DPK

Martin Lieberherr
MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

# Schwache Reaktion

## 1 Einleitung

Das Reaktionsprinzip lautet: Während ein Körper auf einen anderen Körper eine Kraft ausübt, erfährt er eine Reaktionskraft von gleicher Stärke und umgekehrter Richtung. (Wechselwirkungsprinzip, drittes newtonsches Axiom, Rückstossprinzip, actio = reactio)

Viele Physikbücher führen das Reaktionsprinzip in der starken, wenige auch in der schwachen Fassung an, siehe Abbildung 1.

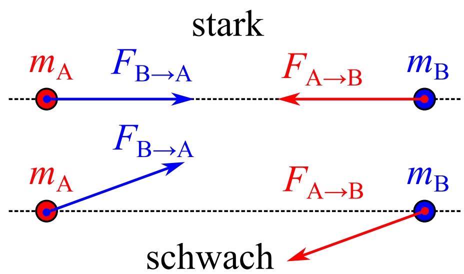



*Abbildung 1: Starkes und schwaches Reaktionsprinzip*

In Mittel- oder Hochschulbüchern wird meistens – implizit in begleitenden Illustrationen oder explizit in der Formulierung – das starke Wechselwirkungsprinzip vorgestellt: Aktions- und Reaktionskraft sind gleichstark, entgegengesetzt gerichtet *und wirken entlang derselben Wirkungslinie*.

Leider ist es nicht immer wahr, dass Aktions- und Reaktionskraft dieselbe Wirkungslinie teilen. Ein Beispiel, das alle Physiklehrkräfte kennen sollten, ist in Abbildung 2 dargestellt.

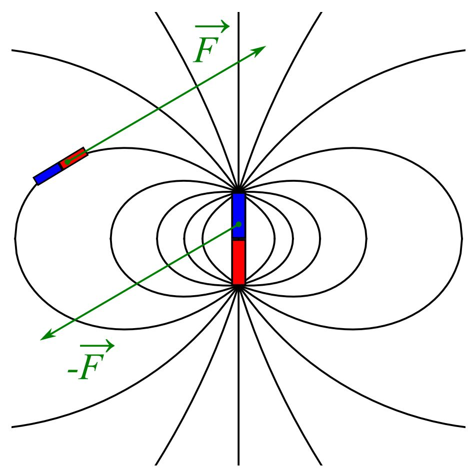



*Abbildung 2: Statische Wechselwirkung zwischen einem Stabmagneten und einer Kompassnadel*
*Die magnetische Kraft auf die drehmomentfreie Kompassnadel wirkt tangential zu den Feldlinien. Die Tangente (Wirkungslinie) verläuft aber nicht durch den Stabmagneten. Die Reaktionskraft auf den Stabmagneten greift irgendwo am Stabmagneten an und hat eine andere Wirkungslinie. Hier gilt nur das schwache Wechselwirkungsprinzip.*

Das Reaktionsprinzip hat zur Folge, dass sich innere Kräfte eines Körpers aufheben und deshalb der Gesamtimpuls konstant bleibt.

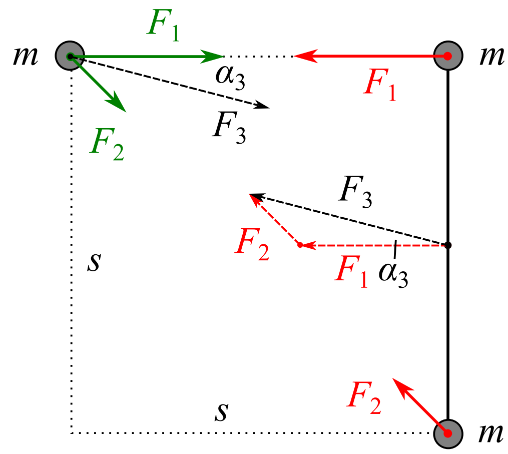
Das starke Reaktionsprinzip bewirkt, dass der Drehimpuls erhalten ist, weil Drehmomente fehlen.

Aber was passiert, wenn nur das schwache Reaktionsprinzip gilt? Ich möchte an einem Beispiel zeigen, dass der Drallsatz nicht in Gefahr ist. Weil magnetische Dipolkräfte schwierig sind, möchte ich ein ähnliches Beispiel mit Gravitationskräften ansatzweise durchrechnen.

