gewisse Zeit, so dass p das tatsächliche Konfliktpotential gewaltig überschätzt. Diese Schwachstelle betrifft die meisten einfacheren oder gar naiven Populations- und Epidemiemodelle.

Zwei Schüler, M und F, interessierten sich für Populationsmodelle, sie möchten nach der Matur Biologie studieren. Ihre Maturarbeit hatte zum Ziel, neue Wege zu erkunden, um Populationen im Wettstreit so modellieren, dass das Modell skalierbar ist von der “kleinen Insel” bis zum “Kontinent” oder von der Grippe im Sportlager bis zur Pandemie.

Ergebnisse und Erfahrungen

M und F haben verschiedene Modellsituationen analysiert, in denen das Konfliktpotential *nicht* durch das Produkt der Bestände in den konkurrierenden Populationen ausgedrückt wird, zum Beispiel beim Kampf der Wölfe gegen eine Büffelherde. Da die Wölfe eine Herde nur am Rand angreifen, befinden sich von den B Büffeln bloss eine Zahl b proportional zu \sqrt{B} in Reichweite der Wölfe. Oder beim Angriff von F Falken auf einen Schwarm von T Tauben erwischt jeder Falke nur die Tiere am Rand also etwa $T^{2/3} < T$ und die Gesamtzahl der Beute ist pro Tag begrenzt durch eine Zahl proportional zu F , weil der Falke pro Tag nicht mehr Tauben schlägt, als er zum Überleben benötigt.

Die mathematischen Modelle von M und F wurden als Differenzgleichungen formuliert und mit Taschenrechner und PC numerisch bearbeitet. Die Ergebnisse liessen sich dann als Grafiken ausgeben. Nicht alle Modellansätze waren erfolgreich. Aber die Beschäftigung mit eigenen Modellen und die gegenseitige Kritik hat dazu geführt, dass beide Schüler Fortschritte gemacht haben im Entwickeln von mathematischen Modellen, im Programmieren (sie haben Python kennen gelernt) und im Verfassen eines auch von Aussenstehenden lesbaren Schlussberichtes.

Die grössten Schwachstellen waren letztlich sprachlicher und formaler Art. Der Zeitbedarf für die bereinigte Schlussfassung des Berichtes wurde grob unterschätzt. M und F waren in der Maturarbeit erstmals mit der Aufgabe konfrontiert, einen grösseren Text zu zweit kooperativ zu bewältigen.

Bemerkungen

Die Arbeit wurde betreut von Dana Bulaty (Klassenlehrerin und Grundlagenfach M) und Hansruedi Schneebe (Ergänzungsfach AM).

Das Thema ist bei weitem nicht ausgeschöpft. Ein besonderes Problem ist die Schätzung von realistischen Modellparametern. Dank gewissen Normierungen lassen sich qualitative Untersuchungen anstellen, auch wenn nicht alle Parameter bekannt sind: Gibt es im Modell (oder in der Simulation) anziehende Fixpunkte oder stabile Zyklen?

Ich kenne keine biologische oder medizinische Hintergrundtheorie, die es gestatten würde, Modelle aus grundlegenden Prinzipien und oder gar Axiomen zu entwickeln. Das ist eine Chance für die Schüler, denn sie haben viel mehr Narrenfreiheit als bei physikalischen Modellen, die ihnen entsprechende Fachkenntnisse abverlangen würden. Das schliesst aber nicht aus, dass sie die Gedankenschritte sorgfältig dokumentieren und die Ergebnisse kritisch prüfen sollen. M und F haben gelegentlich verschiedene Alternativen unabhängig von einander verfolgt, um ihre Ergebnisse gegenseitig zu testen. Schliesslich haben sie sich in einfachen Fällen auch an ein Modell für den Verlauf von Infektionskrankheiten mit Differentialgleichungen gewagt und es mit dem CAS-Rechner und in Python numerisch bearbeitet.

Neulich ist ein sehr nützlicher Text erschienen, der Untersuchungen in der von M und F gemachten Art stark unterstützen könnte. Die beiden Autoren haben praktische Erfahrung in biomedizinischen Anwendungen der Mathematik. Ihr Buch ist streng methodisch gegliedert, didaktisch ausgezeichnet konzipiert und benutzerfreundlich. Es enthält eine Fülle von Anregungen für Maturarbeiten.

Literatur: Belinda Barness and Glenn Robert Fulford, *Mathematical Modelling With Case Studies, A Differential Equations Approach Using Maple and Matlab*, 2nd Edition, CRC-Press, ISBN 978-1-4200-8348-4

Ein ganz anderer Ansatz könnte durch stochastische Simulation auf der Basis von Zufallsgraphen versucht werden.

Wenn Sie Fragen haben, so freue ich mich auf ein mail.

schneebe@othello.ch

Schule von Schülern für Schüler

Andreas Nüesch, a.nuesch@intergga.ch

Das Gymnasium Oberwil/BL ist eine Schule mit knapp 900 Schülerinnen und Schülern, von denen etwa drei Viertel das Gymnasium und ein Viertel die FMS besuchen. In den letzten Jahren hat es sich gezeigt, dass einige Schülerinnen und Schüler beim Eintritt in unsere Schule grosse Lücken in Mathematik aufweisen, die zum Teil davon herrühren, dass sie nicht die übliche Vorbildung an der Sek I besucht haben. Um den Einstieg etwas zu erleichtern, haben wir vor zwei Jahren begonnen, unter dem Namen “Mathe-Refresh” einen Kurs anzubieten, in dem die Erstklässler der Matur- und Fachmaturitätsabteilung die wichtigsten Themengebiete des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I repetieren können.

Das Besondere dabei ist, dass wir Mathematiklehrkräfte geeignete Schülerinnen und Schüler der dritten Klassen anfragen, ob sie die Kurse leiten möchten. Wir geben die zu behandelnden Themen vor und beraten die Leiterinnen und Leiter bei auftretenden Problemen.

Die Art der Durchführung stösst auf allen Seiten auf positives Echo - nicht nur, weil die Leiterinnen und Leiter die Möglichkeit erhalten, Grundkenntnisse in Mathematik wieder aufzufrischen; es hat sich auch gezeigt, dass ihnen - aus Erfahrung am eigenen Leib - die Schwierigkeiten der Erstklässler vertraut sind und sie auf diese Weise gut auf deren Probleme eingehen können.

Das Projekt besteht aus insgesamt zehn Doppelstunden, die jeweils am (schulfreien) Samstagmorgen im Zeitraum von September bis November stattfinden. Letztes Jahr war das Interesse besonders gross. Etwa ein Drittel aller 1. Klässler meldete sich an, wir führten zwei Gym-Kurse und einen FMS-Kurs von je 20 bis 24 Schülerinnen und Schülern. Für jeden Kurs sind drei bis vier Personen verantwortlich, von denen jeweils mindestens zwei anwesend sein müssen.

Interessant sei – so berichteten die Leiterinnen und Leiter – den Mathematikunterricht einmal aus der Perspektive der Lehrkraft kennen zu lernen, und insbesondere das Gefühl, nicht nur über einen längeren Zeitraum vor einer Klasse zu stehen, sondern auch ein Stück weit die Verantwortung für die Schülerinnen und Schüler resp. für deren Probleme zu tragen.

Die Leiterinnen und Leiter werden zu einem für Nachhilfestunden üblichen Tarif entschädigt, die Kursteilnehmenden werden ab nächstes Jahr ein Kursgeld bezahlen müssen.



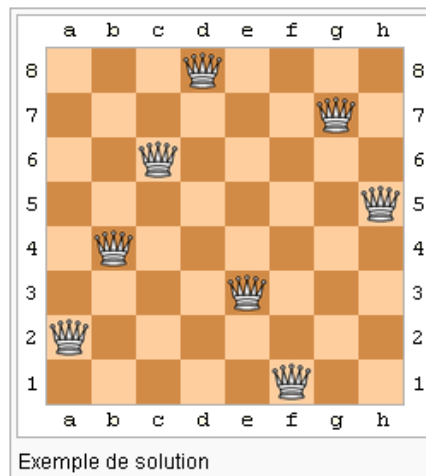
Le problème des n dames pour illustrer les métaheuristiques

par Didier Müller, Lycée cantonal de Porrentruy

Le but du *problème des huit dames* est de placer huit dames d'un jeu d'échecs sur un échiquier de 8×8 cases sans que les dames se menacent mutuellement, conformément aux règles du jeu d'échecs. Par conséquent, deux dames ne devront jamais partager la même rangée, colonne, ou diagonale.

