Beat Jaggi
jaggibe@outlook.com

Rechendreiecke/Rechenvielecke und elementare Geometrie

Rechendreiecke/Rechenvielecke

Rechendreiecke wurden erstmals im Jahre 1975 in einem Artikel von A. McIntosh und D. Quadling beschrieben (siehe [4]). Die ursprüngliche englische Bezeichnung ist **arithmogons**.

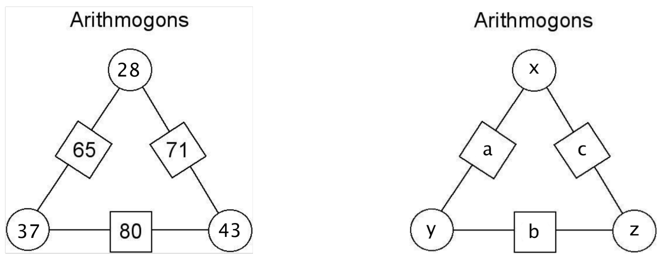


Abbildung 1

Das Grundprinzip ist einfach: Es sind stets sechs Zahlen (oder Terme) im Spiel:
In Abbildung 1 links ist $28 + 37 = 65,\ \ 37 + 43 = 80$ und $43 + 28 = 71$.
Allgemein muss $x + y = a,\ \ y + z = b$ und $z + x = c$ gelten (siehe Abbildung 1 rechts).

In Schweizer Mathematik-Lehrmitteln kommen Rechendreiecke insbesondere im Zahlenbuch [1] und im mathbuch [2] als Aufgabenformate häufig vor. Die Darstellung ist etwas anders, das Prinzip ist gleich.

Von den sechs Zahlen sind in der Regel drei gegeben, die restlichen drei sind gesucht.

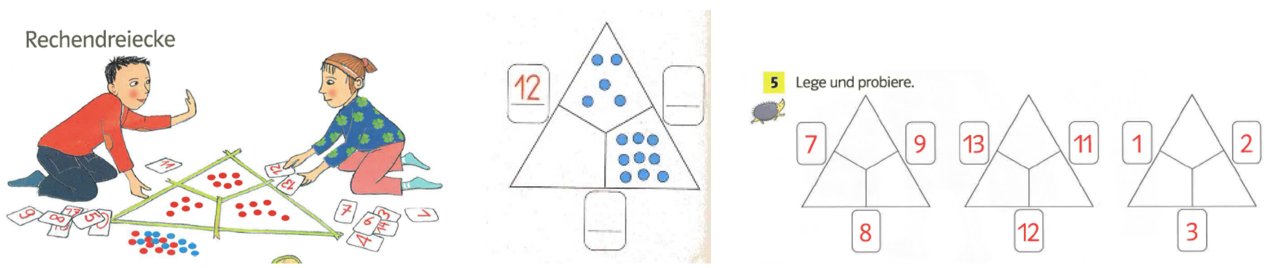


Abbildung 2: Im Schweizer Zahlenbuch 1 werden Anzahlen von Plättchen addiert.

Wie Abbildung 2 rechts suggeriert, gibt es nur einen wirklich interessanten Fall: Die 'Mittelzahlen' a, b, c sind gegeben, die 'Eckzahlen' x, y, z sind gesucht.

Das Prinzip der Rechendreiecke lässt sich in natürlicher Weise auf Vier- und n-Ecke übertragen.

Es zeigt sich, dass zwei (elementar-)geometrische Probleme auf gleiche oder ähnliche Gleichungssysteme führen, wie sie bei Rechendreiecken und Rechenvielecken auftreten.

Problem 1

(a) Gegeben ist ein Dreieck mit den Seiten(-längen) a, b und c.
Die Berührpunkte des Inkreises teilen jede Seite des Dreiecks in zwei Abschnitte.
Gesucht sind die Längen dieser Abschnitte?

