

Fritz Gassmann  
gassmann@bluewin.ch

## Verschränkung im Schwerpunktfach

Als Grundlage für den folgenden Artikel diente die **Vierteljahrsschrift 2|2023** Seiten 6 - 13 der **Naturforschenden Gesellschaft in Zürich** ([www.ngzh.ch](http://www.ngzh.ch)), die sich an mathematisch wenig versiertes Publikum richtet. In der vorliegenden Version wurden die physikalisch-mathematischen Zusammenhänge ergänzt und in eine Form gebracht, die keine Kenntnisse der Quantentheorie voraussetzt und mathematisch das Mittelschulniveau nicht übersteigt. Zu diesem Zweck wurde eine vereinfachte Bell-Ungleichung verwendet, die an die Mengenlehre angelehnt ist und sich sehr einfach plausibel machen lässt.

Alain Aspect, John F. Clauser und Anton Zeilinger erhielten den Physik-Nobelpreis 2022 für den experimentellen Beweis eines Phänomens der Quantenphysik, dessen Existenz Albert Einstein als unmöglich erachtete, obschon es durch die erfolgreiche Quantentheorie seit 1926 vorhergesagt wurde. Verschränkung ist das einzige im Bereich der Naturwissenschaften bekannte Phänomen, das sich nicht in Raum und Zeit abspielt. Diese Erkenntnis bedeutet eine Revolution des physikalischen Weltbildes, analog etwa zur Vereinigung von Raum und Zeit durch Einsteins Relativitätstheorie.

### 1 Kontroversen um den EPR-Artikel von 1935

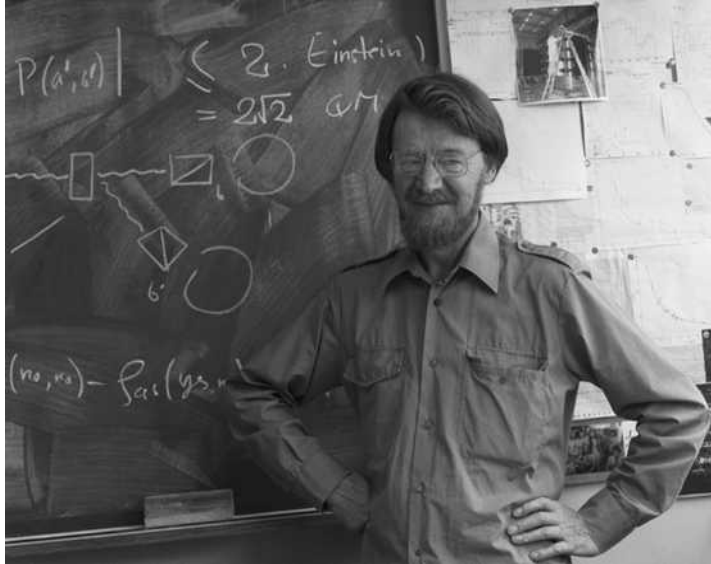
In der heute immer noch oft zitierten Publikation von Albert Einstein, Boris Podolsky und Nathan Rosen (abgekürzt EPR) diskutierten die Autoren ein Gedankenexperiment mit zwei Elementarteilchen, die beim Zerfall eines Vorgängerteilchens entstehen und diametral auseinanderlaufen. Gemäss der Quantentheorie werden beide Teilchen durch eine einzige Zustandsfunktion beschrieben, weshalb die Heisenbergsche Unschärferelation gelten muss: Man kann nicht am einen Teilchen den Ort und am anderen den Impuls gleichzeitig genau messen. Einstein hat dies als Unsinn betrachtet und als «**spukhafte Fernwirkung**» bezeichnet. Wie sollte denn nur eine Messung am einen Teilchen das entfernte Teilchen instantan beeinflussen können? Er vermutete, dass die Quantentheorie unvollständig sei und durch bislang unbekanntes «versteckte Variablen» ergänzt werden müsse. Er hoffte, dass dadurch auch die Unschärferelation und weitere schwer verständliche Eigenschaften der Quantentheorie verschwinden würden.

Erwin Schrödinger hat für die rätselhafte durch die Quantentheorie vorhergesagte Korrelation zweier voneinander entfernter Teilchen den Begriff «**Verschränkung**» geprägt. Heftige Diskussionen haben über lange Zeit zu keinem Ergebnis geführt, da man weit davon entfernt war, die Kontroverse durch ein überzeugendes Experiment zu entscheiden. Schliesslich hat man in Anbetracht der Erfolge der Quantentheorie jede weitere Beschäftigung mit dieser Frage dogmatisch als «junk science» diffamiert und Physiker, die sich dennoch darum kümmerten, als nicht ernst zu nehmende Aussenseiter stigmatisiert: «shut up and calculate!»