Le problème des n dames est une généralisation de ce problème classique : on considère un échiquier $n \times n$ au lieu d'un échiquier 8×8 . Bien que ce ne soit pas à proprement parlé un problème d'optimisation, il présente de nombreux avantages :

- il est visuel et facile à comprendre ;
- on peut coder la position des dames très simplement : pour chaque colonne, on note sur quelle ligne se trouve la dame. Par exemple, la position ci-contre sera notée $[2, 4, 6, 8, 3, 1, 7, 5]$;
- on passe très facilement d'une configuration à une configuration voisine : il suffit d'échanger deux colonnes. Une position voisine (mais qui ne satisfait pas forcément les contraintes) de celle ci-contre est par exemple $[2, 1, 6, 8, 3, 4, 7, 5]$.



On peut le traiter comme un problème d'optimisation si l'on considère qu'il faut minimiser le nombre de conflits (on parlera de *conflit* quand deux dames se menacent mutuellement). Il s'agira ici de placer n dames sur l'échiquier $n \times n$, sans aucun conflit, en partant d'une solution avec une seule dame par ligne et par colonne (par exemple toutes les dames sur la diagonale) et en échangeant deux colonnes. On ne cherchera pas toutes les solutions possibles : une seule nous suffira. Notons que dans un problème d'optimisation classique, il n'y a en général qu'une seule meilleure solution. Ici il y en a plusieurs.

Il est à noter qu'il existe un algorithme permettant de trouver une solution quel que soit n supérieur à 3.

1. soit $r = n \bmod 12$
2. écrire les nombres pairs de 2 à n
3. si $r = 3$ ou $r = 9$ mettre le 2 à la fin de la liste
4. écrire ensuite les nombres impairs de 1 à n , mais si $r=8$ permuter les nombres impairs 2 par 2 (i.e. 3, 1, 7, 5, 11, 9, ...)
5. si $r = 2$, permuter les places de 1 et 3, puis mettre 5 à la fin de la liste
6. si $r = 3$ ou $r = 9$, mettre 1 puis 3 en fin de liste

Ainsi, pour $n=8$ on obtient la position $[2, 4, 6, 8, 3, 1, 7, 5]$. C'est la position qui est illustrée ci-dessus.

Pour $n=14$, on aura la solution $[2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 3, 1, 7, 9, 11, 13, 5]$.

Pour $n=15$, on aura la solution $[4, 6, 8, 10, 12, 14, 2, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 1, 3]$.

L'intérêt de l'exercice n'est donc pas de trouver une solution, mais d'illustrer sur ce problème classique comment se comportent deux des métaheuristiques les plus connues : la *recherche avec tabous* et le *recuit simulé*.

Première approche : descente de plus grande pente

À partir d'une position donnée, essayer toutes les permutations de deux colonnes et échanger les deux colonnes qui permettent de diminuer le plus le nombre de conflits.
Répéter le processus jusqu'à avoir 0 conflit (dans l'idéal) ou un blocage.

Résultats avec la descente de plus grande pente

Nombre de dames (n)	20	40	60	80	100
Temps ou nombre de conflits restants	2 conflits	13 sec.	1 conflit	418 sec.	1308 sec.

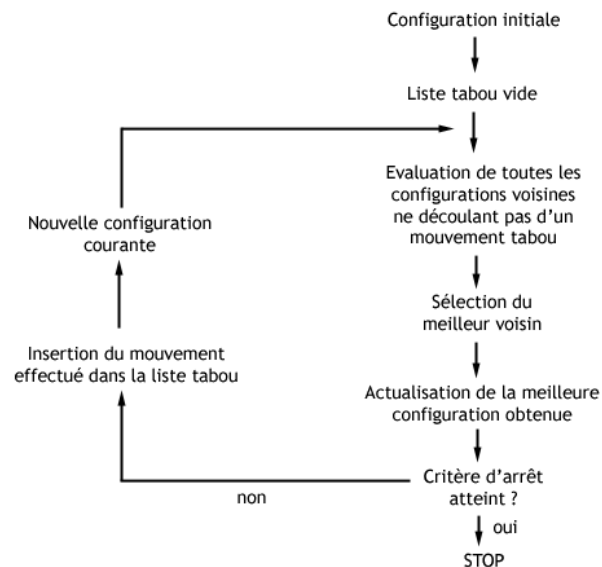
Commentaires

- Selon la position initiale et le nombre de dames, il arrive que l'algorithme se bloque dans un minimum local. C'est arrivé ici avec 20 et 60 dames placées au départ sur la diagonale.
- Avec 100 dames, on passe d'une situation avec 4950 conflits à une configuration sans conflit en 82 échanges de colonnes.
- Les temps sont seulement indicatifs et dépendent évidemment de l'ordinateur utilisé. Toutes les expériences ont été faites sur le même ordinateur et dans les mêmes conditions.

Deuxième approche : recherche avec tabous

La *méthode taboue* est une métaheuristique d'optimisation présentée par Fred Glover en 1986. On trouve souvent l'appellation « recherche avec tabous » en français.

La méthode taboue consiste, à partir d'une position donnée, à explorer le voisinage et à choisir la position dans ce voisinage qui minimise la fonction objectif (comme dans la descente de plus grande pente). Il est essentiel de noter que cette opération peut conduire à dégrader la valeur de la fonction : c'est le cas lorsque tous les points du voisinage ont une valeur plus élevée. Le risque est qu'à l'étape suivante, on retombe dans le minimum local auquel on vient d'échapper. C'est pourquoi il faut que l'heuristique ait de la mémoire : le mécanisme consiste à interdire (d'où le nom de « tabou ») de revenir sur les dernières positions explorées.



Les positions déjà explorées sont conservées dans une file FIFO (First In First Out), souvent appelée liste des tabous, d'une taille donnée. Cette file doit conserver des positions complètes, mais cela ne pose pas de problèmes avec les n dames. Pour nos expériences, nous avons utilisé une liste de 10 mouvements tabous.

Résultats avec la méthode taboue

Nombre de dames (n)	20	40	60	80	100
Temps ou nombre de conflits restants	1 sec.	15 sec.	114 sec.	422 sec.	1756 sec.

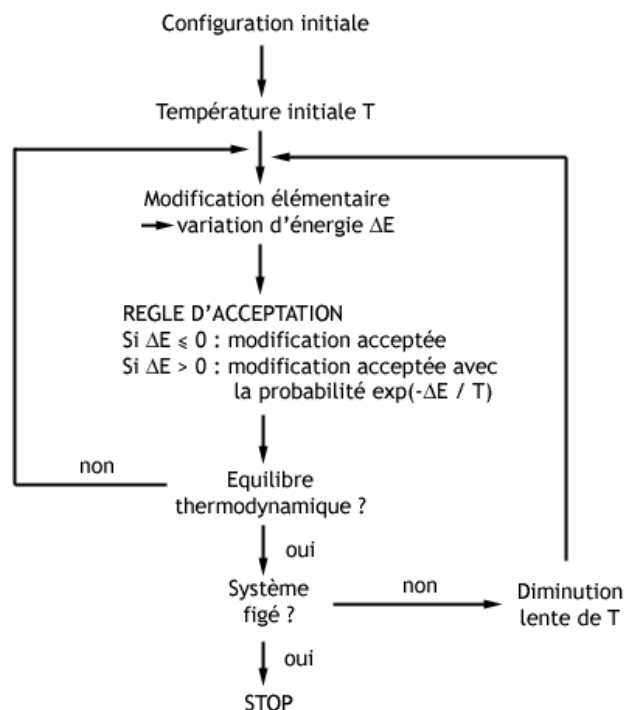
Commentaires

- Le programme ne se bloque plus dans un minimum local.
- La solution finale est toujours la même et dépend de la position initiale.
- Avec 100 dames, on passe d'une situation avec 4950 conflits à une configuration sans conflit en 95 échanges de deux colonnes.

Troisième approche : recuit simulé

Le recuit simulé (*Simulated Annealing* en anglais) est une métaheuristique inspirée d'un processus utilisé en métallurgie. Ce processus alterne des cycles de refroidissement lent et de réchauffage (recuit) qui tendent à minimiser l'énergie du matériau. Elle est aujourd'hui utilisée en optimisation pour trouver les extrema d'une fonction.

Elle a été mise au point par trois chercheurs de la société IBM, S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt et M.P. Vecchi en 1983, et indépendamment par V. Cerny en 1985.