## 2 Theorie

Betrachten wir die newtonschen Gravitationskräfte zwischen einer Punktmasse und einer idealisierten Hantel, siehe Abbildung 3.

*Abbildung 3: Drei gleiche Massenpunkte mit je der Masse m liegen auf den Ecken eines Quadrates mit Seitenlänge s. Zwei Massenpunkte sind entlang einer Quadratseite mit einer masselosen Stange zu einem starren Körper verbunden. Die Hantel übt die Teilkräfte $F_1$ und $F_2$ auf die freie Punktmasse aus; die Reaktionskräfte wirken auf die entsprechenden Endkörper der Hantel. Die Teilkräfte können zur Resultierenden $F_3$ zusammengesetzt werden. Die Resultierende habe ich im Massenmittelpunkt der Hantel eingezeichnet sowie umgedreht bei der Punktmasse. Die Variablen stehen für Beträge, die Richtungen werden durch die Pfeile angezeigt.*




Mit den Bezeichnungen in Abbildung 3 folgt

$$F_1 = \frac{Gm^2}{s^2} \quad \wedge \quad F_2 = \frac{F_1}{2} \tag{1}$$

$$F_3 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(135°)} = F_2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} \approx F_1 \cdot 1.399 \tag{2}$$

$$\frac{\sin\alpha_3}{F_2} = \frac{\sin 135°}{F_3} \Rightarrow \alpha_3 = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5+2\sqrt{2}}} \approx 14.64° \tag{3}$$

Der Winkel $\alpha_3$ wird zwischen der Resultierenden $F_3$ und der Kraft $F_1$ gemessen. Die Massenmittelpunkte beider Körper beschleunigen in Richtung der jeweiligen Resultierenden; die Punktmasse mit $a_P = F_3/m$ und die Hantel mit $a_H = F_3/(2m)$. Die Beschleunigungen verhalten sich umgekehrt wie die Massen der jeweiligen Körper, aber in Gegenrichtung. Der gemeinsame Schwerpunkt ist somit unbeschleunigt und der totale Linearimpuls ist erhalten.

Auf die Hantel wirkt offensichtlich ein Drehmoment. Bezogen auf den Hantel-Massenmittelpunkt hat es anfangs die Grösse

$$M = F_1 \cdot \frac{s}{2} - F_2 \cdot \frac{s\sqrt{2}}{4} = F_1\frac{s}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \tag{4}$$

und beginnt, die Hantel im Gegenuhrzeigersinn (positiver Drehsinn) zu drehen. Der innere oder Eigendrehimpuls (Spin) der Hantel nimmt zu. Da die Bewegung bei der Anfangslage der Hantel startet, verändert sich der Bahndrehimpuls der Hantel zumindest am Anfang nicht.

Die Punktmasse erfährt eine Kraft, die sie parallel zu $F_3$ beschleunigt. Dadurch wird der Bahndrehimpuls bezüglich der Anfangsposition des Hantelschwerpunkts verändert. Die Drehimpulsänderung ist

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_3 \tag{5}$$

$$\frac{dL}{dt} = -F_1 \cdot \frac{s}{2} + F_2 \cdot \frac{s\sqrt{2}}{2 \cdot 2} = -M \tag{6}$$

Zu Beginn nimmt also der innere Drehimpuls (Spin) der Hantel zu und der äussere (Bahn)Drehimpuls der Punktmasse gleich viel ab. Der Gesamtdrehimpuls ist erhalten. Alles andere wäre auch seltsam gewesen. Die einzelnen Gravitationskräfte zwischen den Massenpunkten erfüllen ja das starke Reaktionsprinzip und ändern den Drehimpuls nicht.

## 3 Simulationen

Die skizzierte Theorie beschreibt nur den Anfangszeitpunkt. Die Fortsetzung wird schnell kompliziert, lässt sich aber mit mässigem Aufwand simulieren, siehe Abbildung 4.

