Hans Ulrich Keller
Ehem. MNG Zürich, hukkeller@bluewin.ch

Eine Formel für S(n,k)

1. Die Aufgabe

Die Summen $S(n,k) := \sum_{m=1}^{n} m^k$ für die ersten drei Werte von $k \in \mathbb{N}_o$ sind allgemein bekannt:

$$S(n,0) = \sum_{m=1}^{n} m^0 = n\,;\;\; S(n,1) = \sum_{m=1}^{n} m^1 = \frac{n(n+1)}{2}\,;\;\; S(n,2) = \sum_{m=1}^{n} m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Mit einem Computer-Algebra-System (CAS) kann der zugehörige Term $S(n,k)$ für grössere Werte von k ohne Mühe sofort berechnet werden. So kann beispielsweise der Term $S(n,200)$ mit der simplen *Mathematica*-Anweisung `Sum[m^200,{m,1,n}]` für den Exponenten $k = 200$ auf einem einfachen PC in nur gerade 0.141 Sekunden gefunden werden! Gesucht ist hier aber eine **allgemeine Formel** für $S(n,k) = \sum_{m=1}^{n} m^k$ bei einem beliebigen Wert des Exponenten $k \in \mathbb{N}_o$.

Explizite Formeln für die Exponenten k von 1 bis 17 wurden von Johannes Faulhaber (* 5. Mai 1580 in Ulm; † 10. September 1635 ebenda, deutscher Mathematiker) berechnet, die darum 'Faulhabersche Formeln' genannt werden; diese könnten z. B. mit der Euler-Maclaurin-Summenformel elegant bewiesen werden. Die gesuchte allgemeine Formel wird, zu Ehren von Jakob Bernoulli, als 'Bernoullische Formel' bezeichnet.

2. Korrekte Vermutungen

Hier folgt eine Liste von k und $S(n,k)$ in ausmultiplizierter Form für $0 \le k \le 10$:

0	n
1	$\frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}$
2	$\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}$
3	$\frac{n^2}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^4}{4}$
4	$-\frac{n}{30} + \frac{n^3}{3} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^5}{5}$
5	$-\frac{n^2}{12} + \frac{5 n^4}{12} + \frac{n^5}{2} + \frac{n^6}{6}$
6	$\frac{n}{42} - \frac{n^3}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^7}{7}$
7	$\frac{n^2}{12} - \frac{7 n^4}{24} + \frac{7 n^6}{12} + \frac{n^7}{2} + \frac{n^8}{8}$
8	$-\frac{n}{30} + \frac{2 n^3}{9} - \frac{7 n^5}{15} + \frac{2 n^7}{3} + \frac{n^8}{2} + \frac{n^9}{9}$
9	$-\frac{3 n^2}{20} + \frac{n^4}{2} - \frac{7 n^6}{10} + \frac{3 n^8}{4} + \frac{n^9}{2} + \frac{n^{10}}{10}$
10	$\frac{5 n}{66} - \frac{n^3}{2} + n^5 - n^7 + \frac{5 n^9}{6} + \frac{n^{10}}{2} + \frac{n^{11}}{11}$

Fig. 1: k und $S(n,k)$ für $0 \le k \le 10$.

Daraus lassen sich ein paar Eigenschaften von $S(n,k)$ vermuten:

- $S(n,k)$ ist ein Polynom in n vom Grad $k+1$.
- Es kommt kein konstanter Term vor.
- Der Koeffizient von n^{k+1} ist $\frac{1}{k+1}$.
- Der Koeffizient von n^k für $k \ge 1$ ist $\frac{1}{2}$.
- Die Summe der Koeffizienten ist gleich 1.
- Die alternierende Summe der Koeffizienten ist gleich 0.
- Für ungerade $k \ge 3$ ist der Koeffizient von n gleich 0.
- Für gerade $k > 2$ ist der Koeffizient von n^2 gleich 0.

Die Richtigkeit von jeder dieser Formeln für $S(n,k)$ in Figur 1 lässt sich bei Bedarf mit vollständiger Induktion beweisen, wenn sie denn erst einmal überhaupt bekannt sein sollten!

Jakob Bernoulli (* 27. Dezember 1654$^{\text{jul.}}$ / 6. Januar 1655$^{\text{greg.}}$ in Basel; † 16. August 1705 ebenda; Schweizer Mathematiker und Physiker) fand eine allgemeine Formel für $S(n,k)$ für $k \geq 1$ (s. Gl. 1), die allerdings erst im Jahr 1713, nach seinem Tode, veröffentlicht und von Euler (!) bewiesen wurde.