Ce qu'on appelle « modification élémentaire » dans ce schéma consistera simplement à échanger deux colonnes choisies aléatoirement.

L'énergie sera dans notre problème le nombre de conflits.

Le réglage des paramètres est ici plus délicat. En particulier, comment faut-il faire baisser la température ? Trop vite, on risque de se bloquer dans un minimum local. Trop lentement, le temps de calcul augmentera, sans garantie de trouver une solution.

La solution retenue a été de faire baisser la température par palier de longueur 10, avec une température initiale $T=100$, avec $T_{k+1} = 0.6 \cdot T_k$, k représentant un numéro de palier. C'est très inhabituel, car on prend généralement un coefficient proche de 1.

Résultats avec le recuit simulé

Nombre de dames (n)	20	40	60	80	100
Temps moyen en cas de succès*	0.3 sec.	1.5 sec	4 sec.	9 sec.	23 sec.
Nombre de succès sur 10 essais	7	10	10	10	10

*Il s'agit d'une moyenne sur 10 essais, puisque le hasard joue ici un rôle important. Les temps des essais où l'on n'a pas trouvé de solution n'ont pas été pris en compte.

Commentaires

- Étant donné l'usage du hasard, on ne sait pas quelle solution finale sera trouvée. Ce ne sera pas toujours la même, contrairement à la recherche avec tabous.
- Curieusement, le recuit simulé marche le moins bien quand il y a peu de dames (7 succès seulement avec 20 dames).
- Il est par contre redoutable en temps de calcul, puisqu'il ne lui faut que 23 secondes pour trouver une solution avec 100 dames, alors que la méthode taboue en mettait 1756.

Conclusion

J'ai conçu cette leçon sur les métaheuristiques dans le cadre de l'OC informatique, mais elle peut aussi être utilisées en maths appliquées. Ce sont les élèves qui ont cherché (et trouvé) les paramètres les plus efficaces, en particulier pour le recuit simulé.

J'ai aussi essayé de trouver une solution à l'aide d'un algorithme génétique, mais, pour l'instant, les résultats sont très décevants : cela ne marche quasiment jamais si l'on a plus de 16 dames. Cependant, les n dames permettent d'expliquer concrètement comment fonctionne cette métaheuristique.

Références

- **Le problème des n dames**, <http://www.apprendre-en-ligne.net/OCinfo/algo/ndames.html> ; le mot de passe pour accéder aux programmes est « xxd »
- Wikipedia : **Eight Queens Problem**, http://en.wikipedia.org/wiki/Eight_queens_puzzle

Gebrochener Stab

Martin Lieberherr

Mathematisch Naturwissenschaftliches Gymnasium Rämibühl, 8001 Zürich

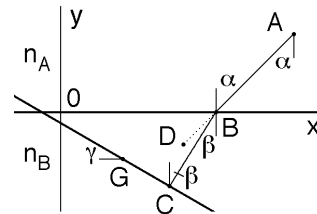
Einleitung

Hält man einen geraden Wanderstab in einen spiegelglatten, klaren Bergsee, so schaut der Stock geknickt aus. Wir wissen natürlich, dass dieser Knick nur ein scheinbarer ist, da er durch Brechung von Licht verursacht wird. Der Anteil des Stabes unter dem Wasserspiegel schaut einigermassen gerade aus. Scheint das nur so oder ist das virtuelle Bild in Wirklichkeit krumm?

Theorie

Wir modellieren den Stab als Gerade, welche die Wasseroberfläche durchstösst (Abb. 1).

Abb. 1: Der Stab wird als Gerade durch Punkt G mit Steigungswinkel γ modelliert. Bei A befindet sich das Auge das in Richtung α blickt. Der "Sehstrahl" trifft bei B aufs Wasser und wird gebrochen. Der "gebrochene Sehstrahl" trifft bei C auf den Stab. Das virtuelle Bild D liegt in der Verlängerung der Blickrichtung.



Das virtuelle Bild des Stabes wird in der Verlängerung der Blickrichtung gesehen. Um seine Lage zu berechnen, legen wir über das ganze ein Koordinatensystem mit x-Achse auf der Wasseroberfläche und y-Achse senkrecht dazu. Alles spiele sich in der (xy)-Ebene ab. Der Stock werde als Gerade durch den Punkt $G(x_G, y_G)$ mit Steigungswinkel γ modelliert:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{pmatrix}$$

Die parametrische Darstellung ermöglicht es, die Gerade problemlos horizontal oder vertikal zu legen. In Abbildung 1 wurde $\gamma = -\pi/6$ gewählt.

Vom Augenzentrum $A(x_A, y_A)$ wird in Richtung α geblickt. Die Wahl des Winkels passt zum Brechungsgesetz. Vom Auge geht ein "Sehstrahl" mit folgender Darstellung aus:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Für Abb. 1 ist $\alpha = +\pi/4$ gewählt worden. Der Begriff "Sehstrahl" erinnert an aristotelische Physik, aber das Licht läuft natürlich in umgekehrter Richtung. Der "Sehstrahl" trifft bei $B(x_B, y_B)$ auf das Wasser:

$$y_B = 0 \Rightarrow x_B = x_A - y_A \tan \alpha$$

An dieser Stelle wird der "Sehstrahl" gebrochen; Einfallswinkel α und Brechungswinkel β sind durch das Snellius'sche Brechungsgesetz verknüpft:

$$n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta$$

Der von B ausgehende, gebrochene "Sehstrahl" hat die Darstellung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix}$$

Wird der gebrochene "Sehstrahl" mit der Geraden (Stock) geschnitten, so erhält man

$$\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} + t_C \cdot \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad t_C = \frac{(x_B - x_G) \cos \beta - (y_B - y_G) \sin \beta}{\cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma}$$

Jetzt kennen wir die Stelle C(x_C, y_C) auf dem Stab, dessen Bild in der Blickrichtung gesehen wird. Um die genaue Position des Bildes D zu berechnen, verfolgen wir Lichtstrahlen, die von C ausgehend zum Auge A laufen. Das erste Stück von C zur Brechungsstelle B hat folgende, schon fast bekannte Darstellung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix}$$

Dieser Lichtstrahl trifft bei B auf die Wasseroberfläche:

$$y_B = 0 \Rightarrow x_B = x_C - y_C \tan \beta$$

Der gebrochene Lichtstrahl hat dann die Darstellung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{respektive mit dem Winkel } \beta \text{ in Wasser:}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C - y_C \tan \beta \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} n_B \sin(\beta)/n_A \\ \sqrt{1 - (n_B \sin(\beta)/n_A)^2} \end{pmatrix}$$

Eliminiert man r aus dieser parametrischen Geradengleichung, so folgt:

$$y = \frac{x - x_B}{\tan \alpha} = \frac{x - x_C + y_C \tan \beta}{\tan(\arcsin(n_B \sin(\beta)/n_A))}$$

Wir haben nun die Gleichung des gebrochenen Lichtstrahls als Funktion des Winkels β , unter dem er bei C ausgestrahlt wird (und das Auge trifft). Erhöhen wir nun β ein klein wenig, so erhalten wir einen benachbarten Strahl. Die rückwärtigen Verlängerungen dieses benachbarten Strahles und des ursprünglichen Strahls schneiden sich im virtuellen Bildpunkt D:

$$y(x, \beta) = y(x, \beta + d\beta) \Rightarrow 0 = y(x, \beta + d\beta) - y(x, \beta) \Rightarrow 0 = \frac{dy(x, \beta)}{d\beta}$$

$$\frac{d}{d\beta} \left(\frac{x - x_B}{\tan \alpha} \right) = 0 \Rightarrow -\frac{dx_B}{d\beta} \tan \alpha - (x - x_B) \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{d\alpha}{d\beta} = 0 \quad \text{wobei}$$

$$\text{mit } \frac{dx_B}{d\beta} = -\frac{y_C}{\cos^2 \beta} \quad \text{und} \quad n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta \Rightarrow n_A \cos \alpha \cdot \frac{d\alpha}{d\beta} = n_B \cos \beta \quad \text{folgt}$$

$$\frac{y_C}{\cos^2 \beta} \tan \alpha - (x - x_B) \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{n_B \cos \beta}{n_A \cos \alpha} = 0 \quad \text{und damit}$$

$$x_D = x_B + y_C \tan \alpha \frac{n_A \cos^3 \alpha}{n_B \cos^3 \beta} \quad \text{sowie} \quad y_D = y_C \frac{n_A \cos^3 \alpha}{n_B \cos^3 \beta}$$

Ausgerüstet mit diesem Algorithmus kann man für jede Blickrichtung ausrechnen, wo das virtuelle Bild des Stockes liegt.