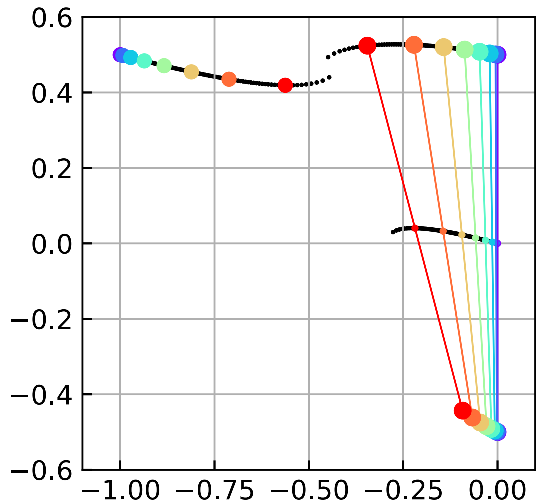



*Abbildung 4: Simulation der Bewegung von Punktmasse und Hantel*
*Die Anfangsrichtungen der Bewegungen von Punktmasse und Hantelschwerpunkt, 14.6° zur Horizontalen, stimmen mit der Theorie überein.*

Hantel und Punktmasse tauschen Drehimpuls aus. Ist es möglich, den Hantelschwerpunkt festzuhalten und ihre Rotation so zu steuern, dass sich die Punktmasse von der Hantel entfernt? Klar, siehe Abb. 5 und 6.

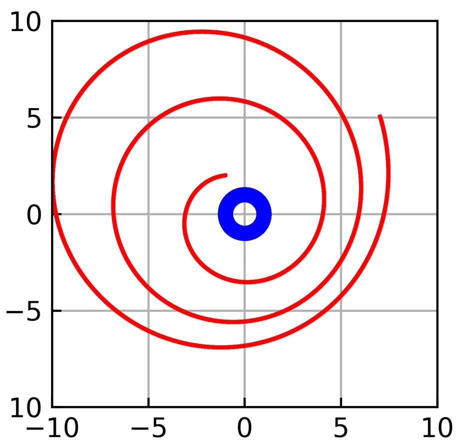



*Abbildung 5: Inertialsystem*

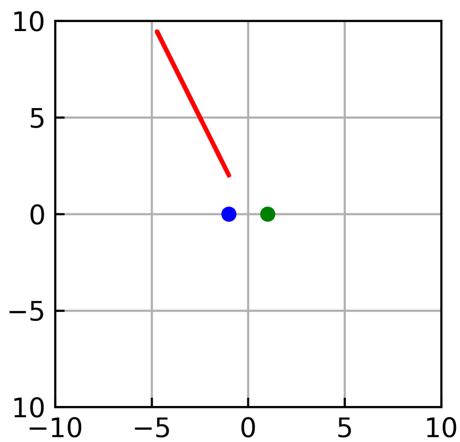



*Abbildung 6: Mitrotierendes Bezugsystem*

Eine Hantel kann durch gesteuerte Rotation eine Testmasse mit Hilfe der Gravitations- respektive Gezeitenkräfte wegschleudern. Der Mond entfernt sich von der Erde, weil durch Gravitationskräfte innerer Drehimpuls von der Erde auf den Bahndrehimpuls des Systems Erde-Mond übertragen wird.

Umgekehrt kann sich ein hantelförmiger Satellit durch gesteuerte Rotation oder Deformation aus dem Gravitationsfeld eines Planeten lösen.[1,2] Er muss nur durch z.B. Reaktionsräder seine Orientierung steuern und/oder durch Verlängerung/Verkürzung seine Form geeignet ändern. Dazu sind keine Triebwerke nötig. Er kann so innere Energie in äussere, potentielle Energie im Gravitationsfeld umwandeln. Allerdings ist der Vorgang langsam, weil Gezeitenkräfte auf Kleinkörper in der Regel schwach sind.

12. August 2023, Lie.

---

[1] J. Wisdom, “Swimming in Spacetime: Motion by Cyclic Changes in Body Shape”, Science, 27 Feb 2003, Vol 299, Issue 5614, 1865-1869

[2] M. J. Longo, “Swimming in Newtonian space–time: Orbital changes by cyclic changes in body shape”, Am. J. Phys. **72** (10), October 2004, 1312-1315