

Willi Botta  
willi.botta@solnet.ch

# Ein einfacher Weg zu allen pythagoreischen Zahlentripeln

## 1. Einleitung

Im Zusammenhang mit dem Satz des Pythagoras treten pythagoreische Zahlentripel (PZT) auf, das heisst aus natürlichen Zahlen bestehende Tripel  $(a, b, c)$  mit der Eigenschaft  $a^2 + b^2 = c^2$ . Beispiele wie  $(3, 4, 5)$  oder  $(5, 12, 13)$  sind wohlbekannt, und irgendwann wird die Frage auftreten, wie viele derartige Tripel existieren und ob es für sie Bildungsgesetze gibt. Die übliche Antwort darauf ist ein Hinweis auf die „indischen Formeln“: Man wähle zwei teilerfremde natürliche Zahlen  $m$  und  $n$ ,  $m > n$ , die eine gerade, die andere ungerade. Setzt man nun  $a := m^2 - n^2$ ,  $b := 2mn$ ,  $c := m^2 + n^2$ , so ist  $(a, b, c)$  ein primitives pythagoreisches Zahlentripel, wie man leicht überprüfen kann. Primitiv bedeutet, dass der grösste gemeinsame Teiler der drei Zahlen eins ist. Es lässt sich auch zeigen, dass jedes primitive PZT mit diesem Bildungsgesetz erzeugt werden kann. Alle PZT erhalten wir, indem wir die primitiven PZT noch mit einem konstanten Faktor  $k \in \mathbb{N}$  multiplizieren.

Diese Regel ist nicht besonders einfach, und eine andere Frage, wie sich alle PZT, nicht nur die primitiven, auf einfache Art in einer eindeutigen Reihenfolge erzeugen und anordnen lassen, lässt sich damit kaum beantworten.

## 2. Herleitung eines Bildungsgesetzes

Die folgenden Überlegungen sind so einfach, dass sie auch im Unterricht bereits nach der Einführung des Satzes von Pythagoras vermittelt werden könnten. Wir gehen von einer Zeichnung aus mit Quadraten von den Seitenlängen  $a, b, c$  und achten darauf, dass gilt  $a < b < c$ ,  $a + b > c$ .

Die beiden kleineren Quadrate überschneiden sich in einem Quadrat der Seitenlänge  $d$ .

Dabei lassen sich direkt aus der Figur folgende Beziehungen ablesen:

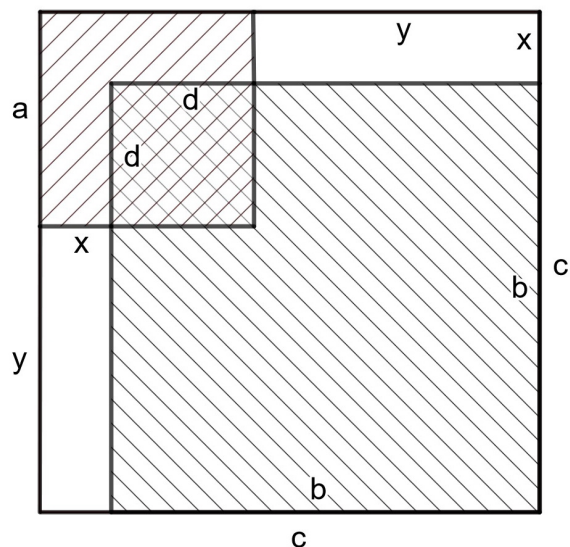
$$a = d + x, \quad b = d + y,$$

$$c = d + x + y = a + y = b + x,$$

oder in umgekehrter Richtung:

$$x = c - b, \quad y = c - a,$$

$$d = c - x - y = c - (c - b) - (c - a) = a + b - c$$



Jedem Zahlentripel  $(d, x, y)$  lässt sich somit eindeutig ein Tripel  $(a, b, c)$  zuordnen und umgekehrt.

Zum gesuchten Bildungsgesetz für pythagoreische Zahlentripel gelangen wir, indem wir den Flächeninhalt des grössten Quadrates mit der Seitenlänge  $c$  durch Teilflächen ausdrücken:

$$c^2 = a^2 + b^2 + (2xy - d^2)$$

$(a, b, c)$  ist genau dann ein (für  $x < y$  geordnetes) pythagoreisches Zahlentripel, wenn der Klammerausdruck gleich Null ist, das heisst, wenn gilt:  $xy = \frac{1}{2}d^2$ .

Dabei sind alle hier vorkommenden Variablen natürliche Zahlen.