Virtuelle Bilder

Der im vorangehenden Abschnitt dargestellte Algorithmus lässt sich relativ einfach auf einem Rechner in Bilder umsetzen. In den folgenden Abbildungen wurde das virtuelle Bild des Stocks für verschiedene Blickrichtungen berechnet. Die Bildpunkte sind durch eine Linie mit den entsprechenden Gegenstandspunkten auf dem Stab verknüpft.

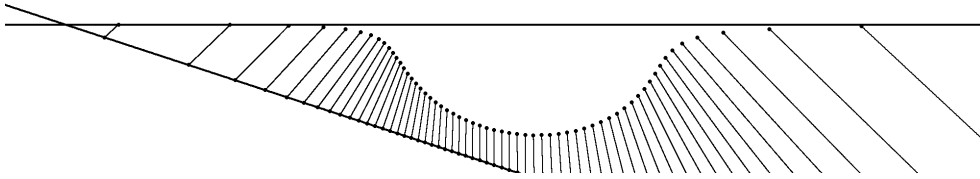


Abbildung 2: Virtuelles Bild eines geraden Stabes, der schräg ins Wasser gesteckt und von oben betrachtet wird. Das Auge (fetter Punkt) schwebt in der Mitte über dem Wasserspiegel (horizontale Linie). Für verschiedene Blickrichtungen wurde die Lage des virtuellen Bildes (fette Punkte) berechnet und der Bildpunkt mit dem entsprechenden Gegenstandspunkt auf dem Stock verbunden.

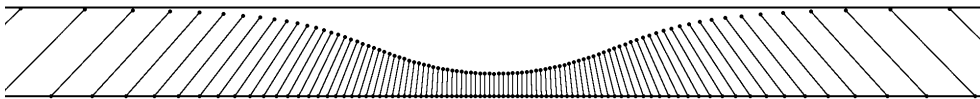


Abb. 3: Virtuelles Bild eines geraden Stabes, der parallel zum Wasserspiegel untergetaucht ist. Die vom Auge weit entfernten Verbindungslinien Bild-Gegenstand werden asymptotisch parallel und laufen unter dem Grenzwinkel der Totalreflexion. Schaut man in ein Schwimmbecken, so scheinen die Bodenmarkierungen nach oben gebogen zu sein.

Abb. 4: Virtuelles Bild eines Stabes, der vertikal ins Wasser gehalten wird. Diese Situation entspricht etwa der, wenn man hüfttief im Wasser steht, sich etwas nach vorne beugt und die Beine betrachtet. Das virtuelle Bild der Beine scheint verkürzt und etwas nach vorne abgknickt zu sein.

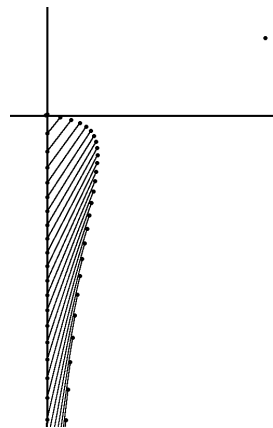
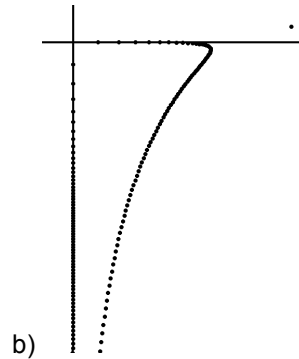
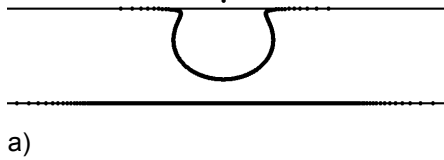


Abb. 5a (unten) wie Abb. 3 und 5b (rechts) wie Abb. 4, aber mit dem Auge näher am Wasser.



Zum Schluss noch die Situation "Stock ins Wasser stecken":

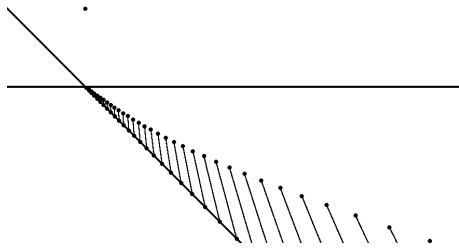


Abb. 6: Virtuelles Bild eines geraden Stabes, der schräg ins Wasser getaucht wird. Das Auge (fetter Punkt) befindet sich direkt über der Eintauchstelle. Das virtuelle Bild des geraden Stocks ist also leicht krumm.

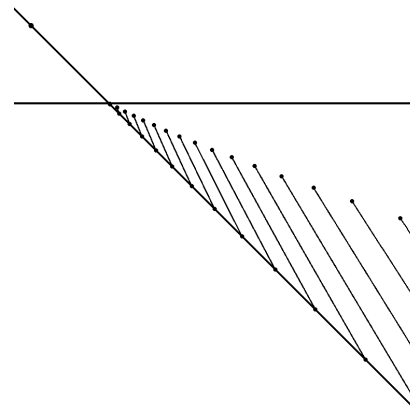


Abb. 7: Virtuelles Bild eines geraden Stabes, der schräg ins Wasser getaucht wird. Das Auge (fetter Punkt) befindet sich in der Verlängerung des Stocks. Das virtuelle Bild ist leicht gekrümmt.

Experiment

Ich klebte ein Papier mit Punkten an die Rückseite eines Aquariums aus dünnem Kunststoff (Abb. 8). Die schwarzen Punkte hatten Abstand 10.0 mm (Periode). Durch das Wasser gesehen erscheinen die Punkte deutlich grösser und näher.

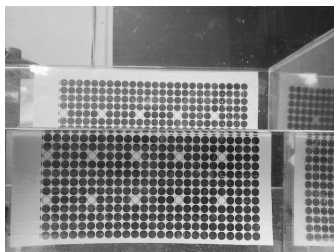


Abb. 8a: Blatt mit Punktmuster, das an der äusseren Rückwand eines Aquariums klebt.

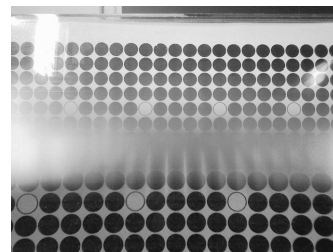


Abb. 8b: Wie 8a, aber mit der Kamera direkt an der Vorderwand des Aquariums.

In Abbildung 8b wird das Punktmuster durch 20 cm Luft (oben) und durch 20 cm Wasser (unten) gesehen. Unter der Wasserlinie ist das Muster im Bildzentrum rund 1.34 ± 0.02 Mal grösser als über der Wasserlinie. Um denselben Faktor scheint das Muster unten näher zu sein. Diesen Effekt nennt man Bildhebung und der erwähnte Faktor ist natürlich der Brechungsindex von Wasser (zumindest in guter Näherung). Am Rand des Bildfelds ist die Vergrößerung noch stärker, wie man auch nach Abbildung 3 erwarten würde.

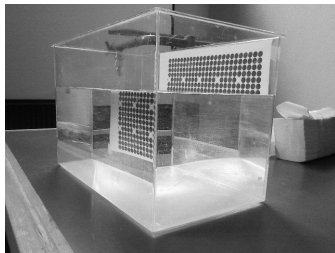


Abb. 9: Schräger Blick aufs Aquarium. Durch das Wasser gesehen ist das Bild sowohl näher am Auge als auch näher an der Wasseroberfläche (= Aquarium-Vorderwand). Das Aquarium ist 39 cm lang, 20 cm breit und 25 cm hoch. Das Wasser steht 17 cm hoch.

In Abb. 9 schaut man schräg auf das Aquarium. Das Punktmuster scheint durch das Wasser gesehen näher an der Vorderseite des Aquariums zu sein. Bei diesem flachen Blickwinkel ist die Vergrößerung nicht mehr so stark wie in Abb. 8b.

Leider hat meine Handykamera kein Weitwinkelobjektiv, eine Photographie wie in Abbildung 5a war nicht möglich. Mit einer besseren Kamera sollte auch eine dreidimensionale Vermessung des virtuellen Bildes möglich sein. So musste ich es bei einer rein visuellen Kontrolle an den Aquarien unserer Schule bewenden lassen.