Fig. 2: Portrait von Jakob Bernoulli.

$$\boxed{S(n,k) = \frac{1}{k+1} n^{k+1} + \frac{1}{2} n^k + \frac{1}{k+1} \cdot \sum_{j=2}^{k} \binom{k+1}{j} \cdot B_j \cdot n^{k+1-j}} \quad \textbf{(Gl. 1)}.$$

Dabei ist B_j die j - te Bernoulli - Zahl. Für die Bernoulli - Zahlen gibt es gemäss Louis Saalschütz 38 explizite Definitionen! Eine dieser Definitionen ist die Doppelsumme

$$B_j = \sum_{k=0}^{j} \sum_{v=0}^{k} (-1)^v \binom{k}{v} \frac{v^j}{k+1} \text{ für } j \geq 1 \text{, mit } B_0 = 1 \quad \textbf{(Gl. 2)}.$$

Die Bernoulli - Zahlen lassen sich aber auch mit Hilfe einer erzeugenden Funktion definieren. Es gilt äquivalent zur Definition in Gl. 2:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!} \cdot x^j \quad \textbf{(Gl. 3)}.$$

Diese Definition wird in Abschnitt 4 verwendet werden.

Die ersten paar Bernoulli - Zahlen sind in der folgenden Tabelle wiedergegeben:

$$\begin{pmatrix} j: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ B_j: & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{42} & 0 & -\frac{1}{30} & 0 & \frac{5}{66} \end{pmatrix} \quad \textbf{(Fig. 3)}.$$

Weil $B_1 = -\frac{1}{2}$ ist und B_j für ungerade $j > 1$ verschwindet, lässt sich Gl. 1 auch in einer dazu äquivalenten, einfachen Summe von $j = 0$ bis k schreiben (s. die folgende Gl. 4). Der Term $(-1)^j$ beeinflusst dabei einzig den Summanden mit $j = 1$:

$$\boxed{S(n,k) = \frac{1}{k+1} \cdot \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \cdot \binom{k+1}{j} \cdot B_j \cdot n^{k+1-j}} \quad \textbf{(Gl. 4)}$$

3. Eine weitere Vermutung

Mit Hilfe der Tabelle in Fig. 1 lässt sich zeigen, dass für alle angegebenen Werte von $S(n,k)$ gilt:

$$\left(\frac{d}{dn} S(n,k+1)\right) - (k+1) \cdot S(n,k) = c \quad \textbf{(Gl. 5)},$$

mit jeweils einer Konstanten c. Darum kann vermutet werden, dass auch allgemein gilt:

$$\boxed{S(n,k+1)=c\cdot n+(k+1)\cdot\int S(n,k)\,dn}\quad \textbf{(Gl. 6)}.$$

Sollte Gl. 5 allgemein gelten, so gilt Gl. 6 ebenfalls allgemein, sofern die Integrationskonstante richtig gewählt wird. Kommt in $S(n,k)$ wie vermutet nie ein konstanter Term vor, so muss beim Integral jeweils die Integrationskonstante gleich Null gewählt werden. Weiter ist in allen angegebenen Beispielen die Summe aller Koeffizienten in jeder der Formeln $S(n,k)$ für jedes k gleich 1. Wenn dies auch allgemein der Fall sein sollte, erlaubt dies, zusammen mit Gl. 6, aus $S(n,k)$ den Term $S(n,k+1)$ rekursiv zu bestimmen.

Als Beispiel sei dies für $k=5$ vorgerechnet (mit Integrationskonstante = 0):

$$S(n,6)=c\cdot n+6\cdot\int S(n,5)\,dn=c\cdot n+6\cdot\int\left(-\frac{n^2}{12}+\frac{5n^4}{12}+\frac{n^5}{2}+\frac{n^6}{6}\right)dn=c\cdot n-\frac{n^3}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{n^6}{2}+\frac{n^7}{7}.$$

Die Konstante c ergibt sich daraus, dass die Summe der Koeffizienten gleich 1 sein muss:

$$c-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}=1\quad \textbf{(Gl. 7)}.$$

Damit wird hier $c=\frac{1}{42}$, was die korrekte Formel für $S(n,6)$ (vgl. Tabelle 1) ergibt. Die Konstante c ist dabei gerade gleich der Bernoulli - Zahl $B_{k+1}=B_6$. Sollte auch dieser Zusammenhang allgemeingültig sein, dann wird aus Gl. 6 die Gleichung 8:

$$\boxed{S(n,k+1)=B_{k+1}\cdot n+(k+1)\cdot\int S(n,k)\,dn}\quad \textbf{(Gl. 8)}.$$

Bei der Integration wird auch hier, wie bereits erwähnt, die Integrationskonstante jeweils weggelassen.