### 2 Die geniale Idee von Bell 1964

Der irische Physiker John Stewart Bell (1928-1990) arbeitete am CERN und benutzte ein Sabbatical im Jahr 1964 an der Stanford University, um sich in das ungelöste Problem der Quantentheorie betreffend die «versteckten Variablen» zu vertiefen. Er erkannte nebst anderen Physikern, dass es sich um einen sehr grundlegenden Unterschied zwischen den klassischen Theorien (Relativitätstheorie, Maxwellsche Elektrodynamik) und der Quantentheorie handelt. Erstere basieren auf dem Einsteinschen Konzept des «**lokalen Realismus**». Dabei bedeutet «**lokal**», dass sich Signale, Information oder sonstige Wirkungen maximal mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können und deshalb eine gegenseitige Beeinflussung zweier Teilchen erst nach einer gewissen Zeit auftreten kann. «**Realismus**» bedeutet, dass physikalische Variablen eines Teilchens

einen definierten Wert besitzen, auch bevor sie gemessen werden. Für makroskopische Körper sind beide Forderungen klar erfüllt. Elementarteilchen und sogar Moleküle bis etwa  $C_{60}$ , die durch die Quantentheorie beschrieben werden, können sich jedoch **«nichtlokal»** und **«nichtrealistisch»** verhalten, d.h. sie können gleichzeitig an mehreren Orten sein und ihre Variablen können gleichzeitig inkompatible Werte annehmen. So kann beispielsweise die Polarisation von Photonen gleichzeitig horizontal und vertikal sein; man spricht von einem überlagerten Zustand.



**Abbildung 1** – John Bell am CERN 1982. Auf der Tafel sieht man den letzten Term der Bellschen Ungleichung in der CHSH-Form (Bell 1971): ...  $P(a', b') \leq 2$  mit dem Vermerk «Einstein» um anzudeuten, dass es sich um eine «versteckte Variablen»-Theorie handelt. Darunter dasselbe Gedankenexperiment mit der Quantentheorie berechnet ergibt  $=2\sqrt{2}$ , das mit dem Wert 2.83 die Ungleichung verletzt. Darunter ist ein Teil der Skizze für ein Experiment mit verschränkten Photonen ersichtlich, das Klarheit schaffen soll, ob Einstein oder die Quantentheorie Recht hat.

Bild: CERN, CC BY 4.0

Bei seiner Suche nach einem Gedankenexperiment, das nach Umsetzung in ein reales Experiment klar entscheiden könnte, ob versteckte Variablen das Problem lösen könnten, stiess Bell auf eine Publikation des US-amerikanischen Quantenphysikers David Bohm (1917-1992) von 1957. Darin schlug der Autor vor, die versteckten Variablen, von deren Existenz dieser wie Einstein überzeugt war, mit Hilfe von Experimenten mit Photonen zu finden. Weiter fand sich auch ein Hinweis auf die Annihilations-Experimente der chinesisch-stämmigen Physikerin Chien-Shiung Wu (1912-1997) von 1949 an der Columbia University in New York, wobei senkrecht zueinander polarisierte Zwilling photons entstanden. Rückblickend stuft man diese Experimente als die erste Beobachtung von Verschränkung ein (Abb. 2).



**Abbildung 2** – Chien-shiung Wu (1912-1997) an der Columbia University 1963. Rückblickend hat Wu 1949 zum ersten Mal experimentell verschränkte Photonen nachgewiesen bei ihren Experimenten zur Bestätigung von John Wheelers Paartheorie. Ihre Messungen waren jedoch zu wenig beiweiskräftig, um versteckte Variablen auszuschliessen, weil sie nur mit senkrecht zueinander eingestellten Polarisatoren experimentierte und nur knapp jedes zweite Photon registrieren konnte. Diese Ausbeute von weniger als 50% war 1949 jedoch eine ausserordentliche Leistung. Warum wurde es versäumt, sie bei der Vergabe der Nobelpreise am 10. Dez. 2022 zu erwähnen? (vgl. Frank 2023)

Bild: Flickr's The Commons (no known copyright)

Dies inspirierte Bell, ein Gedankenexperiment mit verschränkten Photonen vorzuschlagen, das die Kontroverse betreffend versteckte Variablen entscheiden sollte, wenn es dann einmal realisiert werden könnte. Er entwickelte eine sehr allgemeingültige Ungleichung, die für jedes mögliche Experiment mit jeder möglichen auf versteckten Variablen beruhenden lokalen Theorie erfüllt sein muss (Bell 1964, 1971). Bell fand interes-

santerweise Gedankenexperimente mit Photonen, die seine Ungleichung gemäss der Quantentheorie *verletzen*. Könnte man also solche Experimente durchführen und würden die Ergebnisse mit den durch die Quantentheorie vorhergesagten übereinstimmen, wäre bewiesen, dass die Quantentheorie durch keine lokale Theorie mit versteckten Variablen ersetzt werden kann und dass Verschränkung und Nichtlokalität im Mikrokosmos real sind. Allerdings hat Bell keine Verletzung seiner Ungleichung durch Experimente erwartet, sondern eine Bestätigung des lokalen Realismus und einen «Sieg» für Einstein. Mit dem Nobelpreis 2022 wurde jedoch der «Pokal» definitiv ans **quantentheoretische nichtlokale und nichtrealistische Weltbild** verliehen. Dies bedeutet eine **Revolution des physikalischen Weltbildes** und es wäre wünschenswert, wenn ein Körnchen dieser Erkenntnis im Physik-Unterricht an den Mittelschulen ankommen würde. Der vorliegende Artikel gibt einen Hinweis, wie dies machbar wäre.

### 3 Die experimentelle Bestätigung der Verschränkung

Die drei Nobelpreisträger Alain Aspect, John F. Clauser und Anton Zeilinger haben neben vielen anderen Forschenden wesentlich dazu beigetragen, dass Bells Idee experimentell realisiert werden konnte (EPN 2023a).