Physik und Medizin

Eine Plakatserie der DPK für Interdisziplinarität im Physikunterricht

Physik ist seit jeher ein Fach, das sich auszeichnet für interdisziplinäre Unterrichtsformen eignet, und kann daher die Forderung, dass Interdisziplinarität im gymnasialen Unterricht vermittelt wird (MAR Art. 11: „dass die Schülerinnen und Schüler mit fächerübergreifenden Arbeitsweisen vertraut sind“), bestens erfüllen. Die vorliegende Plakatserie zeigt am Beispiel der medizinischen Bildgebung die Notwendigkeit und den Zweck interdisziplinären Arbeitens auf. Bei den Erklärungen wird auf gymnasialen Unterrichtsstoff aus verschiedenen Fächern (hauptsächlich Physik) abgestützt.

Die Entwicklung und die Anwendung dieser bildgebenden Techniken in der Medizin erfordert ein hohes Mass an Interdisziplinarität und Austausch zwischen verschiedensten wissenschaftlichen Fachgebieten. Diese Tatsache widerspiegelt sich auf den Plakaten beim Erklären der Techniken. So werden die Schülerinnen und Schüler mit grundlegenden Stoffgebieten aus der Physik, der Chemie, der Biologie und der Mathematik konfrontiert:

Um das Auflösungsvermögen beim Ultraschall zu verstehen, wird die Wellengleichung herangezogen und für eine typische Frequenz und Grössenordnung berechnet. Es kommen dabei Begriffe wie Reflexion, Brechung, Impedanz und Intensität vor. Natürlicherweise wird auch die Exponentialfunktion erwähnt und verwendet, so z.B. bei der Absorption von Wellen und beim radioaktiven Zerfall. Weitere erwähnenswerte Gebiete sind Dopplereffekt, Antimaterie, Strahlenbelastung, Fourier Transformation, Piezoelektrizität, elektromagnetisches Spektrum usw.

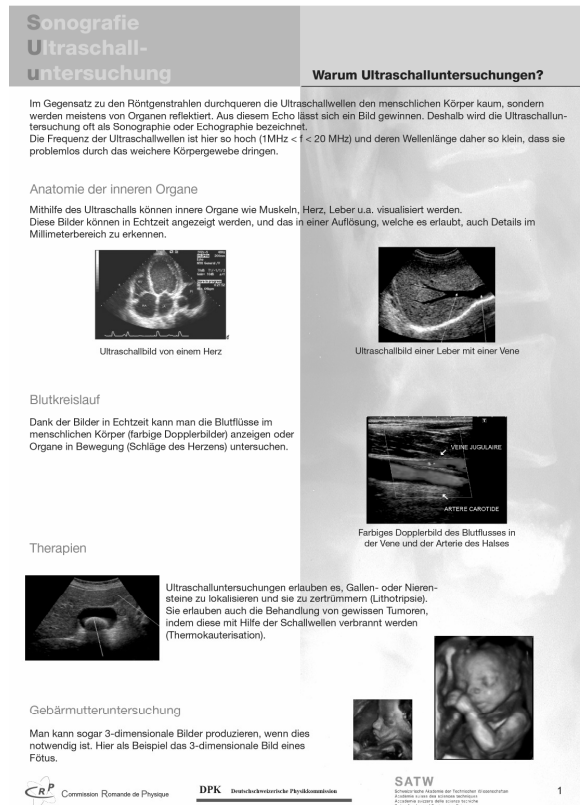


Abbildung 1: Plakat Sonografie (1/6)

Positronen Emissions Tomographie

Fluorzerfall

Fluor (^{18}F) zerfällt nach folgender Formel:

$$^{18}_9\text{F} \rightarrow ^{18}_8\text{O} + \text{Positron} + \text{Neutrino}$$

Produktion von radioaktivem Fluor

In einem Zyklotron wird ^{16}O mit schnellen Protonen beschossen. Dadurch entsteht ^{18}F mit einer Halbwertszeit von ca. 2 h (109,77 min).

$$\text{Protonen} + ^{16}\text{O} \rightarrow ^{18}\text{F} + \text{Neutronen}$$

Funktionsprinzip eines Zyklotrons

Andere Positronenquellen

Wegen seiner Halbwertszeit von 2 h kann das Fluor auch über weitere Strecken transportiert werden. Ist die Entfernung zum Zyklotron gering, können auch Radionuklide mit kleineren Halbwertszeiten benützt werden.

Element	Isotope	Halbwertszeit
Kohlenstoff	^{11}C	20 min
Stickstoff	^{13}N	10 min
Sauerstoff	^{15}O	2 min

Das Radiopharmakon

In der Medizin werden radioaktive Isotope mit kurzer Halbwertszeit benutzt, um eine übermässige Bestrahlung der Patienten zu verhindern (z.B. ^{18}F Halbwertszeit ca. 2 h).

Zeit nach der Injektion	Aktivität (in %)
0 h	100
2 h	50
4 h	25
6 h	12,5
8 h	6,25
10 h	3,125
...	...
24 h	< 0,02
Nach einer Woche	0,0000000000000000000000000517

In Wirklichkeit wird die Aktivität noch stärker abnehmen, da die injizierten Isotope teilweise mit dem Urin ausgeschieden werden (deshalb erscheint die Blase auf den Fotos als hyperaktives Organ). Die biologische Halbwertszeit von ^{18}F beträgt 82 Minuten.

Ein Protonenstrahl wird in einem Zyklotron durch ein elektrisches Feld beschleunigt. Das Magnetfeld hält den schneller werdenden Protonenstrahl auf einer Spiralbahn. Schliesslich werden die schnellen Protonen auf ein Target geschossen, welches Sauerstoff enthält.

Zyklotron

4

Abbildung 2: Plakat PET (4/6)


Die Schülerinnen und Schüler erhalten einen Einblick in die Möglichkeiten und Anwendungen der medizinischen Bildgebung. Dabei werden sie bei Themen wie Ultraschalluntersuchung eines Fötus, Nachweis von Tumorzellen, Alzheimer-Krankheit, Knochenverletzungen usw. bewusst mit Alltagsproblemen konfrontiert. Insbesondere bekommen die Schülerinnen und Schüler einen direkten Einblick, wie technische Hilfsmittel und das Wissen aus verschiedenen Fachgebieten sinnvoll in der Medizin eingesetzt werden.

Auf 24 Plakaten werden vier medizinische Untersuchungsmethoden vorgestellt: die Ultraschalluntersuchung, die Positronenemissionstomografie, die Computerröntgentomografie und die Magnetresonanztomografie.

Die gedruckten Plakate (farbig, A3, eine Serie pro Gymnasium) und die PDF-Version können bei der DPK (www.dpk.ch) kostenlos bestellt resp. heruntergeladen werden.

Die DPK bedankt sich herzlichst bei der CRP für die Postervorlage und die Bilder sowie bei der SATW für die finanzielle Unterstützung.

DPK, Christian Stulz



Cours CRM 2010

Histoire et épistémologie des mathématiques dans les temps modernes

28 septembre au 1^{er} octobre 2010

Lieu du cours
Hôtel Central-Résidence
Leysin
024 493 07 07
central-residence@bonellihotels.ch
www.bonellihotels.ch

Prix de l'hôtel
105 CHF par personne et par jour en chambre individuelle avec demi-pension (midi).
Les participants sont priés d'effectuer eux-mêmes leur réservation.

Inscription
Cours CPS 10_04_20
www.webpalette.ch
Délai d'inscription : 26 juillet 2009
Prix du cours : 320.-

Renseignements
Patrick Turtschy
032 926 25 85
patrick.turtschy@rpn.ch
Ou
Jean-Marc Ledermann
032 725 2361
079 439 9478
jean-marc.ledermann@rpn.ch

Conférenciers
Jacqueline Boniface Université Sophia-Antipolis, Nice;
Evelyne Barbin Université de Nantes;
Gerhard Heinzmann Archives Poincaré, Université de Nancy;
Philippe Lombard Archives Poincaré, Université de Nancy;
Jean-Daniel Voelke Gymnase Auguste Piccard, Lausanne;
Klaus Volkert Université de Wuppertal.