Das Integral $\int S(n,k)\,dn$ 'ohne die Integrationskonstante' kann auch als $\int_0^n S(u,k)\,du$ geschrieben werden, Mit $S(n,1)=\frac{n(n+1)}{2}$ und zusammen mit Gleichung 8 kann nun $S(n,k)$ rekursiv für beliebige weitere Exponenten $k\in\{2,3,4,\ldots\}$ gefunden werden. Mit dem Term $S(1,k)$, der die Summe der Koeffizienten in $S(n,k)$ angibt, kann verifiziert werden, dass diese Summe für alle so gefundenen Terme $S(n,k)$ tatsächlich gleich 1 ist.

4. Eine Herleitung über Ableitungen

Eine Formel für $S(n,k)$ kann über Ableitungen wie folgt gefunden werden:

Wir definieren eine Funktion

$$f_n(x):=1+e^x+e^{2x}+e^{3x}+\ldots+e^{n\cdot x}\quad \textbf{(Gl. 9)}.$$

Ihre erste Ableitung ist $f_n'(x)=1e^x+2e^{2x}+3e^{3x}+\ldots+ne^{n\cdot x}$, mit $f_n'(0)=1+2+3+\ldots+n$, also gilt gerade:

$$f_n'(0)=\sum_{m=1}^{n}m^1=S(n,1)\quad \textbf{(Gl. 9.1)}.$$

Ihre zweite Ableitung ist $f_n^{''}(x) = 1^1 e^x + 2^2 e^{2x} + 3^2 e^{3x} + \ldots + n^2 e^{n \cdot x}$, mit

$f_n^{''}(0) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, also gilt gerade: $f_n^{''}(0) = \sum_{m=1}^{n} m^2 = S(n,2)$ **(Gl. 9.2)**

Verallgemeinert ist die k - te Ableitung $f_n^{(k)}(0) = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$, also gilt gerade:

$$f_n^{(k)}(0) = \sum_{m=1}^{n} m^k = S(n,k) \quad \textbf{(Gl. 10)}.$$

Für $x \neq 0$ ist $f_n(x) = 1 + e^x + e^{2x} + e^{3x} + \ldots + e^{n \cdot x}$ (s. Gl. 9) eine geometrische Reihe mit

$$f_n(x) = \frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1} \quad \textbf{(Gl. 11)}.$$

In der Form gem. Gl. 11 haben die Funktion $f_n(x)$ sowie alle ihre Ableitungsfunktionen $f_n^{(k)}(x)$ für $x = 0$ eine Unstetigkeitsstelle. Diese ist aber überall hebbar mit dem jeweiligen Übergang zum Grenzwert $x \to 0$. Daraus folgt:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f_n^{(k)}(x) = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k = S(n,k)} \quad \textbf{(Gl. 12)}.$$

Mit einem CAS wie z. B. *Mathematica* kann $S(n,k)$ auch auf diese Weise für beliebige Werte des Exponenten $k \geq 1$ sehr einfach berechnet werden.

```
In[1]:= fn[x_] := Sum[E^(k*x), {k, 0, n}]

In[2]:= Expand[Limit[D[fn[x], {x, 3}], x → 0]]
```

Out[2]= $\frac{n^2}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^4}{4}$

```
In[3]:= Expand[Limit[D[fn[x], {x, 10}], x → 0]]
```

Out[3]= $\frac{5\,n}{66} - \frac{n^3}{2} + n^5 - n^7 + \frac{5\,n^9}{6} + \frac{n^{10}}{2} + \frac{n^{11}}{11}$

Fig. 4: Beispiele für die Berechnung gem. Gl. 12.

Ohne CAS ist aber bei dieser Methode sowohl das Berechnen der k - ten Ableitungsfunktion $f_n^{(k)}(x)$ als auch die Bestimmung des Grenzwertes $\lim_{x \to 0} f_n^{(k)}(x)$ eine mühsame Angelegenheit. Und mit Gl. 12 ist natürlich auch noch keine 'allgemeine Formel' gefunden worden.