Der US-amerikanische Experimentalphysiker **John Francis Clauser** (geb. 1942) leitete zusammen mit Mike Horne, Abner Shimony und George Holt (CHSH 1969) die erste experimentell testbare Bell-Ungleichung ab. Auf dieser Grundlage führte er zusammen mit Stuart Freedman 1972 ein Experiment durch, das die modifizierte Bell-Ungleichung deutlich verletzte und die Quantentheorie bestätigte. Es war ein Experiment mit einer zwei-Photonen Kaskade in Kalzium, bei der die beiden Photonen eine verschränkte Polarisation aufweisen. Dieses Experiment löste Erstaunen aus und gab den Anstoss für weitere Untersuchungen, die notwendig waren, um die Argumente der «lokalen Realisten» zu widerlegen, die im Sinne Einsteins beharrlich weiter für ihre Weltanschauung kämpften und zwei wichtige Argumente lieferten, warum die durchgeführten Bell-Tests ungenügend sein könnten. Es waren dies das sog. «Lokalitäts-Schlupfloch» und das «Detektions-Schlupfloch». Ersteres bedeutete, dass vielleicht die Polarisatorstellungen irgendwie in versteckten Variablen beiden Photonen bekannt sein könnten und es deshalb trivial ist, dass sich beide gleich benehmen würden. Das zweite Argument zielte darauf ab, dass nicht alle Photonen detektiert werden und vielleicht die Auswahl der detektierten aus irgendwelchen Gründen gerade so wäre, dass die rätselhaften Korrelationen vorgetäuscht würden, indem die Statistik durch die nicht beobachteten Photonen verfälscht würde (analog wie politische Abstimmungen durch «verlorene» Stimmzettel verfälscht werden können).

Der junge Physiker **Alain Aspect** (geb. 1947) war von den Bell-Ungleichungen derart fasziniert, dass er beschloss, seine Dissertation diesem Thema zu widmen. Er besuchte deshalb Bell am CERN, um seine Ideen für Experimente mit ihm zu besprechen (vgl. SPG 2023). 1974 begann er mit Experimenten am Institut d'Optique an der Université d'Orsay (Paris) und schloss damit seine Thèse d'Etat 1983 erfolgreich ab. Zuvor publizierte er ein Experiment mit einer enorm hohen statistischen Genauigkeit, wobei die Verletzung der entsprechenden Bell-Ungleichung über 40 Standard-Abweichungen nach einer Messzeit von nur wenigen Minuten betrug. Dies bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass das Resultat bloss per Zufall entstand, kleiner ist als die Wahrscheinlichkeit, 800 mal hintereinander eine sechs zu würfeln. Wichtig war, dass Aspect bei diesen Experimenten auch dafür sorgte, dass die Polarisation der Photonen vor dem Eintritt in die polarisierenden Strahlteiler um verschiedene Winkel gedreht wurden. Die Entscheidung, welcher der möglichen Drehwinkel gewählt wurde, fällte ein Computer auf der Basis von Zufallszahlen, *nachdem* die Zwillingphotonen erzeugt wurden. Dann folgten die Messungen der Photonen so rasch, dass auch Signale mit Lichtgeschwindigkeit zu wenig Zeit gehabt hätten, um Information zwischen den beiden Messorten auszutauschen. So wurde das «Lokalitäts-Schlupfloch» auf überzeugende Weise eliminiert und den «lokalen Realisten» blieb nur noch ein dünner Hoffnungsfaden mit dem immer noch offenen «Detektions-Schlupfloch», das am schwierigsten zu überwinden war, weil einzelne Photonen leicht verloren gehen.

Glücklicherweise entwickelten sich auch die experimentellen Möglichkeiten mit grossem Tempo weiter. 1960 wurde der Laser erfunden und 1967 wurde an nichtlinearen, doppelbrechenden Kristallen der «**Spontaneous Parametric Downconversion**»-Effekt experimentell entdeckt und auch theoretisch verstanden. Solche Kristalle produzieren aus eingestrahnten Photonen in genau bestimmten Richtungen fliegende Zwillingphotonen niedrigerer Energie, deren Polarisationen verschränkt sind. Die Ausbeute ist nur ein verschränktes

Paar auf etwa 10 Millionen bis 1 Milliarde eingestrahler Photonen, was für Experimente aber ausreicht. Auch waren die dafür notwendigen Kristalle nicht aussergewöhnlich: zum Beispiel leistet  $\text{KH}_2\text{PO}_4$  (Kaliumdihydrophosphat) gute Dienste; ein Kristall, der einfach herzustellen ist und als Zusatz für Energy-Drinks oder als Dünger für Aquariumpflanzen verwendet wird. Zusammen mit Laserdioden können damit kleine und billige Verschränkungs-Photonenquellen gebaut werden. Ab etwa 1986 wurde Downconversion das Arbeitspferd für Verschränkungsexperimente (vgl. auch Vorträge von Gassmann 2021).