Descriptif du cours
Après le cours 2003 au Brassus, la CRM a décidé d'organiser à nouveau un cours consacré à l'histoire et l'épistémologie des mathématiques. Elle a choisi de mettre cette fois l'accent sur la période moderne et a invité six conférenciers, tous spécialistes reconnus dans leur domaine. Les sujets abordés seront particulièrement variés. Ils toucheront à différents domaines des mathématiques et couvriront une période allant du 16^e au 20^e siècle. G. Heinzmann parlera tout d'abord de manière générale des approches en philosophie des mathématiques. Plusieurs problèmes mathématiques seront ensuite présentés sous un angle à la fois historique et épistémologique. La géométrie occupera une part importante avec un exposé de J.D. Voelke sur le statut des axiomes géométriques, deux exposés de K. Volkert sur la notion d'aire et la place de l'expérience en géométrie et un exposé de P. Lombard sur la perspective. Ce dernier abordera aussi un thème pédagogique en parlant de l'expérience des mathématiques modernes dans l'enseignement. Le cours comprendra aussi des exposés en rapport avec la logique et l'algèbre. J. Boniface expliquera ainsi comment Frege a essayé de fonder les mathématiques sur la logique ; elle comparera aussi certains aspects de la conception des mathématiques de deux grands algébristes de la seconde moitié du 19^e siècle : Dedekind et Kronecker. E. Barbin parlera pour sa part de l'histoire des algorithmes, d'Euclide à Turing, ainsi que des courbes, un domaine situé au carrefour des mathématiques, de la physique et de la technique. Ce programme particulièrement éclectique devrait permettre aux participants de découvrir de nouveaux horizons et d'être initiés aux recherches actuelles en histoire et philosophie des mathématiques.

Programme (sous réserve de modifications)

	28.09.2010	29.09.2010	30.09.2010	01.10.2010
9h30 - 10h30	Accueil	Jacqueline Boniface	Évelyne Barbin	Klaus Volkert
10h45 - 12h15	Jean-Daniel Voelke	Jacqueline Boniface	Évelyne Barbin	Klaus Volkert
13h45 - 15h15	Gerhard Heinzmann		Philippe Lombard	Bilan
15h45 - 17h15	Gerhard Heinzmann		Philippe Lombard	

Jean-Daniel Voelke	Le statut des axiomes en géométrie: entre évidence et consistance.
Gerhard Heinzmann Jacqueline Boniface	Approches en philosophie des mathématiques. Tentative frégréenne de fondement logique des mathématiques. Mathématiques algorithmiques / mathématiques conceptuelles : Kronecker, Dedekind.
Évelyne Barbin	L'histoire des algorithmes d'Euclide à Turing. Les courbes entre mathématiques, physique et technique.
Philippe Lombard	Expérience des mathématiques modernes dans l'enseignement. Histoire de la perspective.
Klaus Volkert	La géométrie est-elle une science empirique ? Qu'est-ce qu'une aire ?



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Departement Mathematik

ETH Zentrum HG G 51.3
CH-8092 Zürich

Prof. Dr. Urs Kirchgraber
Phone: +41-44-632 34 54
Fax: +41-44-632 18 37
email: kirchgra@math.ethz.ch
www.math.ethz.ch/~kirchgraber

Zürich, im Mai 2010

Liebe Kolleginnen und Kollegen

Im Namen der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft (SMG), der ETH Zürich, des Zürcher Hochschulinsti-
tituts für Schulpädagogik und Fachdidaktik (ZHSF) und der Kantonsschule Rychenberg in Winterthur lade ich
Sie herzlich ein zum

21. Schweizerischen Tag über Mathematik und Unterricht

am

Mittwoch, den 15. September 2010

an die

Kantonsschule Rychenberg

Ich würde mich sehr freuen, wenn wir Sie am 15. September 2010 begrüßen dürften.

Freundliche Grüsse

U. Kirchgraber

Programm

10.00 – 10.30 Uhr (Aula)

Check-in, Kaffee, Orangensaft, Mineralwasser und Gipfeli

10.30 – 10.45 Uhr (Aula)

Begrüssung durch Heinz Klemenz, Kantonsschule Rychenberg

10.45 – 11.45 Uhr (Aula)

Prof. R. Kaenders, Universität Köln

Mathematik von der Stange – Stangenkonstruktionen

Kräne, Zugtüren, Rasensprenger – ja eigentlich überall finden wir Konstruktionen, bei denen Stangen durch Gelenke und Schiebemechanismen verbunden sind, so dass Klapp-, Schwenk- und Schiebebewegungen möglich werden.

Schon die einfachsten Konstruktionen werfen Fragen auf, die spannend für Kinder, Laien und Experten sind. Dabei reicht das Spektrum von verblüffenden Einsichten in die Gesetzmäßigkeiten einfacher Bewegungsmuster bis hin zur Betrachtung verschiedener Kurven wie etwa der Kegelschnitte und Koppelkurven. Ohne einschlägige Vorkenntnisse vorauszusetzen wird im Vortrag gezeigt, wie solche Stangenkonstruktionen und ihre Bewegungsmuster mit Hilfe euklidischer Geometrie, elliptischer Kurven und topologischer Flächen tiefer verstanden werden können.

12.00 – 14.30 Uhr (Aula, Mensa)

Grusswort durch die Rektorin Frau Dr. Franziska Widmer Müller

Apéro und Mittagessen

14.30 – 15.30 Uhr (Aula)

Prof. B. Kümmerer, TU Darmstadt

Mathematik zwischen Anschauung und Sprache

Bringen Sie doch nächstes Mal eine $\sqrt{2}$ in den Unterricht mit. Das geht nicht? Eben! Mathematik findet im Kopf statt, mehr als jede andere Wissenschaft.

In dem Vortrag beleuchten wir zunächst die Bedeutung der Anschauung, der mentalen Repräsentation mathematischer Objekte, aus verschiedenen Perspektiven. Ihr steht auf der anderen Seite die mathematische Sprache gegenüber, seit Jahrtausenden ein Vorbild für Exaktheit im Ausdruck. Wie die mathematische Sprache das macht, darüber denken wir im zweiten Teil des Vortrages nach. Mathematik, ganz besonders Verstehen und Lehren von Mathematik, verortet sich in diesem Spannungsfeld von Anschauung und Sprache. Aus dieser Perspektive werfen wir abschliessend einen Blick auf einige der Fragen, auf die alle Mathematiktreibenden wieder und wieder gestoßen werden, zum Beispiel: "Warum tun sich viele Menschen mit Mathematik schwer?", "Gibt es nur eine oder gibt es viele 'Mathematiken'?" oder "Wird Mathematik entdeckt oder erfunden?"

16.00 – 17.00 Uhr (Aula)

Prof. G. Felder, ETH Zürich

Dreieckige Quadrate und andere Einheiten

Welche Quadratzahlen sind gleichzeitig Dreieckszahlen? Motiviert von dieser einfachen Frage, einer Reformulierung eines Spezialfalls der Pell-Gleichung, lassen sich einige interessante mathematische Begriffe untersuchen (Punkte auf Hyperbeln mit ganzzahligen Koordinaten, Einheiten in algebraischen Zahlensystemen, Kettenbrüche), welche eine elementare Behandlung zulassen und zur Lösung führen. Geometrische, algebraische und arithmetische Überlegungen spielen dabei eine Rolle und zeugen von der Einheit der Mathematik.

17.15 Ende der Veranstaltung

Anmeldeformular

zum 21. Schweizerischen Tag über Mathematik und Unterricht am Mittwoch, 15. 9. 2010, an der Kantonsschule Rychenberg Winterthur

(Bitte in **Druckbuchstaben** ausfüllen).

Name:

Vorname:

Adresse:

E-Mail:

Schule:

Teilnahme am gemeinsamen Mittagessen

Ja → Fleisch-Menü Vegetarisches Menü

Nein

Bon zu CHF 25.– kann beim Eintreffen in der Schule gekauft werden. Er berechtigt zu: Kaffee/Orangensaft/Mineralwasser und Gipfeli am Morgen / Mittagessen (Menü (mit/ohne Fleisch) und Dessert)

Vorschläge, Wünsche, Bemerkungen:

Bitte melden Sie sich bis 20.8.10 an:

Heinz Klemenz, "Mathematiktag 2010", Kantonsschule Rychenberg, 8400 Winterthur

Elektronisch können Sie sich (ab 1.6.10) anmelden unter:

<http://www.ksrychenberg.ch/fachschaften/mathematik/aktuell.php>

Horizonte im Mathematikunterricht erweitern – zusammenarbeiten mit Biologie, Chemie, Informatik oder Physik

Meike Akveld, Norbert Hungerbühler, Hansruedi Schneebeli

Ist Zusammenarbeit im Unterricht ein unerreichbarer Idealfall, ein didaktischer Traum oder gibt es eine pragmatische Realisierung, in der eine Symbiose entstehen kann mit Nutzen für alle Beteiligten?

