Fritz Gassmann
gassmann@bluewin.ch

Berechnungen zum Artikel über Verschränkung

Im DPK-Teil dieses Bulletins wird ein Artikel der Vierteljahrsschrift 2|2023 der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich zusammengefasst und kommentiert. Dabei stellen sich zwei interessante mathematische Aufgaben betreffend Integration und Optimierung, die hier präsentiert werden.

a) Integrationsaufgabe

Die Aufgabe ist die Berechnung der Koinzidenzwahrscheinlichkeiten p_{00} und p_{01} für die in Abb. 3 dargestellte Apparatur. p_{00} bedeutet Koinzidenz von Signalen in den Detektoren L0 und R0, p_{01} in den Detektoren L0 und R1. Die Berechnung soll auf der Basis des *lokal-realistischen* Weltbildes nach der Auffassung Einsteins durchgeführt werden. Man nimmt an, dass beide Photonen vor ihrem Eintritt in die Strahlteiler *dieselbe* zufällige Polarisation ξ haben, da sie verschränkt sind. Messungen zeigen, dass die Polarisationen von verschränkten Photonen gleichmässig über alle Winkel verteilt sind. Man nimmt deshalb an, dass die ungemessene Polarisation ξ existiert (realistisch) und homogen verteilt ist. Im polarisierenden Strahlteiler gilt das $\cos^2$-Gesetz, das von Etienne Louis Malus bereits um 1810 in Paris entdeckt wurde (vgl. Fussnote). Danach beträgt die Wahrscheinlichkeit $\cos^2\xi$, dass ein Photon im Detektor L0 registriert wird. Mit der Gegenwahrscheinlichkeit $1-\cos^2\xi = \sin^2\xi$ wird es im Detektor L1 registriert. Der Erwartungswert bei Messung vieler Photonen wird:

$$<\cos^2\xi> \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\xi \;\, d\xi \;=\; \frac{1}{2}$$

Für jedes Photonenpaar mit der gemeinsamen Polarisation ξ ist die Wahrscheinlichkeit, dass das linke Photon in L0 und das rechte in R0 registriert wird, gleich dem Produkt der beiden einzelnen Wahrscheinlichkeiten. Nach dem Gesetz von Malus ist die Wahrscheinlichkeit auf der linken Seite $\cos^2\xi$ und diejenige auf der rechten Seite $\cos^2(\xi - \alpha)$, weil die dortige Polarisation um den Winkel α gedreht wird. Das Produkt der beiden Wahrscheinlichkeiten ist die Koinzidenzwahrscheinlichkeit für ein Photonenpaar mit Polarisation ξ. Der Mittelwert p_{00} der Koinzidenzwahrscheinlichkeit für viele Photonenpaare, die gleichmässig über alle ξ im Intervall 0 bis 2π verteilt sind, ist gleich dem Erwartungswert $<\cos^2\xi\;\cos^2(\xi - \alpha)>$:

$$p_{00} \;=\; <\cos^2\xi\;\;\cos^2(\xi-\alpha)> \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\xi\;\;\cos^2(\xi-\alpha)\,d\xi$$

Dieses Integral lässt sich elegant lösen. Zuerst verwenden wir $\cos2\xi = \cos^2\xi - \sin^2\xi$, addieren auf beiden Seiten $\cos^2\xi + \sin^2\xi$ und erhalten $2\cos^2\xi = 1 + \cos2\xi$. Damit kann der Integrand umgeschrieben werden in:

$$\cos^2\xi\;\;\cos^2(\xi-\alpha) \;=\; \frac{1}{4}\big(1+\cos2(\xi-\alpha)+\cos2\xi+\cos2\xi\;\cos2(\xi-\alpha)\big)$$

Fussnote: **Gesetz von Malus:** Der Vektor E des elektrischen Feldes bei linear polarisiertem Licht habe den Winkel α relativ zu einem Polarisator. Dieser lässt nur die Komponente $E\cos(\alpha)$ passieren. Die Lichtintensität ist proportional zum Quadrat der Feldstärke, deshalb ist der Abschwächungsfaktor $\boldsymbol{\cos^2\alpha}$ (sog. Gesetz von Malus). Die Intensität ist proportional zum Photonenfluss, also ist die Transmissionswahrscheinlichkeit der Photonen auch gleich $\boldsymbol{\cos^2\alpha}$.