Als **Anton Zeilinger** (geb. 1945) an der Universität Innsbruck zum Professor ernannt wurde, wechselte er von der Neutronenphysik auf die Photonophysik, dessen Zukunftspotenzial er damals erahnte. Bereits 1993 entdeckte er zusammen mit seiner Forschungsgruppe das Phänomen des «Verschränkungs-Austausches» (entanglement swapping), das bald im Zusammenhang mit Quantencomputern zentrale Bedeutung erlangte. 1999 wurde ihm ein Lehrstuhl für Experimentalphysik an der Universität Wien angeboten und die ganze Gruppe zügelte nach Wien. Zeilinger verstand es, seine Experimente publikumswirksam zu inszenieren, was ihm bald den Spitznamen «Mister Beam» einbrachte. So schickte er verschränkte Photonen in einem Glasfaserkabel in einem 400 Meter langen Kanal unter der Donau hindurch oder über 144 Kilometer in der Luft übers Meer zwischen La Palma und Teneriffa und erweiterte schrittweise die Distanz, über welche die «spukhafte Fernwirkung» funktioniert. Jian-Wei Pan aus China, einer seiner früheren Studenten und später Mitarbeiter in Zeilingers Gruppe, konnte 2020 diesen Rekord auf 1120 Kilometer ausdehnen und via den chinesischen Satelliten «Micius» einen Prototyp eines Quanten-Internet-Links herstellen (EPN 2023b: 24-27). Im Hinblick auf den Nobelpreis von besonderer Bedeutung war, dass Zeilinger mit seiner Forschungsgruppe ein Bell-Experiment aufbauen konnte, das alle Schlupflöcher *gleichzeitig* (nicht in separaten verschiedenen Experimenten) eliminieren konnte, womit definitiv gezeigt wurde, dass es Phänomene ausserhalb Raum und Zeit gibt.

#### 4 Die Grundidee eines Bell-Tests

Ich folge den einfach zu begreifenden Überlegungen im Wikipedia-Artikel *Bellsche Ungleichung* (vgl. Lit.) und ergänze ihn durch entsprechende mathematische Ableitungen, die für das Niveau der Mittelschule geeignet sind. Wir betrachten eine Menge von Gegenständen der makroskopischen Welt, die sich durch drei binäre Eigenschaften oder Attribute unterscheiden. Handelt es sich um eine Gruppe von Menschen, könnten wir beispielsweise als Attribut A1 den Anfangsbuchstaben des Vornamens wählen und definieren, dass A1 zutrifft, wenn der Buchstabe zwischen A und F liegt und dies mit 1 bezeichnen. Trifft A1 nicht zu, schreiben wir 0. Als Attribut A2 wählen wir auf analoge Weise den Anfangsbuchstaben des Nachnamens. Als Attribut

Nr	A1	A2	A3
1	0	0	1
2	0	1	0
3	1	0	0
4	0	1	1
5	1	0	1
6	1	0	1
7	0	1	0
8	0	0	0
9	0	0	1
10	0	1	0
11	1	1	0
12	1	0	0
13	0	1	1
14	1	1	1
15	0	0	1

**Tabelle 1** – Statistische Erhebung einer Menge mit 15 makroskopischen Elementen mit je 3 Attributen.

3 nehmen wir weiblich als 1. Tabelle 1 zeigt ein mögliches Resultat für eine Schulklasse mit 15 Mitgliedern. Wir sehen, dass die Vornamen und Nachnamen 7 und 6 mal zwischen A und F liegen und dass die Klasse 8 Mädchen umfasst. Ich werde sogleich beweisen, dass für jede beliebige mit 0 und 1 aufgefüllte Tabelle beliebiger Länge die folgende Ungleichung gilt:

$$N(A1,A2) \leq N(A1,A3) + N(A2,A3)$$

$N(A_i,A_k)$  ist die Anzahl Mitglieder, bei denen Attribut  $A_i$  und  $A_k$  zutrifft.  $A_3$  bedeutet, dass diejenigen Mitglieder der Klasse berücksichtigt werden müssen, bei denen  $A_3$  nicht zutrifft (also die nicht weiblichen, die mit 0 kodiert sind). Wir sehen, dass die Ungleichung stimmt:  $2 \leq 3 + 4$ .

Betrachten wir nun eine Klasse, die aus nur einem Mitglied besteht. Dafür gibt es 8 mögliche Tabellen (die Binärzahlen 000 bis 111). Für jede Tabelle  $0xx$  ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt, weil links eine Null steht. Aus demselben Grunde ist die Ungleichung auch für  $10x$  erfüllt. Kritisch sind nur 110 und 111 und die beiden Ungleichungen lauten:  $1 \leq 0 + 1$  und  $1 \leq 1 + 0$ . Beide sind erfüllt, d.h. jede beliebige Zeile der Tabelle 1 erfüllt die Ungleichung, womit die Ungleichung für makroskopische Körper allgemein bewiesen ist.

Bei sehr grossen Mengen kann man die drei Terme der Ungleichung durch die Anzahl Elemente der Menge dividieren und erhält so eine Wahrscheinlichkeits-Ungleichung, die den Vorteil hat, dass man die drei Terme auch in einzelnen Erhebungen mit unterschiedlichen Beobachtungszahlen gewinnen kann. Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeiten mit  $p$  für *probability*, ergibt sich:

$$p(A1,A2) \leq p(A1,A3) + p(A2, A3) \text{ M-Bell-Test}$$

Diese Überlegung macht klar, dass die Ungleichung auch gilt, wenn die drei Terme nicht simultan gemessen werden können. Die Tabelle zerfällt in diesem Fall in drei Tabellen mit je zwei Spalten. Bei den folgenden Photonen-Experimenten trifft genau dies zu.