Klar ist, dass Zusammenarbeit nicht zum Nulltarif zu haben ist. Alle Beteiligten müssen sich einbringen, damit die Zusammenarbeit zu Ergebnissen führen kann, die den Aufwand rechtfertigen.

Wo starre Fachgrenzen Mauern errichten, kann durchaus für Lernende ein Motivationsproblem auftreten. Wozu brauchen wir all die Ableitungsregeln und die Integrationsmethoden? Zusammenarbeit und Anwendungsbezug können helfen, Grenzen zu überwinden und ein bisher unerreichtes Motivationspotenzial anzuzapfen. Es ist realistisch, in einem Unterricht, der Zusammenarbeit vorlebt, einen Mehraufwand zu leisten und einen Zusatznutzen zu erhoffen oder gezielt anzustreben.

Der Kurs wird Beispiele und Vorschläge für verschiedene Formen und Inhalte zur Zusammenarbeit mit Beteiligung der Mathematik zeigen. Anlass könnte eine Arbeits- oder Studienwoche sein, ein gemeinsames Projekt im Rahmen von ‘Anwendungen der Mathematik’ oder von Maturaarbeiten, wo es sich herausstellen könnte, dass gewisse noch wenig genutzte Methoden aus der Statistik einem Biologieprojekt oder eine Monte-Carlo-Simulation in der Physik über entscheidende Hürden hinweg helfen können. Andererseits könnten auch neue Anwendungen von mathematischen Simulationen aus der Chemie motiviert sein. Im ganzen Kontext kann Zusammenarbeit mit Informatik eine sehr gute Alternative sein zur Anwendung von rein mathematischen Methoden.

Anwendungen, Forschung, Entwicklung und Zusammenarbeit werden am Paul Scherrer Institut (PSI) vorgelebt. Wir fühlen uns in der privilegierten Lage, Sie zu einer Weiterbildung einzuladen, die am PSI durchgeführt werden wird.

Wir wenden uns daher an Lehrerinnen und Lehrer der Fächer Biologie, Chemie, Informatik, Mathematik und Physik, und laden dazu ein, mit uns einen Tag lang über Zusammenarbeit nachzudenken und in Workshops, Beispiele und Optionen für Zusammenarbeit über die Fachgrenzen hinweg zu erfahren.

Kursdaten

Ort: Paul Scherrer Institut (PSI), Villigen, AG

Datum: 30. März 2011

Kursleitung: Meike Akveld, Norbert Hungerbühler, Hansruedi Schneebeli

Referenten und Anbieter von Workshops: Peter Bützer (Chemie), Fritz Gassmann(PSI, Besichtigung Schülerlabor, SLS, lokaler Organisator) Barbara Hellriegel(Biologie), Jura J Hromkovic (Informatik), Christoph Leuenberger(Mathematik), Sebastian Pilgram(Physik)

Kursprogramm: [Einzelheiten folgen bei der zweiten Ausschreibung mit Anmeldung]
Vormittag: Interdisziplinäre Zusammenarbeit am PSI, Impulsreferat, Besichtigung Schülerlabor des PSI
Nachmittag: Angebot von 5 Workshops und Besichtigung Synchrotron Lichtquelle,

Anmeldung nach der Ausschreibung mit dem Detailprogramm ab Oktober 2010

Wir freuen uns, Sie am Weiterbildungstag vom 30. März 2011 am PSI zu treffen. Im Idealfall bringen Sie mögliche Partner aus einem anderen Fach gleich zur Weiterbildung mit. Damit dies geschehen kann, wäre es sehr hilfreich, wenn Sie sich das Datum bereits jetzt freihalten wollten. Wenn Sie zudem in Ihrem Umfeld auf den Anlass hinweisen und Kolleginnen oder Kollegen aus dem naturwissenschaftlich-mathematisch-technischen Bereich für den Anlass gewinnen können, unterstützen Sie unser Anliegen ganz besonders. Als Dank dafür offerieren wir verbilligte 'Paarkarten' für Zweierteams aus verschiedenen Fachschaften, die gemeinsam am Kurs teilnehmen möchten.

Mit freundlichen Grüßen

Meike Akveld, Norbert Hungerbühler, Hansruedi Schneebeli



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Departement Mathematik

ETH Zentrum HG G 51.3
CH-8092 Zürich

Prof. Dr. Urs Kirchgraber
Phone: +41-44-632 34 54
Fax: +41-44-632 18 37
kirchgra@math.ethz.ch
www.math.ethz.ch/~kirchgraber

Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht Programm HS 2010

Die Vorträge finden jeweils an einem Donnerstag von 17.15 bis 18.45 Uhr im Auditorium F1 des Hauptgebäudes der ETH Zürich statt.

- 28.10.10 J. Heitzer, RWTH Aachen
Vom Lotfällen bis zum JPEG-Format – eine zentrale mathematische Idee und ihre Anwendungen
- 11.11.10 M. Barot, Universität Mexiko
Visualisierung der hyperbolischen Geometrie
- 25.11.10 P. Baptist, Universität Bayreuth
Titel wird später mitgeteilt
- 09.12.10 M. Bettinaglio, MNG Zürich
**Zwischen Kunst, Naturwissenschaft, Technik und Mathematik –
ars perspectiva als Thema des Mathematikunterrichts**

Herzlich laden ein:

U. Kirchgraber (kirchgra@math.ethz.ch)
P. Gallin (peter.gallin@igb.unizh.ch)
J. Hromkovic (juraj.hromkovic@inf.ethz.ch)
H. Klemenz (hklemenz@geosoft.ch)

Radioaktivität Bedrohung oder harmloses Naturphänomen?

Vierzehntes Weiterbildungsseminar des Forum VERA
 Freitag, 24. September bis Samstag, 25. September 2010

Thematik

Die Entsorgung radioaktiver Abfälle in der Schweiz ist politisch aktueller denn je. Die verschiedenen Beteiligten – Wissenschaftler, Behörden, Politik, Elektrizitätswirtschaft arbeiten zielgerichtet darauf hin. Phänomene, die man weder sehen, noch riechen, geschweige denn fassen kann, lösen oft Vorbehalte und Ängste bei den Menschen aus. Radioaktivität ist ein solches Phänomen.

Radioaktivität kann zwar Krankheit oder sogar Tod bewirken, aber sie hat auch sehr wertvolle positive Eigenschaften und wird deshalb im Gesundheitswesen eingesetzt: Die Nuklearmedizin beispielsweise heilt Tumore mithilfe von hochenergetischer Strahlung. Zudem ist Radioaktivität ein ganz normales Naturphänomen. In allen Regionen der Welt gibt es eine mehr oder minder hohe natürliche ionisierende Strahlung, die teilweise weit über die in Sicherheitsvorschriften definierten Werte hinausgeht.

Teilnehmende: Lehrkräfte aller Disziplinen der Sekundarstufen 1 und 2

Ort: Parkhotel Schloss Hünigen, 3510 Konolfingen,
www.schlosshuenigen.com

Teilnahmegebühr: Fr. 370.- pro Person (inkl. Übernachtung, Mahlzeiten, Getränke und Dokumentation)

ReferentInnen: Dr. Urs Frick, Geochemiker;
 Prof. Dr. Henning von Philipsborn, Universität Regensburg;
 Dr. Peter Roder, Bundesamt für Bevölkerungsschutz BABS;
 Prof. Dr. Ulrich W Suter, Vorstandsmitglieder des Forum VERA

Podium: Patrick Miazza, BKW; Sabine von Stockar, SES;
 Prof. Dr. Walter Wildi, Universität Genf;
 Dr. Hans Wanner, ENSI; Dr. Piet Zuidema, Nagra

Exkursion: Inselspital Bern
 u.a. mit Dr. Frédéric Corminboeuf, Universitätsklinik für Nuklearmedizin
 und
 Dr. Dario Terribilini, Universitätsklinik für Radio-Onkologie

Organisation und Anmeldung

Forum VERA
 Sabine Braun
 c/o Senarclens, Leu + Partner AG
 Freigutstrasse 8
 8027 Zürich
 Tel. 043 305 05 90 / dir. 95
sabine.braun@senarclens.com

Fax 043 305 05 99
www.forumvera.ch

PHBern, Institut für Weiterbildung
 Weltstrasse 40, CH-3006 Bern
 T +41 31 309 27 11, F +41 31 309 27 99
 weiterbildung.phbern.ch, info-iwb@phbern.ch

PHBern
 Institut für
 Weiterbildung

Die Physik der Elementarteilchen

Alle physikalischen Vorgänge im Universum basieren auf Wechselwirkungen elementarer Teilchen

