Beat Jaggi
jaggibe@outlook.com

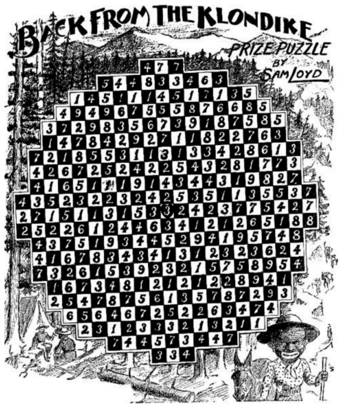
# Rätsel von Sam Loyd und Diophantische Gleichungen

## 1 Einleitung

Sam Loyd (1841 - 1911) war und ist einer der bekanntesten und kreativsten Erfinder von Rätseln, mathematischen Problemen und auch von Schachproblemen („Matt in zwei, drei, ... Zügen“).

Berühmt ist zum Beispiel „Back from the Klondike“ (Aufgabe 74 in [1]): Unter Einhaltung bestimmter Regeln gilt es, einen Ausweg aus dem Zahlenschema der Abbildung unten links zu finden.

Bei „Get Off the Earth“ (Abbildung, Mitte und rechts) verschwindet durch eine Drehung der „Erde“ ein Krieger!? Gesucht ist eine Erklärung.






Viele Rätsel von Sam Loyd erschienen in Zeitungen und Zeitschriften oder wurden als Werbegeschenke verkauft.
Nach Loyds Tod gab dessen Sohn eine Reihe von Sammelbänden heraus, darunter 1914 eine *Cyclopedia of Puzzles* mit mehr als 5000 Rätseln.
1959 und 1960 hat Martin Gardner (Wissenschaftsjournalist und 25 Jahre lang Autor der Kolumne „Mathematical Games“ in *Scientific American*) zwei Bücher veröffentlicht, *Mathematical Puzzles* resp. *More Mathematical Puzzles of Sam Loyd*. Diese Werke sind 1978 auf Deutsch erschienen, mit Neuauflagen 2020 ([1]) und 2015 ([2]), und enthalten 283 ausgewählte Aufgaben.

Typisch ist, dass Sam Loyd viele seine Rätsel in mehr oder weniger glaubwürdige Geschichten verpackt und mit Zeichnungen illustriert hat. Einige dieser Geschichten führen auf sogenannte Diophantische Gleichungen. Ebenso typisch ist auch, dass bei Sam Loyd sehr oft nur Lösungen, aber keine Lösungswege angegeben sind. Dieses Manko soll hier, wenn auch nur mit wenigen Beispielen, behoben werden.

# 2 Diophantische Gleichungen

Diophantische Gleichungen, benannt nach dem griechischen Mathematiker Diophantes von Alexandria (um 100 - 350 ?), sind algebraische Gleichungen, für die nur ganzzahlige Lösungen gesucht sind. In den allermeisten Fällen hat eine Diophantische Gleichung mindestens zwei Unbekannte.

Das berühmteste Beispiel ist wohl

$$x^n + y^n = z^n \text{ mit } n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Es ist schon lange bekannt, dass es für $n = 2$ unendlich viele Lösungen gibt, die Pythagoräischen Zahlentripel:

$x = r^2 - s^2, y = 2rs, z = r^2 + s^2$ mit natürlichen Zahlen $r > s$. Siehe zum Beispiel [3], Seite 231.

1994 hat Andrew Wiles (1953 - ) die sogenannte Fermatsche Vermutung bewiesen:
Für $n > 2$ hat die Gleichung (1) keine nichttrivialen ganzzahligen Lösungen.

## 2.1 Lineare Diophantische Gleichungen mit zwei Unbekannten

Die wohl einfachste Diophantische Gleichung ist

$$ax + by = c \text{ mit vorgegebenen ganzen Zahlen } a, b, c \tag{2}$$

Diese Gleichung hat dann und nur dann Lösungen, wenn $\mathrm{ggT}(a, b) \mid c$.

Eine partikuläre Lösung $(x_0, y_0)$ kann mit dem (erweiterten) Euklidischen Algorithmus gefunden werden, die allgemeine Lösung lautet dann $x = x_0 + kb,\ \ y = y_0 - ka$ mit $k \in \mathbb{Z}$, siehe zum Beispiel [3], Seiten 5ff und Seiten 212ff.

Es folgen zwei Rätsel von Sam Loyd, die auf eine Gleichung von Typ (2) führen.