Nun können wir zu jeder geraden Zahl  $d$  alle möglichen Paare  $(x, y)$  bestimmen,  $x < y$ , und daraus gemäss obigen Beziehungen  $a, b$  und  $c$  berechnen, etwa mit Hilfe einer Tabelle. Wenn  $x$  und  $y$  teilerfremd sind, entstehen primitive Zahlentripel, welche durch **Fettdruck** hervorgehoben sind:

$d$	$\frac{1}{2}d^2$	$x$	$y$	$a = d + x$	$b = d + y$	$c = a + y$
2	2	1	2	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
4	8	1	8	<b>5</b>	<b>12</b>	<b>13</b>
4	8	2	4	6	8	10
6	18	1	18	<b>7</b>	<b>24</b>	<b>25</b>
6	18	2	9	<b>8</b>	<b>15</b>	<b>17</b>
6	18	3	6	9	12	15
8	32	1	32	<b>9</b>	<b>40</b>	<b>41</b>
8	32	2	16	10	24	26
8	32	4	8	12	16	20
10	50	1	50	<b>11</b>	<b>60</b>	<b>61</b>
10	50	2	25	<b>12</b>	<b>35</b>	<b>37</b>
10	50	5	10	15	20	25
12	72	1	72	<b>13</b>	<b>84</b>	<b>85</b>
12	72	2	36	14	48	50
12	72	3	24	15	36	39
12	72	4	18	16	30	34
12	72	6	12	18	24	30
12	72	8	9	<b>20</b>	<b>21</b>	<b>29</b>
14	98	1	98	<b>15</b>	<b>112</b>	<b>113</b>
14	98	2	49	<b>16</b>	<b>63</b>	<b>65</b>
14	98	7	14	21	28	35
16	128	1	128	<b>17</b>	<b>144</b>	<b>145</b>
16	128	2	64	18	80	82
16	128	4	32	20	48	52
16	128	8	16	24	32	40
18	162	1	162	<b>19</b>	<b>180</b>	<b>181</b>
18	162	2	81	<b>20</b>	<b>99</b>	<b>101</b>

### 3. Geometrische Bedeutung von $d$

Zerlegt man ein beliebiges Dreieck in drei Teildreiecke, indem man die Verbindungsstrecken vom Inkreismittelpunkt zu den drei Eckpunkten einzeichnet, erhält man folgende Flächenformel für das ganze Dreieck, wobei  $\rho$  den Radius des Inkreises bezeichne:  $A = \frac{\rho(a+b+c)}{2}$ .

Im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten  $a$  und  $b$  gilt folglich für den doppelten Flächeninhalt

$$2A = ab = \rho(a + b + c)$$

$$\text{Daraus folgt } \rho = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{ab(a+b-c)}{(a+b+c)(a+b-c)} = \frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2-c^2} = \frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2-(a^2+b^2)} = \frac{ab(a+b-c)}{2ab} = \frac{a+b-c}{2} = \frac{d}{2}$$

Unter  $d$  kann man sich somit den Durchmesser des Inkreises vorstellen, und vom Inkreisradius ausgehend ist Anna Maria Fraedrich auf anderem Weg zu ähnlichen Erkenntnissen gelangt, wie beispielsweise in der Zeitschrift „MU, der Mathematikunterricht“, Heft 6/1987 nachzulesen ist.

### 4. Zahlentripel mit konstanter Kathete von ungerader Seitenlänge

Es dürfte schwierig sein, alle PZT mit derselben Hypotenuse  $c$  zu bestimmen. Hingegen ist es gut möglich, alle Tripel mit einer bestimmten Kathete zu ermitteln. Das Verfahren für eine ungerade Seitenlänge einer Kathete soll hier am Beispiel von  $a = 45$  dargestellt werden. Dann muss  $d$  eine gerade Zahl kleiner als 45 sein, und  $x = a - d$  darf als Teiler von  $\frac{1}{2}d^2$  keinen Primfaktor enthalten, der nicht auch in  $d$  vorkommt.

Wenn aber  $x$  und  $d$  denselben Primfaktor enthalten, kommt dieser auch in der Summe  $a$  dieser Zahlen vor.  $x$  muss folglich aus Primfaktoren von  $a$  zusammengesetzt sein. In unserem Beispiel gilt  $a = 45 = 3^2 \cdot 5$ , andere Primfaktoren als 3 oder 5 kommen nicht in Frage. Bei dieser Problemstellung darf die Kathete  $a$  grösser als  $b$  sein. Mindestens eine Lösung gibt es mit  $x = 1$  in jedem Fall.