5. Zusammenhang mit den Bernoulli - Zahlen.

Für die Taylor-Entwicklung des Terms $f_n(x) = 1 + e^x + e^{2x} + e^{3x} + \ldots + e^{n \cdot x}$ (s. Gl. 9) um $x = 0$ werden die oben hergeleiteten Ableitungen $f_n^{(k)}(0)$ benötigt, die gleich $S(n,k)$ sind (s. Gl. 10). Darum gilt:

$$f_n(x) = S(n,0) + \frac{S(n,1)}{1!} x + \frac{S(n,2)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{S(n,p)}{p!} x^p + \ldots \quad \textbf{(Gl. 13)}.$$

Andererseits ist aber $\quad f_n(x) = \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) \cdot \left(\frac{e^{N \cdot x} - 1}{x} \right)$, mit $N = n + 1$ **(Gl. 14)**.

Die Funktion $\frac{x}{e^x-1}$ ist gemäss Definition die erzeugende Funktion der Bernoulli - Zahlen (s. Gl. 3):

$$\frac{x}{e^x-1}=B_0+B_1\frac{x}{1!}+B_2\frac{x^2}{2!}+\ldots+B_k\frac{x^k}{k!}+\ldots \quad \textbf{(Gl. 15)}.$$

Die Taylor-Entwicklung des zweiten Klammerterms in Gl. 14 um $x=0$ ergibt

$$\frac{e^{N\cdot x}-1}{x}=N+\frac{N^2}{2!}x+\frac{N^3}{3!}x^2+\ldots+\frac{N^{k+1}}{(k+1)!}x^k+\ldots \quad \textbf{(Gl. 16)}.$$

Jetzt kann $f_n(x)$ als Produkt dieser beiden oben beschriebenen Reihen (s. Gl. 15 und 16) geschrieben werden:

$$f_n(x)=B_0N+\left(B_0\frac{N^2}{2!}+\frac{B_1}{1!}N\right)x+\left(B_0\frac{N^3}{3!}+\frac{B_1}{1!}\frac{N^2}{2!}+\frac{B_2}{2!}N\right)x^2+\ldots$$

$$\ldots+\left(B_0\frac{N^{p+1}}{(p+1)!}+\frac{B_1}{1!}\frac{N^p}{p!}+\frac{B_2}{2!}\frac{N^{p-1}}{(p-1)!}+\ldots+\frac{B_p}{p!}N\right)x^p+\ldots \quad \textbf{(Gl. 17)}$$

Der Koeffizientenvergleich für x^p in Gl. 13 und Gl. 17 ergibt

$$\frac{S(n,p)}{p!}=\left(B_0\frac{N^{p+1}}{(p+1)!}+\frac{B_1}{1!}\frac{N^p}{p!}+\frac{B_2}{2!}\frac{N^{p-1}}{(p-1)!}+\ldots+\frac{B_p}{p!}N\right) \quad \textbf{(Gl. 18)}.$$

Nach der Multiplikation beider Seiten mit $p!$, der Resubstitution $N\to n+1$, der Substitution $p\to k$, dem Erkennen der etwas versteckten Binomialkoeffizienten und mit den entsprechenden Vereinfachungen führt dies auf die folgende Formel für $k\geq 1$:

$$\boxed{S(n,k)=1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k=f_n^{(k)}(0)=\frac{1}{k+1}\cdot\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}\cdot B_j\cdot(n+1)^{k+1-j}} \quad \textbf{(Gl. 19)}.$$

Das ist eine mögliche Form der gesuchten allgemeinen Formel, die äquivalent ist zu der von Jakob Bernoulli gefundenen Formel (s. Gl. 1 resp. Gl. 4). Die Äquivalenz kann wie folgt gezeigt werden:

Für $N=n+1$ gilt:

$$S(N,k)=S(n,k)+N^k=\underbrace{\left(\frac{1}{k+1}\cdot\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}\cdot B_j\cdot N^{k+1-j}\right)}_{gem.\ Gl.\ 19}+N^k \quad \textbf{(Gl. 20)}.$$

Mit der gleichen Begründung wie bei der Herleitung von Gl. 4 aus Gl. 1 ist dieser Term gleich

$$S(N,k)=\frac{1}{k+1}\cdot\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\cdot\binom{k+1}{j}\cdot B_j\cdot N^{k+1-j} \quad \textbf{(Gl. 21)}.$$

Die Gleichung 21 gilt für beliebige $N>0$ (und als Bonus sogar für $N=0$), und sie ist für $k\geq 1$ nach der Substitution $N\to n$ identisch mit der Gleichung 4, die ihrerseits – wie bereits gezeigt – äquivalent ist zur ursprünglichen Gleichung 1 nach Jakob Bernoulli: QED.