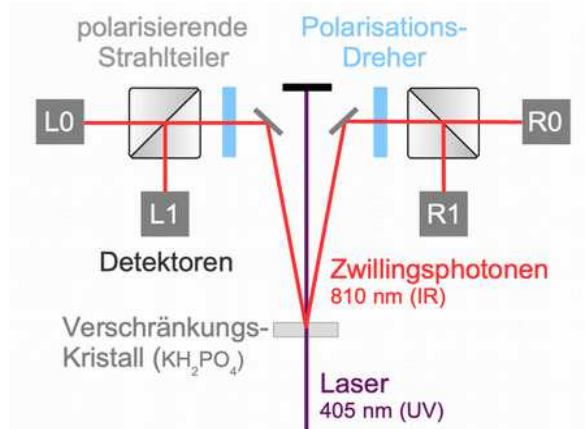
Ich bezeichne diese Ungleichung als M-Bell-Test, wobei das M für Mengenlehre steht. Bells Ungleichung ist komplizierter und basiert auf einer längeren mathematischen Herleitung. Sie beruht wie die obige Ungleichung darauf, dass Eigenschaften von Körpern *realistisch und lokal* sind. Zusätzlich enthält sie im Gegensatz zur obigen Herleitung explizit *versteckte Variablen*. Beide Ungleichungen gehören zum Typ der sogenannten Dreiecks-Ungleichungen (die Summe zweier Seiten ist grösser als die Dritte). Bell konnte seine Ungleichung mit Photonen-Experimenten verknüpfen und mit Hilfe der Quantentheorie durchrechnen. Er fand dabei erstaunlicherweise Situationen, bei denen die Ungleichung durch die Quantentheorie verletzt wird. So konnten Experimente definiert werden, die entscheiden können, ob die Quantentheorie korrekt ist oder durch versteckte Variablen ergänzt werden muss, je nachdem, ob die experimentellen Resultate den Bell-Test (wie die Theorie) verletzen oder erfüllen.

**Bemerkung:** Beim vereinfachten hier vorgestellten M-Bell-Test wird nirgends Bezug genommen auf versteckte Variablen. Deshalb ist der hier vorgeschlagene Zugang zu einer vereinfachten Bell-Ungleichung aus streng wissenschaftlicher Sicht angreifbar. Aus didaktischer Sicht ist er aber sehr geeignet: Er ist direkt und einfach verständlich und legt die Quintessenz des Bell-Tests klar dar.

## 5 Anwendung des M-Bell-Tests auf verschränkte Photonen

Die Experimente der Nobelpreisträger hatten im Prinzip den in der Abb. 3 skizzierten Aufbau. In einem Verschränkungskristall entstehen aus einem hochfrequenten Photon (violett) zwei verschränkte infrarote Photonen (rot) mit je halber Energie. In je einem Polarisationsdreher wird die Polarisation um beliebige Winkel gedreht. An der Universität Erlangen wird ein Schülerlabor betrieben, bei dem ein derartiges System zur Messung von verschränkten Einzelphotonen eingesetzt wird und im Internet wird die Apparatur detailliert beschrieben und erklärt (vgl. Lit. Uni Erlangen).

Wir berechnen nun auf der Basis der klassischen Optik (lokal-realistisch) und der Quantentheorie (nicht-lokal-nichtrealistisch), mit welchen Wahrscheinlichkeiten  $p(x,y)$  das linke Photon im Detektor L0 **und** das rechte Photon im Detektor R0 registriert werden ( $x$  und  $y$  sind die Stellungen der Polarisationsdreher links und rechts). Diese Wahrscheinlichkeiten können in Experimenten mit Hilfe von Koinzidenzzählern gemessen und mit den berechneten Werten verglichen werden.



**Abbildung 3** – Prinzipskizze der Experimente von Aspect, Clauser und Zeilinger. Mit Hilfe von Koinzidenzzählern wird gemessen, mit welcher Wahrscheinlichkeit Zwillingphotonen in L0 und R0 gelangen. Erklärungen im Text.

(Bild: Fritz Gassmann)

Wir versuchen nun, den M-Bell-Test, der für Mengen gilt, in einen M-Bell-Test für verschränkte Photonen umzuwandeln. Wir setzen für A1, A2, A3 die drei Winkeleinstellungen der Polarisationsdreher ein, also  $A1 = \alpha_1$ ,  $A2 = \alpha_2$ ,  $A3 = \alpha_3$  und erhalten die folgende Ungleichung:

$$p(\alpha_1, \alpha_2) \leq p(\alpha_1, \alpha_3) + \mathfrak{p}(\alpha_2, \alpha_3)$$

$\mathfrak{p}$  bedeutet, dass das nach rechts fliegende Photon im Detektor R1 statt R0 registriert werden soll. Die drei Terme werden in einzelnen, nacheinander ausgeführten Experimenten gemessen. Aus physikalischer Sicht ist klar (Isotropie des Raumes), dass nur *Winkeldifferenzen* und nicht deren Absolutwerte wichtig sind und dass  $\alpha_1$  auf Null normiert werden kann. Wir ordnen die Terme noch um und schreiben die Ungleichung als:

$$\mathbf{p(\alpha_2) - p(\alpha_3) - \mathfrak{p}(\alpha_3 - \alpha_2) \leq 0 \quad \text{M-Bell-Test für verschränkte Photonen}$$