(b) Gegeben ist ein Tangentenviereck mit den Seiten(-längen) a, b, c und d.
Die Berührpunkte des Inkreises teilen jede Seite des Vierecks in zwei Abschnitte.
Gesucht sind die Längen dieser Abschnitte?

(c) Analoge Frage wie bei (a) und (b) für ein n-Eck mit Inkreis.

Die zwei Tangentenabschnitte von einem Punkt ausserhalb an einen Kreis sind gleich lang.

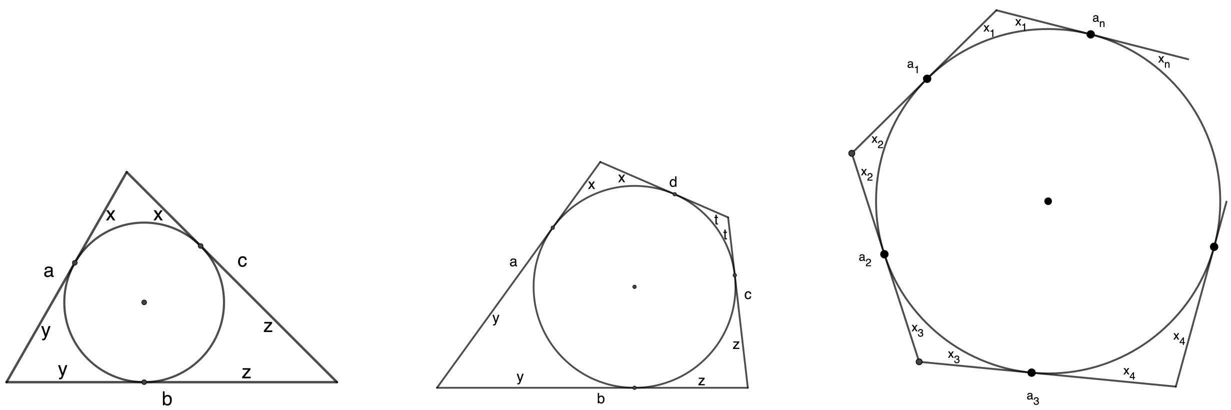
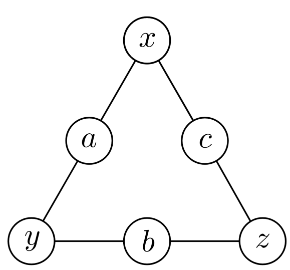


Abbildung 3

Mit den Bezeichnungen von Abbildung 3 ergeben sich deshalb die selben Gleichungssysteme wie bei den Rechendreiecken/-vielecken!

Dreieck	Viereck	$n-$Eck
$x+y=a$	$x+y=a$	$x_1+x_2=a_1$
$y+z=b$	$y+z=b$	$x_2+x_3=a_2$
$z+x=c$	$z+t=c$	$x_3+x_4=a_3$
	$t+x=d$	$x_4+x_5=a_4$
		$\vdots$
		$x_{n-1}+x_n=a_{n-1}$
		$x_n+x_1=a_n$

Rechendreiecke



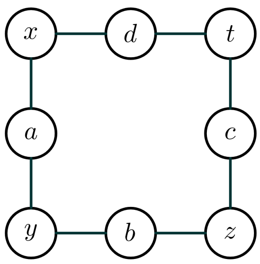
$$\left|\begin{array}{ccc} x+y & = & a \\ y+z & = & b \\ z+x & = & c \end{array}\right|$$

Abbildung 4

Die (eindeutig bestimmte) Lösung ist $x = \dfrac{a-b+c}{2}$; $y = \dfrac{b-c+a}{2}$; $z = \dfrac{c-a+b}{2}$

Man sieht, dass x, y und z genau dann positiv sind, wenn die Dreiecksungleichungen $a < b + c$, $b < a + c$ und $c < a + b$ erfüllt sind. Das beweist auch, dass jedes Dreieck einen Inkreis besitzt.