$x$	$d$	$\frac{1}{2}d^2$	$y = \frac{d^2}{2x}$	$a = d + x$	$b = d + y$	$c = b + x$
1	44	968	968	45	1'012	1'013
3	42	882	294	45	336	339
5	40	800	160	45	200	205
$9 = 3^2$	36	648	72	45	108	117
$15 = 3 \cdot 5$	30	450	30	45	60	75
$25 = 5^2$	20	200	8	45	28	53
$27 = 3^3$	18	162	6	45	24	51

Würden wir für  $a$  anstelle von 45 eine ungerade Primzahl  $p$  einsetzen, könnte  $x$  nur den Wert 1 annehmen, weil  $p$  definitionsgemäss nur die Teiler 1 und  $p$  hat. Damit ergibt sich unmittelbar der folgende

**Satz: Zu jeder Kathete, deren Seitenlänge eine ungerade Primzahl ist, existiert genau ein rechtwinkliges pythagoreisches Dreieck, und zwar eines, bei dem die Hypotenuse um eine Längeneinheit grösser ist als die andere Kathete.**

In diesem Zusammenhang lässt sich eine bemerkenswerte Gesetzmässigkeit beim Umfang derartiger Dreiecke entdecken. Wenn sich die Längen einer Kathete und der Hypotenuse nur um eins unterscheiden, muss man den Umfang nicht durch Addition der drei Seitenlängen ermitteln, sondern kann ihn durch eine sehr einfache Multiplikation direkt aus der gewählten ungeraden Kathetenlänge bestimmen. Experimentieren, eine einfache Formel vermuten und beweisen ist nicht schwierig.

## 5. Zahlentripel mit konstanter Kathete von gerader Seitenlänge

Wenn  $a$  und  $d$  gerade Zahlen sind, gilt dies natürlich auch für  $x$ . Wir gehen gleich vor wie oben und wählen als Beispiel  $a = 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ .

$x$	$d$	$\frac{1}{2}d^2$	$y = \frac{d^2}{2x}$	$a$	$b$	$c$
2	126	7'688	3'844	126	3'968	3'970
$6 = 2 \cdot 3$	120	7'200	1'200	126	1'320	1'326
$14 = 2 \cdot 7$	112	6'272	448	126	560	574
$18 = 2 \cdot 3^2$	108	5'832	324	126	432	450
$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$	84	3'528	84	126	168	210
$54 = 2 \cdot 3^3$	72	2'592	48	126	120	174
$98 = 2 \cdot 7^2$	28	392	4	126	32	130

Hier fällt auf, dass keines der Tripel  $(a, b, c)$  primitiv ist. Diese Erkenntnis lässt sich verallgemeinern und gilt für alle Katheten einer Seitenlänge  $a$ , welche das Doppelte einer ungeraden Zahl ist. Handelt es sich bei dieser ungeraden Zahl um eine Primzahl, gibt es nur ein PZT, und zwar dasjenige, bei dem die Hypotenuse um 2 grösser ist als die andere Kathete.

Damit eine Kathete mit gerader Seitenlänge zu einem primitiven PZT gehören kann, muss sie somit mindestens durch 4 teilbar sein. Diese Erkenntnis hätten wir auch aus den in der Einleitung erwähnten indischen Formeln gewinnen können, denn dort ist die gerade Kathete von der Form  $b = 2mn$  mindestens durch 4 teilbar, weil ja nach Voraussetzung einer der Faktoren  $m$  oder  $n$  gerade sein muss. Vielleicht hat eine Leserin oder ein Leser an einem verregneten Nachmittag Lust, Katheten zu suchen, welche in möglichst vielen pythagoreischen Dreiecken vorkommen. Katheten mit der Seitenlänge 180 beispielsweise kommen in mehr als zwanzig PZT vor, wovon vier sogar primitiv sind.

## 6. Fast gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke

Wir wenden uns nun den speziellen PZT zu, bei denen sich die Katheten  $a$  und  $b$ , somit auch  $x$  und  $y$  nur um 1 unterscheiden. Im gleichen Artikel wie oben erwähnt zeigt die Autorin, dass man durch fortgesetzte

Multiplikation des als Vektor aufgefassten Urtripels  $(3 \ 4 \ 5)$  mit der Matrix  $V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  alle PZT mit

dieser Eigenschaft erhält. Die folgende Methode ist zwar weniger elegant, setzt aber nur elementare Mathematikkenntnisse voraus:

Da  $x$  und  $y$  als aufeinanderfolgende natürliche Zahlen teilerfremd sind und ihr Produkt  $xy = \frac{1}{2}d^2$  ist, muss einer der Faktoren eine ungerade Quadratzahl, der andere Faktor die Hälfte einer geraden Quadratzahl sein. Wir bezeichnen im Folgenden  $x$  als den ungeraden,  $y$  als den geraden Faktor, auch wenn  $x$  grösser als  $y$  ist. Wir setzen  $x := u^2$ ,  $y := \frac{1}{2}g^2$ , wobei  $u$  für eine ungerade,  $g$  für eine gerade Zahl steht. Wegen  $xy = \frac{1}{2}d^2 = \frac{1}{2}u^2g^2 = \frac{1}{2}(ug)^2$  erkennt man leicht, dass  $d = ug$  ist.