### a) Lokal-realistische Rechnung (Einstein)

Wir berechnen nun die drei Koinzidenzwahrscheinlichkeiten auf der Basis eines lokal-realistischen Weltbildes, wie Einstein dies getan hätte. **Es wird angenommen, dass die beiden Photonen bereits vor der Messung eine Polarisation haben (realistisch). Da sie verschränkt sind, haben sie dieselbe Polarisation  $\xi$ , die statistisch gleichmässig über alle Winkel verteilt ist. Es findet keine weitere Wechselwirkung zwischen den beiden Zwillingenphotonen statt (lokal).** Im DMK-Teil (a) dieses Heftes ist die Berechnung der Koinzidenzwahrscheinlichkeiten  $p_{00}(\alpha) = \frac{1}{8} (2 + \cos(2\alpha))$  resp.  $p_{01}(\alpha) = \mathfrak{p}_{00}(\alpha) = \frac{1}{8} (2 - \cos(2\alpha))$  wiedergegeben. Damit ergibt sich der obige M-Bell-Test zu:

$$\frac{1}{8} (2 + \cos(2\alpha_2)) - \frac{1}{8} (2 + \cos(2\alpha_3)) - \frac{1}{8} (2 - \cos(2(\alpha_3 - \alpha_2))) \leq 0$$

Nach Umformungen und Verwendung von  $\cos(2\alpha) = 2 \cos^2\alpha - 1$  ergibt sich:

$$\cos^2\alpha_2 - \cos^2\alpha_3 + \cos^2(\alpha_3 - \alpha_2) \leq 1.5$$

Normieren wir die Ungleichung noch auf die Konstante 2 wie auf Bells Wandtafel in Abb. 1, bekommen wir die Ungleichung:

$$\mathbf{(4/3) (\cos^2\alpha_2 - \cos^2\alpha_3 + \cos^2(\alpha_3 - \alpha_2)) \leq 2 \quad \text{M-Bell-Test klassisch ist erfüllt}}$$

Die im DMK-Teil (b) wiedergegebene Berechnung des Maximums der linken Seite der Ungleichung ergibt die Winkel  $\alpha_1 = 0^\circ$ ,  $\alpha_2 = 30^\circ$  und  $\alpha_3 = 60^\circ$  und den Wert  $(4/3) (5/4) = 5/3 < 2$ , d.h. der M-Bell-Test wird durch eine klassische Rechnung (ohne versteckte Variablen) immer erfüllt.

### b) Nichtlokal-nichtrealistische Rechnung (Quantentheorie)

Wir berechnen nun die drei Koinzidenzwahrscheinlichkeiten mit der Quantentheorie. Diese Rechnung ist wesentlich einfacher und basiert auf folgenden Überlegungen. **Beide Photonen sind in einem Überlagerungszustand, haben also keine definierte Polarisation (nichtrealistisch).** Wir nehmen an, dass das linke Photon etwas früher im polarisierenden Strahlteiler ankommt als dasjenige auf der rechten Seite (diese Annahme ist unnötig, vereinfacht aber unsere Vorstellung). Das linke Photon gelangt mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  in den Detektor L0 (vgl. Erwartungswert  $\langle \cos^2\xi \rangle$  im DMK Teil (a)). Sobald dies geschieht, ist der Zustand des linken Photons bestimmt. **An diesem Vorgang erkennt man, dass im Rahmen der Quantentheorie eine Messung nicht einfach als Ablesung einer Eigenschaft interpretiert werden kann, sondern dass sie den Zustand aktiv erzeugt.** Mit dem so definierten Zustand des linken Photons ist instantan auch der Zustand des Zwillingenphotons auf der rechten Seite als parallel dazu definiert (*nichtlokal*), da verschränkte Photonen gemäss der Quantentheorie immer im gleichen Zustand sind, egal wie weit sie voneinander entfernt sind (auch astronomische Distanzen sind zugelassen!). Ohne Polarisationsdreher würde nun das rechte Photon mit Wahrscheinlichkeit 100% in den Detektor R0 gelangen. Der Polarisationsdreher dreht jedoch die Polarisation des Photons um den Winkel  $\alpha$  gegenüber dem linken. Nach dem Gesetz von Etienne Louis Malus (um 1810) ist deshalb die Wahrscheinlichkeit gleich  $\cos^2\alpha$ , dass das rechte Photon in den Detektor R0 gelangt. Damit können wir alle drei Terme der Ungleichung berechnen:

$$\frac{1}{2} (\cos^2\alpha_2 - \cos^2\alpha_3 - (1-\cos^2(\alpha_3 - \alpha_2))) \leq 0$$

Beim dritten Term ist zu beachten, dass wir die Gegenwahrscheinlichkeit  $1-\cos^2()$  einsetzen müssen: Wir berechnen also nicht die Koinzidenzwahrscheinlichkeiten L0-R0, sondern L0-R1. Wir erhalten:

$$\cos^2\alpha_2 - \cos^2\alpha_3 + \cos^2(\alpha_3 - \alpha_2) \leq 1$$

Nun normieren wir wie bei der klassischen Rechnung im Abschnitt (a) die rechte Seite der Ungleichung auf 2, indem wir mit 2 multiplizieren und erhalten:

$$2 (\cos^2\alpha_2 - \cos^2\alpha_3 + \cos^2(\alpha_3 - \alpha_2)) \leq 2 \quad \text{M-Bell-Test nach Quantentheorie wird verletzt!}$$