Mit den Winkel-Additionstheoremen für die Kosinusfunktion lässt sich der Produktterm in eine Summe umwandeln:

$$\cos(\beta+\gamma) + \cos(\beta-\gamma) = 2 \cos\beta \cos\gamma$$

Wir substituieren $\beta = 2\xi$ und $\gamma = 2(\xi - \alpha)$ und erhalten für das gesuchte Integral:

$$p_{00} = \frac{1}{16\pi}\int_0^{2\pi} \{2 + 2\cos 2(\xi-\alpha) + 2\cos 2\xi + \cos 2(2\xi-\alpha) + \cos 2\alpha\}\, d\xi$$

Die drei mittleren Terme ergeben bei der Integration Null und wir erhalten:

$$p_{00} = \frac{1}{8}(2 + \cos 2\alpha)$$

Es ist einfach zu zeigen, dass $p_{11} = p_{00}$ und $p_{10} = p_{01}$ sind. Da die Summe aller vier Wahrscheinlichkeiten Eins ergeben muss, kann die Gegenwahrscheinlichkeit sofort bestimmt werden zu $p_{01} = ½ - p_{00}$:

$$p_{01} = \frac{1}{8}(2 - \cos 2\alpha)$$

Damit sind alle vier Koinzidenzwahrscheinlichkeiten bestimmt.

b) Optimierungsaufgabe

Für die Formulierung des Bell-Tests wird das Maximum der folgenden Funktion $f(\alpha_2, \alpha_3)$ gesucht:

$$f(\alpha_2,\alpha_3) = \cos^2\alpha_2 - \cos^2\alpha_3 + \cos^2(\alpha_3-\alpha_2)$$

Wir formen $\cos^2\alpha$ wie im Abschnitt a) um und schreiben:

$$f(\alpha_2,\alpha_3) = \frac{1}{2}\{\cos 2\alpha_2 + 1 - (\cos 2\alpha_3 + 1) + \cos 2(\alpha_3-\alpha_2) + 1\}$$

Durch die Substitution $\gamma_i = 2\alpha_i$ erhalten wir:

$$f(\gamma_2,\gamma_3) = \frac{1}{2}\{1 + \cos\gamma_2 - \cos\gamma_3 + \cos(\gamma_3-\gamma_2)\}$$

Durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen ergeben sich die Gleichungen für Extremalstellen:

$$\begin{aligned} -\sin\gamma_2 + \sin(\gamma_3-\gamma_2) &= 0 \\ +\sin\gamma_3 - \sin(\gamma_3-\gamma_2) &= 0 \end{aligned}$$

Durch Addition der beiden Gleichungen erhalten wir $\sin\gamma_2 = \sin\gamma_3$ und daraus die beiden Lösungen $\gamma_2 = \gamma_3$ und $\gamma_2 = 180^\circ - \gamma_3$. Die erste Lösung ergibt f = 1 für alle Winkel $\gamma_2 = \gamma_3$. Setzen wir die zweite Lösung ins obige Gleichungssystem ein, erhalten wir:

$\sin\gamma_2 = \sin(180^\circ - 2\gamma_2) = \sin 2\gamma_2 = 2 \sin\gamma_2 \cos\gamma_2$

Schliessen wir die Lösung $\gamma_2 = 0$ aus (sie würde mit f = 1 nichts Neues ergeben), können wir durch $\sin\gamma_2$ dividieren und erhalten $\cos\gamma_2 = ½$, also $\gamma_2 = 60^\circ$ und -60°. Daraus folgt $\gamma_3 = 180^\circ - \gamma_2 = 120^\circ$ und 240°. Da es sich bei den gesuchten Winkeln $\alpha_i = \gamma_i/2$ um Differenzwinkel zwischen zwei Polarisatorstellungen handelt, sind nur Winkel im Bereich [-90°...+90°] oder [0°...180°] sinnvoll. Wir ersetzen deshalb die Lösung $\gamma_3 = 240^\circ$, die -30° und 120° für die beiden Winkel α_i geben würde, durch die äquivalente Lösung -120°. Die gesuchten Winkel α_2 und α_3 sind also **30° und 60°** oder **-30° und -60°**, womit sich das **globale Maximum zu f = 5/4** ergibt.