Rechenvierecke



$$\left|\begin{array}{rcl} x+y & = & a \\ y+z & = & b \\ z+t & = & c \\ t+x & = & d \end{array}\right|$$

Abbildung 5

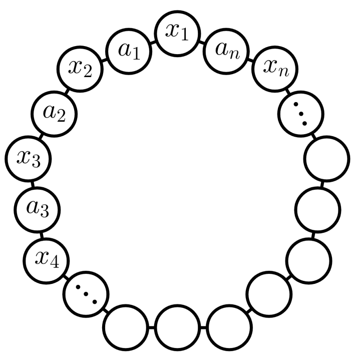
Zählt man die erste und die dritte, resp. die zweite und die vierte Gleichung zusammen, dann wird

$$x + y + z + t = a + c \quad \text{und} \quad y + z + t + x = b + d$$

Also muss $a + c = b + d$ gelten. Das ist die wohlbekannte Bedingung an die Seitenlängen eines Tangentenvierecks, also eines Vierecks, das einen Inkreis besitzt.

Jedes konvexe Viereck mit Seitenlängen a, b, c, d und $a + c = b + d$ besitzt einen Inkreis.

Rechenvielecke



$$\left|\begin{array}{rcl} x_1+x_2 & = & a_1 \\ x_2+x_3 & = & a_2 \\ x_3+x_4 & = & a_3 \\ & \vdots & \\ x_{n-1}+x_n & = & a_{n-1} \\ x_n+x_1 & = & a_n \end{array}\right|$$

Abbildung 6

Für n ungerade ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, siehe zum Beispiel [3].

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{n-1} + a_n}{2} \\
x_2 &= \frac{a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + a_{n-1} - a_n + a_1}{2} \\
x_3 &= \frac{a_3 - a_4 + \cdots - a_{n-1} + a_n - a_1 + a_2}{2} \\
\vdots \; &\; \vdots \qquad\qquad \vdots \\
x_n &= \frac{a_n - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + a_{n-1}}{2}
\end{aligned}
$$

Für n gerade hat das Gleichungssystem von Abbildung 6 nur dann Lösungen, wenn die Bedingung

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{n-1} - a_n = 0 \quad \text{erfüllt ist.}$$

In diesem zweiten Fall darf eine der Unbekannten, zum Beispiel x_1 frei gewählt werden. Die anderen Unbekannten ergeben sich durch

$$x_2 = a_1 - x_1; \;\; x_3 = a_2 - a_1 + x_1; \;\; x_4 = a_3 - a_2 + a_1 - x_1; \;\; \ldots; \;\; x_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} - \cdots + a_1 - x_1$$

Ein Vieleck mit Seitenlängen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ besitzt in beiden Fällen nur dann einen Inkreis, wenn eine Lösung $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ existiert, bei der alle x_k positiv sind.

Für n ungerade sind diese Inkreis-Konfigurationen eindeutig bestimmt, für n gerade liegt eine einparametrige Schar von Vielecken vor. Für Details und Beweise siehe [3].

Problem 2

Gegeben sind n Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ in der Ebene. Gesucht ist ein n-Eck (ein geschlossener Streckenzug) mit Eckpunkten $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ so, dass

A_1 der Mittelpunkt der Seite X_1X_2,
A_2 der Mittelpunkt der Seite X_2X_3,
A_3 der Mittelpunkt der Seite X_3X_4,
$\vdots$
A_{n-1} der Mittelpunkt der Seite $X_{n-1}X_n$,
A_n der Mittelpunkt der Seite X_nX_1 ist. (Abbildung 7 links)