Wir stellen fest, dass der Klammer-Ausdruck derselbe ist wie bei der klassischen Rechnung und müssen deshalb sein Maximum nicht neu bestimmen: es ist **5/4 an der Stelle  $\alpha_1 = 0^\circ$ ,  $\alpha_2 = 30^\circ$  und  $\alpha_3 = 60^\circ$**  wie bei der klassischen Rechnung! Setzen wir dieses Maximum in die Ungleichung ein, erhalten wir  $2(5/4) = 2.5 \leq 2$  und sehen, dass die Ungleichung verletzt wird. Weiter verwandelt sich die Ungleichung in eine Gleichung, wenn alle Winkel verschwinden:  $2(1-1+1) = 2$  (vgl. dazu nächster Abschnitt 6). **Wir sehen, dass unsere Ungleichung fast alle Eigenschaften einer Bell-Ungleichung besitzt. Einzig Aussagen über versteckte Variablen lässt sie nicht zu, da diese nicht in unserem M-Bell-Test enthalten sind.**

## 6 Wasserdichte Bell-Tests

Die Physik-Nobelpreise 2022 wurden nicht mit Hilfe des oben verwendeten M-Bell-Tests durchgeführt, sondern mit Tests, in deren wesentlich schwieriger zu verstehenden Herleitungen versteckte Variablen eine wichtige Rolle spielen. Der Wert der Konstanten muss bei diesen Tests nicht auf 2 kalibriert werden, sondern die 2 ergibt sich direkt aus den Herleitungen. Aus diesem Grunde treten in der physikalischen Literatur nicht die Winkel  $0^\circ$ ,  $30^\circ$  und  $60^\circ$  auf, sondern meist die optimalen Winkel  **$0^\circ$ ,  $22.5^\circ$ ,  $45^\circ$  und  $67.5^\circ$**  (vgl. auch EPN 2023b für weitere Informationen zur Geschichte der Bell-Ungleichung und entsprechenden Experimenten).

Für eine recht verständliche Herleitung der im Abschnitt 3 erwähnten CHSH-Ungleichung sei auf *CHSH inequality* verwiesen, wo die Korrelationsfunktion  $E(a,b)$  definiert wird.  $a$  und  $b$  sind die Einstellungen der Polarisationsdreher auf der linken und der rechten Seite (vgl. Detektoren in Abb. 3). Die Korrelationsfunktion enthält alle vier möglichen Koinzidenzwahrscheinlichkeiten und lautet  $E = p_{00} + p_{11} - p_{10} - p_{01}$ . Der gemessene Erwartungswert von  $E(0,0)$  ist für verschränkte Photonen gleich dem quantentheoretisch berechneten Wert  $\langle E(0,0) \rangle = \frac{1}{2} 1 + \frac{1}{2} 1 - 0 - 0 = 1$  im Gegensatz zur klassischen Rechnung  $\frac{1}{8} (2+1) + \frac{1}{8} (2+1) - \frac{1}{8} (2-1) - \frac{1}{8} (2-1) = \frac{1}{2}$ . Für unverschränkte Photonen ist  $\langle E(0,0) \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} = 0$  für die klassische und für die quantentheoretische Rechnung sowie als Messresultat.

Die verschränkten 511 keV Photonen, die bei der Annihilation von Elektronen und Positronen entstehen, sind senkrecht zueinander polarisiert. Der gemessene und quantentheoretisch berechnete Wert ist  $\langle E(0,0) \rangle = -1$ , der klassisch berechnete Wert ist  $-\frac{1}{2}$  (vgl. Abb. 2).

$E(a,b)$  kann wie oben erwähnt als Funktion des Differenzwinkels  $E(\alpha)$  geschrieben werden. Mit den im vorigen Abschnitt benutzten Beziehungen ergibt sich:

$$\text{a) Klassisch:} \quad E_K(\alpha) = \frac{1}{8} \{ (2+\cos 2\alpha) + (2+\cos 2\alpha) - (2-\cos 2\alpha) - (2-\cos 2\alpha) \} = \frac{1}{2} \cos 2\alpha$$

$$\text{b) Quantenth.:} \quad E_Q(\alpha) = \frac{1}{2} \{ \cos^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha \} = \cos 2\alpha$$

Aus der CHSH-Herleitung gewinnt man folgende Ungleichung (ohne Kalibrierung):

$$|E(a,b) - E(a,b') + E(a',b) + E(a',b')| \leq 2 \quad \text{Bell-Ungleichung (Bell 1971)}$$

Mit einer zum DMK Teil (b) analogen Optimierungsaufgabe findet man mit Hilfe eines Systems von 3 Gleichungen die Werte für  $a, b, a', b' = 0^\circ, 22.5^\circ, 45^\circ$  und  $67.5^\circ$ . Eingesetzt in die obige Ungleichung erhalten wir für die Quantentheorie:

$$|E(22.5^\circ) - E(67.5^\circ) + E(-22.5^\circ) + E(22.5^\circ)| = |\cos 45^\circ - \cos 135^\circ + \cos -45^\circ + \cos 45^\circ| = 2\sqrt{2},$$

was die Ungleichung mit der Konstanten **2** verletzt (vgl. Wandtafel auf Abb. 1, Bell hat für  $E$  vielfach  $P$  be-

nutzt). Die Konstante 2 erhält man auch, indem man alle Winkel Null setzt. Das Maximum für die klassische Rechnung gibt dafür  $\sqrt{2}$ . Daran erkennt man, dass die Konstante 2 im Bell-Test durch mögliche versteckte Variablen mitbestimmt wird. Tatsächlich lassen sich für den Spezialfall paralleler Strahlteiler (d.h. alle Winkel Null) versteckte Variablen definieren, so dass auch die klassische Rechnung (wie die quantentheoretische)  $E(0,0) = 1$  ergibt und zur Konstanten 2 führt.