Weil $S(n,k)=1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$ eine arithmetische Folge $(k+1)$ - ter Ordnung ist, gilt auch: $S(n,k)=a_{k+1}n^{k+1}+a_kn^k+\ldots+a_1n+a_0$. Für $n=1$ ist darum $S(1,k)=1^k=1$ auch gleich der Summe der Koeffizienten: $\sum_{j=0}^{k+1} a_j = 1$. Dies war oben bereits vermutet worden. Die Formel gemäss Gl. 21 ergibt für $n = 1$ wie erwartet bei jedem $k \geq 0$ ebenfalls tatsächlich den Wert $\underbrace{S(1,k)}_{gem. Gl. 21} = 1$.

6. Nachtrag: Eine einfachere Rekursionsformel

Sind die Formeln für $S(n,k) = \sum_{m=1}^{n} m^k$ für $k \in \{0,1,2,3,...,k_o\}$ bekannt, dann lässt sich $S(n,k_o+1)$ mit der 'Teleskopmethode' recht einfach rekursiv herleiten. Dies soll am Beispiel $k_o = 2$ gezeigt werden. Als bekannt gilt hier also $\sum_{m=1}^{n} m^0 = n$, $\sum_{m=1}^{n} m^1 = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{m=1}^{n} m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, und gesucht ist $S(n,3)$.

Dazu wird allgemein ein Term $T_{k_o+2} := \sum_{m=1}^{n} \left[(m+1)^{k_o+2} - m^{k_o+2} \right]$ **(Gl. 22)** definiert. Im Beispiel wird dies $T_4 = \sum_{m=1}^{n} \left[(m+1)^4 - m^4 \right]$, was gleich $T_4 = \sum_{m=1}^{n} \left[m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1 - m^4 \right]$ **(Gl. 23)** ist.

Die m^4 verschwinden, und es folgt: $T_4 = 4 \cdot \underbrace{\sum_{m=1}^{n} m^3}_{S(n,3)} + 6 \cdot \underbrace{\sum_{m=1}^{n} m^2}_{S(n,2)} + 4 \cdot \underbrace{\sum_{m=1}^{n} m^1}_{S(n,1)} + 1 \cdot \underbrace{\sum_{m=1}^{n} m^0}_{S(n,0)}$ **(Gl. 24)**.

Andererseits gilt auch: $T_4 = 2^4 - 1^4 + 3^4 - 2^4 + ... - ... + n^4 - (n-1)^4 + (n+1)^4 - n^4$ **(Gl. 25)**; dieser Term vereinfacht sich 'teleskopartig' zu $T_4 = (n+1)^4 - 1$ **(Gl. 26)**.

Damit wird aus Gl. 21: $\underbrace{(n+1)^4 - 1}_{T_4} = 4 \cdot S(n,3) + 6 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 1 \cdot n$ **(Gl. 27)**.

Aus dieser Gleichung 27 ergibt sich sofort das richtige Resultat $S(n,3) = \frac{n^2}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^4}{4}$ **(Gl. 28)**, was äquivalent ist zu der besser bekannten Form der Formel $S(n,3) = \sum_{m=1}^{n} m^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$ **(Gl. 29)**.

Die Berechnung in obigem Beispiel kann nun entsprechend mit $k_o \in \{3, 4, 5, ...\}$ wiederholt werden. Damit ist ein weiterer rekursiver Algorithmus gefunden worden, mit dem $S(n,k)$ für grössere Exponenten k gefunden werden kann.

6. Literatur

- Michael Penn, www.youtube.com/watch?v=5gSpXslx39U.
- Norman Schaumberger, Pi-Mu-Epsilon Journal, 1976, Vol. 6, No. 5, pp. 281 ff.
- Existsforall Academy, www.youtube.com/watch?v=z25imPmrxR0.
- Alexander Farrugia: www.youtube.com/watch?v=QTHT5YPQ6qM
- Terence P. Hui: www.youtube.com/watch?v=Ki-_9LsE8VI

- Saalschütz, Louis (1893), Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen. Berlin: Julius Springer.
- Greg Orosi: A Simple Derivation Of Faulhaber's Formula; Applied Mathematics E-Notes, 18(2018), 124 - 126.
- Portrait von J. Bernoulli: Dank an Mediathek WDR© zum Stichtag 16. August 1705.

Weitere interessante Links:

- Mathologer Burkard Polster: www.youtube.com/watch?v=fw1kRz83Fj0.
- James Tanton: www.youtube.com/watch?v=-rGJc8aLWZU
- Terence P. Hui: www.youtube.com/watch?v=ZvVGbMkFwxM