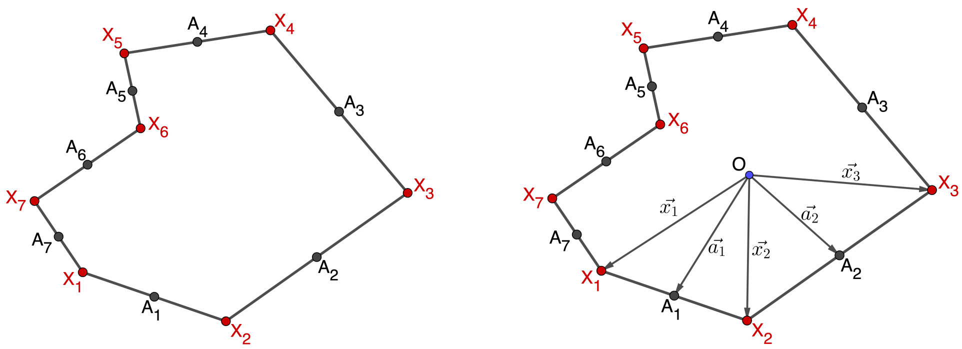


Abbildung 7: Hier ist $n = 7$

Wir führen in der Ebene ein Koordinatensystem mit Ursprung O ein (Abbildung 7 rechts). Mit den Bezeichnungen

$$\vec{a_1} = \overrightarrow{OA_1};\ \ \vec{x_1} = \overrightarrow{OX_1};\ \ \vec{a_2} = \overrightarrow{OA_2};\ \ \vec{x_2} = \overrightarrow{OX_2};\ \ \dots;\ \ \vec{a_n} = \overrightarrow{OA_n};\ \ \vec{x_n} = \overrightarrow{OX_n}$$

gilt

$$\left|\begin{array}{rcl} \frac{\vec{x_1}+\vec{x_2}}{2} & = & \vec{a_1} \\ \frac{\vec{x_2}+\vec{x_3}}{2} & = & \vec{a_2} \\ \frac{\vec{x_3}+\vec{x_4}}{2} & = & \vec{a_3} \\ \frac{\overrightarrow{x_{n-1}}+\vec{x_n}}{2} & = & \overrightarrow{a_{n-1}} \\ \frac{\vec{x_n}+\vec{x_1}}{2} & = & \vec{a_n} \end{array}\right| \iff \left|\begin{array}{rcl} \vec{x_1}+\vec{x_2} & = & 2\vec{a_1} \\ \vec{x_2}+\vec{x_3} & = & 2\vec{a_2} \\ \vec{x_3}+\vec{x_4} & = & 2\vec{a_3} \\ & \vdots & \\ \overrightarrow{x_{n-1}}+\vec{x_n} & = & 2\overrightarrow{a_{n-1}} \\ \vec{x_n}+\vec{x_1} & = & 2\vec{a_n} \end{array}\right|$$

Es ist, bis auf die Vektorpfeile und die Faktoren 2, das gleiche System wie in Abbildung 6. Wir können die Lösung(en) übertragen.

Ist n gerade, muss wie vorher

$$\vec{a_1} - \vec{a_2} + \vec{a_3} - \cdots + \overrightarrow{a_{n-1}} - \vec{a_n} = \vec{0}$$

gelten. Wie oben kann zum Beispiel $\vec{x_1}$ resp. der Punkt X_1 beliebig gewählt werden.

Für $n = 4$ heisst das

$$\vec{a}_1 - \vec{a_2} + \vec{a_3} - \vec{a_4} = 0 \iff \vec{a_2} - \vec{a_1} = \vec{a_3} - \vec{a_4} \iff \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_4A_3}.$$

Das ist die Aussage des Satzes von Varignon: Die Seitenmitten eines beliebigen ebenen Vierecks bilden ein Parallelogramm, siehe Abbildung 8.