**Koinzidenzmessungen zeigen mit erdrückender Signifikanz (mit über 40 Standard-Abweichungen), dass die Berechnung nach der Quantentheorie korrekt ist. Die Quantentheorie muss also nicht durch versteckte Variablen ergänzt werden und Verschränkung ist ein reales Phänomen ausserhalb von Raum und Zeit.**

## 7 Kryptografie mit Zwilling photons

Ein junger polnischer Doktorand an der Oxford University, Artur Ekert, hat 1991 erkannt, dass die rätselhaften nicht-lokalen Quantenkorrelationen als kryptografische Schlüssel verwendet werden könnten. Diese Idee öffnete eine Tür zur Quanteninformations-Community und bereits 1995 demonstrierten Physiker der Universität de Genève die Verteilung eines Schlüssels via Glasfaserkabel der Swisscom zwischen Lausanne, Nyon und Genf (Gisin 2023). Aus diesem Projekt wurde als Spinoff 2001 die Firma «ID Quantique» in Genf gegründet. Zeilinger interessierte sich ebenfalls für Quanteninformation und patentierte 1999 sein EPR-Protokoll zum Schlüssel-Austausch.

Weshalb kann ein Schlüssel ausgetauscht werden aber trotzdem soll es unmöglich sein, damit *instantane* Informationsübermittlung zu entwickeln? Der Schlüsseltausch basiert darauf, dass zwei Stationen, L und R, von einer zwischen ihnen liegenden Quelle verschränkte Photonen erhalten und diese messen. Wenn die Polarisatoren parallel gestellt sind, gehen die Photonen bei beiden Stationen in die analogen Detektoren, d.h. beide in 0 oder beide in 1 (vgl. Abb. 3). Fasst man diese Detektornummern als Binärzahlen auf, entsteht so an beiden Stationen dieselbe binäre Zufallszahlenfolge, was äquivalent zu zwei identischen Schlüsseln ist. Es ist aber nicht möglich, diesen Vorgang zur Übertragung von Information zu verwenden, weil das ankommende Photon den Kanal 0 oder 1 zufällig auswählt und nicht gesteuert werden kann.

Zusätzlich zum Schlüsselaustausch lässt sich durch einen Bell-Test feststellen, ob jemand versucht, die Verbindung zu hacken. Zu diesem Zweck wechselt man an beiden Stationen unabhängig voneinander und zufällig die Polarisationsdreher zwischen optimalen Positionen. Durch anschliessenden Austausch der eingestellten Positionen via das normale Internet lässt sich durch einen Bell-Test feststellen, ob die Photonen verschränkt waren. Falls dabei die Bell-Ungleichung erfüllt wird, war dies nicht der Fall und der Schlüssel wird verworfen und es wird ein anderer Übertragungsweg gesucht. Dieser Test beruht darauf, dass es keinen «Quantenkopierer» gibt, d.h. dem Hacker ist es nicht möglich, das ankommende Photon zu kopieren, um es zu analysieren und die Kopie weiterzuschicken, damit niemand etwas merken sollte (die Kopie ist nicht mehr verschränkt mit dem Photon der Gegenstation).

Diese Kryptografieanwendung hat weltweit riesige Aufmerksamkeit auf sich gezogen und das Interesse vieler Forschungsgruppen auf die Quantenoptik gelenkt. In kurzer Zeit entstanden neue Ansätze zu Quantencomputern, zur Teleportation von Quantenzuständen und zum Quanten-Internet; der Weg zu Nobelpreisen wurde geöffnet.

## Literatur

Bell J.S. 1964. On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. *Physics* 1(3): 195-200.

Bell J.S. 1971. In: *Foundations of Quantum Mechanics, Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course XLIX, B. d'Espagnat (Ed.) Academic, New York, 1971, p. 171 and Appendix B.* Reproduced in: Bell J.S. 1987. *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics.* Cambridge University Press. Ableitung vgl. [https://en.wikipedia.org/wiki/CHSH\\_inequality](https://en.wikipedia.org/wiki/CHSH_inequality)

Bellsche Ungleichung: [https://de.wikipedia.org/wiki/Bellsche\\_Ungleichung](https://de.wikipedia.org/wiki/Bellsche_Ungleichung)

CHSH 1969. Clauser J.F., Horne M.A., Shimony A., Holt R.A. 1969. Proposed Experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.* 23(15): 880-884.

CHSH inequality: [https://en.wikipedia.org/wiki/CHSH\\_inequality](https://en.wikipedia.org/wiki/CHSH_inequality)

EPN 2023a: *Europhysics News* 53/5: 8-9.

EPN 2023b: *Europhysics News* 54/1: 11-31.

EPR: Einstein A., Podolsky B., Rosen N. 1935. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Phys. Rev.* 47: 777-780.

Frank M. 2023. The little-known origin story of the science that won the 2022 Nobel Prize in Physics. *Scientific American*, April 2023: 38-45.

Gassmann F. 2021. <https://www.ngzh.ch/publikationen/vortrage>, Vorträge vom 22. und 29.11.2021.

Gisin N. 2023. Quantum non-locality: from denigration to the Nobel Prize, via quantum cryptography. *Europhysics News* 54/1: 20-23.

SPG 2023: Schweizerische Physikalische Gesellschaft, *Mitteilungen* 69: 9-17.

Uni Erlangen: <https://www.quantumlab.nat.uni-erlangen.de/english/index.html>