Datum	Samstag, 11. September 2010
Ziele	Die wichtigsten Fragestellungen der Elementarteilchenphysik verstehen Moderne Teilchenbeschleuniger kennen lernen Grundkenntnisse über Detektoren und Teilchenidentifikation erwerben
Inhalte	Einführung in die Elementarteilchenphysik Grosse Teilchenbeschleuniger, insbesondere der Large Hadron Collider am CERN Auswertung von Daten aus Kollisionsexperimenten Aktuelle Forschung am Laboratorium für Hochenergiephysik Stellung des Themas im Unterricht der Sekundarstufe II
Referenten	PD Dr. Hans Peter Beck PD Dr. Michele Weber Dr. Markus Wey
Kursort	Bern

Provisorisches Programm

Samstag, 11. September 2010

09.00	Begrüssung und Einleitung	
09.15	Einführung in die Welt der Teilchenphysik	PD Dr. Hans Peter Beck
10.30	Teilchen Sichtbar machen	PD Dr. Michele Weber
11.45	Diskussion: Teilchenphysik in der Sekundarstufe II	Dr. Markus Wey
12.30	Mittagspause	
14.00	Einführung in die Analyse von Collider-Daten	
14.30	Analyse von Teilchenkollisionen am PC (Teil I)	
15.30	Analyse von Teilchenkollisionen am PC (Teil II)	
16.30	Zusammenfassung der Resultate und Diskussion im Plenum	
17.15	Ende	

Kontakt

Dr. Hans Ulrich Küng, Dozent am Fachbereich Sek II, Institut für Weiterbildung, PHBern
 E-Mail: hansulrich.kueng@phbern.ch

Die Physik der Elementarteilchen

Angaben zur Anmeldung

Kursgeld Fr. 130.-

Anmeldung per Post: PHBern, Institut für Weiterbildung, Weltstrasse 40, 3006 Bern
 per E-Mail: info-iwb@phbern.ch
 Online: <http://physik-s2-iwb.phbern.ch>

Kursnummer 10.611.431

Anmeldetermin 1. August 2010

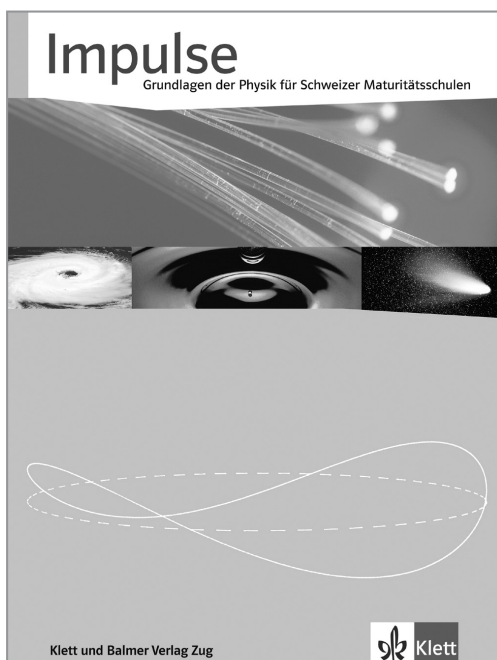
**Anmeldung**

10.611.431 Die Physik der Elementarteilchen

Name		Vorname		Jahrgang
Strasse				Nr.
PLZ	Wohnort			
Kanton	E-Mail		Tel. privat	
PLZ	Schule/Schulort/Arbeitsort		Tel. Arbeitsort	

NEU: «Impulse – Grundlagen der Physik für Schweizer Maturitätsschulen»

Das genau abgestimmte Lehrwerk für den Unterricht im Grundlagenfach:



- einbändige Ausgabe auf der Grundlage der aktuellen Lehrwerksreihe «Impulse» aus dem Ernst Klett Verlag
- neben der Stoffvermittlung wird grosser Wert auf Alltagsbezug, Reflexion sowie Festigung und Überprüfung von Können und Wissen gelegt
- systematischer Aufbau und klar strukturiertes Erscheinungsbild
- gibt den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit für selbständiges Arbeiten
- übersichtliches, modernes und lesefreundliches Layout

Schulbuch

9.–12. Schuljahr | 352 Seiten
978-3-264-83935-7 | Fr. 49.00

Die Lösungen zu den Aufgaben im Buch, Musterseiten sowie passendes Zusatzmaterial und Bestellmöglichkeiten finden Sie auf www.impulse-physik.ch.

Baarerstrasse 95, 6302 Zug
Telefon 041 726 28 50, Fax 041 726 28 51, info@klett.ch
www.klett.ch

Klett und Balmer Verlag Zug



Ja - Oui - Sì

Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und -lehrer (VSG) werden.

J'aimerais devenir membre de la Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique (SSPMP) et de la société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire (SSPES).

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

Beitrag/Montant/Quota: Fr. 120.- (VSG-SSPES-SSISS) + Fr. 40.- (SSIMF-SSPMP-VSMP)

Frau/Mme/Sig.ra Herr/M./Sig. Prof. Dr.

Name/Nom/Cognome:

Vorname/Prenom/Nome:

Adresse/Indirizzo (privat/privato):

Plz-Ort/NP-Ville/CAP-Luogo:

(Land/Pays/Paese):

Email: (Tel):

(Geburtsdatum/Date de naissance/Data di nascita):

Sprache/Langue/Lingua: D F I.

Schule/école/scuola: Kanton/canton/cantone:

Kategorie/Catégorie/Categoria: activ/actif/attivo passive/passif/passivo

Student/-in, étudiant(e), studente/ssa.

Einsenden an/envoyer à/inviare a:

VSG-SSPES-SSISS, Postfach 8742 (Waisenhausplatz 14), 3001 Bern

oder per Internet: www.vsg-sspes.ch

Impressum

Herausgeber – *Éditeur*

VSMP / SSPMP / SSIMF

Korrespondenz – *Correspondance*

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Bireggstrasse 19 Tel. 079 79 89 770
6003 Luzern

Layout – *Mise en page*

Jean-Luc Barras jeanluc.barras@gmail.com
Es Novallys 224 Tél. 026 912 98 24
1628 Vuadens

Inserateverwaltung – *Publicité*

Deutschweiz:

Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch
Weinbergstrasse 3 Tel. 055 410 62 36
8807 Freienbach

Suisse romande :

Philippe Beney philippe.beney@bluewin.ch
Av. Pratifori 10 Tel. 027 321 11 94
1950 Sion

Adressänderung – *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder – Membres de la SSPMP :

VSG – SSPES – SSISS
Sekretariat, Postfach 8742
3001 Bern

Abonnenten die nicht Mitglieder der VSG sind:

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Bireggstrasse 19 Tel. 079 79 89 770
6003 Luzern

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

– Délais de rédaction (de parution)

Nr. 114 31.08.2010 (20.10.2010)
Nr. 115 31.12.2010 (20.02.2011)
Nr. 116 30.04.2011 (20.06.2011)

Auflage – *Tirage*

900. Erscheint dreimal jährlich.

Präsidentin VSMP – SSPMP – SSIMF

Elisabeth McGarrity mcgarrity@rhone.ch
Bäjiweg 45 Tel. 079 34 34 862
3902 Brig-Glis

Deutscheschweizerische Mathematikkommission

Hansjürg Stocker hjstocker@bluewin.ch
Friedheimstrasse 11 Tel. 044 780 19 37
8820 Wädenswil

Deutscheschweizerische Physikkommission

Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch
Weinbergstrasse 3 Tel. 055 410 62 36
8807 Freienbach

Commission Romande de Mathématique

Patrick Hochuli patrick.hochuli@gfbienne.ch
Alex-Moser 50 Tél. 032 365 60 15
2503 Bienne

Commission Romande de Physique

Jean-Daniel Monod jean-daniel.monod@urbanet.ch
Rue du Bugnon 14 Tél. 021 701 38 62
1030 Bussigny

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Vincenzo d'Alberti 13
6600 Locarno Tél. 091 751 14 47

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

– Tarifs pour les annonces et les annexes

Ganzseitige Inserate Fr. 500.–
Halbseitige Inserate Fr. 300.–
Beilagen bis 20 g Fr. 500.–
Beilagen über 20 g Nach Vereinbarung

Druck und Versand – *Imprimerie*

Niedermann Druck AG
Rorschacherstrasse 290
9016 St. Gallen

Internet-Adressen – Adresses Internet

<http://www.vsmf.ch> — <http://www.sspmp.ch> — <http://www.ssimf.ch>