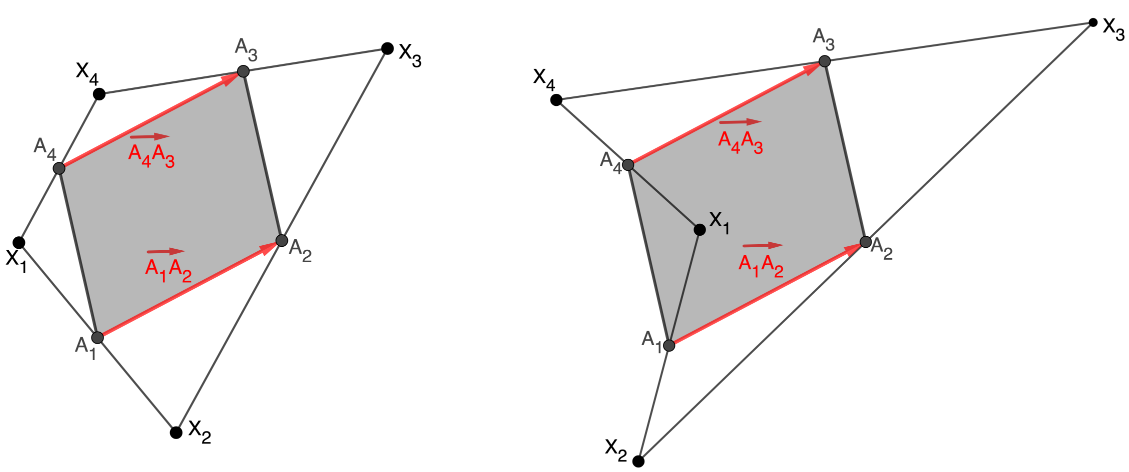


Abbildung 8: Zwei Realisierungen eines Vierecks $X_1X_2X_3X_4$
mit den vorgegebenen Seitenmitten A_1, A_2, A_3, A_4

Für (fast) jeden Punkt X_1 der Ebene ergibt sich ein entsprechendes Viereck.

Ist n ungerade, dann lässt sich die eindeutige Lösung des Systems angeben.

$$\begin{array}{rcl}
\overrightarrow{x_1} & = & \overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} - \cdots - \overrightarrow{a_{n-1}} + \overrightarrow{a_n} \\
\overrightarrow{x_2} & = & \overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4} - \cdots - \overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{a_1} \\
\overrightarrow{x_3} & = & \overrightarrow{a_3} - \overrightarrow{a_4} + \overrightarrow{a_5} - \cdots - \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} \\
 & \vdots & \\
\overrightarrow{x_{n-1}} & = & \overrightarrow{a_{n-1}} - \overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{a_1} - \cdots - \overrightarrow{a_{n-3}} + \overrightarrow{a_{n-2}} \\
\overrightarrow{x_n} & = & \overrightarrow{a_n} - \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} - \cdots - \overrightarrow{a_{n-2}} + \overrightarrow{a_{n-1}}
\end{array}$$

Damit lassen sich die Vektoren $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ mit Hilfe der Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ (resp. der Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$) berechnen und damit auch die Punkte $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Betrachten wir noch einmal die beiden Gleichungssysteme

$$\left|\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 & = & a_1 \\
x_2 + x_3 & = & a_2 \\
x_3 + x_4 & = & a_3 \\
 & \vdots & \\
x_{n-1} + x_n & = & a_{n-1} \\
x_n + x_1 & = & a_n
\end{array}\right| \quad \text{resp.} \quad \left|\begin{array}{rcl}
\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} & = & 2\overrightarrow{a_1} \\
\overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{x_3} & = & 2\overrightarrow{a_2} \\
\overrightarrow{x_3} + \overrightarrow{x_4} & = & 2\overrightarrow{a_3} \\
 & \vdots & \\
\overrightarrow{x_{n-1}} + \overrightarrow{x_n} & = & 2\overrightarrow{a_{n-1}} \\
\overrightarrow{x_n} + \overrightarrow{x_1} & = & 2\overrightarrow{a_n}
\end{array}\right|$$

Nehmen wir an, n sei ungerade, so dass es genau eine Lösung gibt. Diese Lösung kann mittels Matrizen und deren Inversen, mit Matrizen und Zeilenumfomungen, mit der Cramerschen Regel, etc. gefunden werden.