Wir finden die ersten Zahlenpaare  $(x, y)$ , indem wir ungerade Quadratzahlen suchen, die sich um genau 1 von der Hälfte einer geraden Quadratzahl unterscheiden. Dies ist erstmals der Fall bei den Quadraten von 1, 3, 7 und 17. So stossen wir auf die Paare  $(x, y) = (1, 2), (9, 8), (49, 50), (289, 288)$ . Wieder ist es hilfreich, diese Erkenntnisse in einer Tabelle zusammenzustellen:

$u$	$g$	$d = ug$	$x = u^2$	$y = \frac{1}{2}g^2$	$a = d + x$	$b = d + y$	$c = a + y$
1	2	2	1	2	3	4	5
3	4	12	9	8	21	20	29
7	10	70	49	50	119	120	169
17	24	408	289	288	697	696	985
41	58	2'378	1'681	1'682	4'059	4'060	5'741
99	140	13'860	9'801	9'800	23'661	23'660	33'461
239	338	80'782	57'121	57'122	137'903	137'904	195'025
577	816	470'832	332'929	332'928	803'761	803'760	1'136'689
1'393	1'970	2'744'210	1'940'449	1'940'450	4'684'659	4'684'660	6'625'109

Bereits nach den vier ersten Zahlenpaaren  $(u, g)$  lassen sich in den ersten beiden Spalten rekursive Bildungsgesetze fast nicht übersehen, beispielsweise in der Form:

$$(A) \quad u_{n+1} = u_n + g_n, \quad g_{n+1} = 2u_n + g_n = u_n + u_{n+1}$$

Mit diesen noch unbewiesenen Beziehungen ist obige Tabelle weitergeführt worden, und die Tatsache, dass damit tatsächlich Zahlentripel mit der gewünschten Eigenschaft entstehen, bestätigt das vermutete Bildungsgesetz. Dabei scheint die Gesetzmässigkeit zu gelten, dass alternierend  $x = y - 1$  resp.  $x = y + 1$  ist.

Um das Bildungsgesetz (A) zu beweisen, nehmen wir an, für ein beliebiges Zahlenpaar  $(u_n, g_n)$  gelte

$$u_n^2 - \frac{g_n^2}{2} = \pm 1. \text{ Dann folgt nach (A):}$$

$$(u_{n+1})^2 - \frac{(g_{n+1})^2}{2} = (u_n + g_n)^2 - \frac{(2u_n + g_n)^2}{2} = u_n^2 + 2u_n g_n + g_n^2 - 2u_n^2 - 2u_n g_n - \frac{g_n^2}{2} = -\left(u_n^2 - \frac{g_n^2}{2}\right) = \mp 1$$

Wir können (A) auch umformen und rückwärts rechnen:

$$(A') \quad u_{m-1} = g_m - u_m, \quad g_{m-1} = 2u_m - g_m$$

Damit beweisen wir indirekt, dass keine „fremden“ Paare  $(u_n, g_n)$  existieren, die mit unserem Verfahren nicht gefunden werden. Denn gäbe es solche, müsste es unter ihnen ein erstes  $(u_k, g_k)$  geben, das nicht in obiger Tabelle oder ihrer Fortsetzung vorkommt. Dann könnten wir aber gemäss (A') ein Vorgängerpaar  $(u_{k-1}, g_{k-1})$  bilden – im Widerspruch zur Voraussetzung,  $(u_k, g_k)$  sei das erste dieser fremden Paare.

Als willkommener Nebeneffekt liefern nicht nur die Quotienten  $\frac{c}{a}$  und  $\frac{c}{b}$ , sondern bereits  $\frac{g_n}{u_n}$  gute Näherungswerte für  $\sqrt{2}$ .

Für  $u_n$  und  $g_n$  existieren sogar explizite Bildungsgesetze, die an solche bei Fibonacci-Folgen erinnern, nur dass dort Ausdrücke mit der Quadratwurzel aus 5 und hier mit derjenigen aus 2 eine entscheidende Rolle spielen:

$$u_n = \frac{1}{2} \left[ (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right], \quad g_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ (1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \right].$$

Wer jetzt noch ein wenig weiterrechnen mag, kann bei diesen Dreiecken einen überraschenden Zusammenhang zwischen dem Umfang und dem Inkreisdurchmesser entdecken. Zum Beweis genügt es, in der n-ten Zeile die Seitenlängen  $a_n, b_n$  und  $c_n$  durch  $u_n$  und  $g_n$  ausdrücken.