Für die beiden obigen Systeme bietet sich aber ein viel 'primitiverer' Lösungsweg an. Wir erläutern das Vorgehen am System rechts, lassen aber aus Gründen der Übersichtlichkeit die Pfeile weg.

$$\left|\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 & = & 2a_1 \\
x_2 + x_3 & = & 2a_2 \\
x_3 + x_4 & = & 2a_3 \\
 & \vdots & \\
x_{n-1} + x_n & = & 2a_{n-1} \\
x_n + x_1 & = & 2a_n
\end{array}\right|$$

Wir wählen für x_1 eine beliebige Zahl y_1 und berechnen dann sukzessive

$$\begin{aligned}
y_2 &= 2a_1 - y_1 \\
y_3 &= 2a_2 - 2a_1 + y_1 \\
y_4 &= 2a_3 - 2a_2 + 2a_1 - y_1 \\
\vdots & \;\vdots\; \vdots \\
y_n &= 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2a_{n-3} - \cdots - 2a_1 + y_1 \\
y_{n+1} &= 2a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} - \cdots + 2a_1 - y_1
\end{aligned}$$

Wir erkennen, dass $x_1 = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - a_{n-1} + a_n$ (siehe oben) gerade das arithmetische Mittel von y_{n+1} und y_1 ist!

Die Tatsache überträgt sich nun in besonders schöner Art und Weise auch auf das geometrische Problem 2: Die Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ seien gegeben. Gesucht ist ein n-Eck $X_1X_2X_3\ldots X_n$ so, dass A_i der Mittelpunkt der Strecke X_iX_{i+1} ist mit $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ und $n + 1 \equiv 1 \mod n$.

Wir wählen einen beliebigen Punkt Y_1 und spiegeln diesen zuerst an A_1, den Bildpunkt Y_2 an A_2, dann Y_3 an A_3, ..., Y_n an A_n und erhalten schliesslich einen Punkt Y_{n+1}. Weil n ungerade ist, haben wir eine ungerade Anzahl von Punktspiegelungen ausgeführt. Die Verkettung einer ungeraden Anzahl von Punktspiegelungen ist wieder eine Punktspiegelung! Der Spiegelpunkt, also das Zentrum dieser Punktspiegelung, muss der Mittelpunkt der Strecke Y_1Y_{n+1} sein. Dieser Mittelpunkt ist der gesuchte Punkt X_1. Die Punkte $X_2, X_3, \ldots, X_n$ ergeben sich dann wieder durch Punktspiegelungen.

Im nachfolgenden Beispiel ist $n = 5$. Die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sind gegeben.

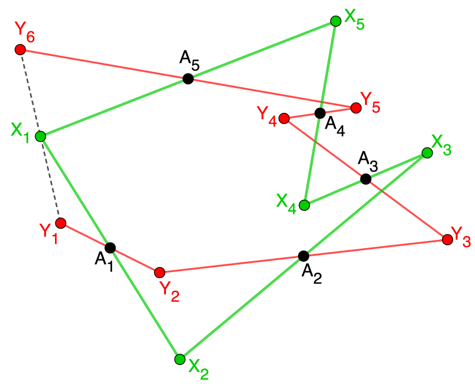


Abbildung 9: Y_1 ist beliebig gewählt. X_1 ist der Mittelpunkt der Strecke Y_1Y_6. Die Punkte X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sind die Eckpunkte des gesuchten Fünfecks.

Literaturverzeichnis

[1] Affolter W. et al., *Schweizer Zahlenbuch*, Klett und blmv, 1995, Überarbeitung 2010

[2] Affolter W. et al., *mathbu.ch*, Klett und blmv, 2003

[3] Jaggi B., *Inkreis-Konfigurationen ebener Vielecke*, Elemente der Mathematik 77 (2022), Seiten 63-74

[4] McIntosh A. und Quadling D., *Arithmogons*, Mathematics Teaching 70, p 18-23