**Zwanzig Bonbons** (Aufgabe 116 in [2])
Tommy, Willy, Maggy und Ann kauften für zwanzig Cents zwanzig Bonbons. 1 Gummibonbon kostet 4 Cent, 4 Drops kosten 1 Cent und je zwei Schokobonbons 1 Cent. Wieviel haben die Kinder von jedem gekauft?

Lösung: Sei $x$ die Anzahl der gekauften Gummibonbons, $y$ die Anzahl der Drops und $z$ die Anzahl der Schokobonbons.

Dann muss $x + y + z = 20$ und $4x + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 20$ gelten. Multipliziert man die zweite Gleichung mit 4 und subtrahiert dann die erste Gleichung, ergibt sich

$$15x + z = 60$$

Eine partikuläre Lösung kann man leicht erraten, zum Beispiel $x_0 = 4,\ \ z_0 = 0$. So lautet die allgemeine Lösung $x = 4 - k,\ \ z = 15k$.
Mit diesen Werten wird dann $y = 20 - x - z = 20 - 4 + k - 15k = 16 - 14k$. Weil $x, y, z$ nicht negativ sein dürfen, muss $k = 1$ oder $k = 0$ gewählt werden.

$k = 1$ liefert $x = 3,\ \ y = 2,\ \ z = 15,\ \ k = 0$ ergibt $x = 4,\ \ y = 16,\ \ z = 0$.

Antwort: Die Kinder haben entweder 3 Gummibonbons, 2 Drops und 15 Schokobonbons gekauft oder 4 Gummibonbons und 16 Drops. (Diese zweite Lösung fehlt in [2].)

**Für 1 Dollar Briefmarken** (Aufgabe 62 in [1])
Eine Dame gab dem Postbeamten am Schalter eine Dollarnote für Briefmarken und sagte: „Geben Sie mir ein paar Marken zu 2 Cents, zehnmal so viele zu 1 Cent und für den Rest 5-Cent-Briefmarken.“ Was tut der Beamte, um ihr diesen etwas verwirrenden Wunsch zu erfüllen?

Lösung: Sei $x$ die Anzahl der 2-Cent-Marken und $y$ die Anzahl der 5-Cent-Briefmarken.

Dann gilt:

$$x \cdot 2 + 10 \cdot x \cdot 1 + y \cdot 5 = 100 \text{ oder } 12x + 5y = 100$$

Weil 5 ein Teiler ist von 100, kann eine partikuläre Lösung auch hier leicht erraten werden: $x_0 = 0,\ \ y_0 = 20$.

Die allgemeine Lösung ist dann: $x = 0 + 5k,\ \ y = 20 - 12k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Wegen $x > 0,\ \ y > 0$ muss $k = 1$ und damit $x = 5$ und $y = 8$ sein.

Antwort: Der Beamte gab der Frau 5 Marken à 2 Cent, 50 Marken à 1 Cent und 8 Marken à 5 Cent.

Wenn wir die eine partikuläre Lösung nicht erraten könnten, wenden wir den (erweiterten) Euklidischen Algorithmus auf die Zahlen 12 und 5 an:

$$\begin{aligned} 12 &= 2 \cdot 5 + 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \end{aligned}$$

Daraus erhält man $1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2 \cdot (12 - 2 \cdot 5) = 12 \cdot (-2) + 5 \cdot 5$ oder $100 = 12 \cdot (-200) + 5 \cdot 500$. Eine Lösung lautet also $x_0 = -200,\ \ y_0 = 500$ und die allgemeine Lösung demnach $x = -200 + 5k$, $y = 500 - 12k$. Wegen $x > 0,\ \ y > 0$ muss hier $k = 41$ gewählt werden, was ebenfalls zu $x = 5,\ \ y = 8$ führt.

## 2.2 Lineare Diophantische Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten

Eine naheliegende Verallgemeinerung der Gleichung (2) ist die Erweiterung auf $n$ Unbekannte:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c \tag{3}$$

Auch hier muss, damit Lösungen existieren, $\mathrm{ggT}(a_1, a_2, , a_n) \mid c$ gelten, siehe [3].
Wir können deshalb gerade $\mathrm{ggT}(a_1, a_2, , a_n) = 1$ annehmen.
Weiter können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ annehmen, andernfalls ersetzen wir bei den Indices $j$ mit $a_j < 0$ einfach $x_j$ durch $-x_j$.

Leider lässt sich das Verfahren von oben mit dem (erweiterten) Euklidischen Algorithmus nicht direkt auf Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten übertragen.

Deshalb wird im Folgenden ein etwas anderes Verfahren vorgeschlagen, siehe [3]:

Sei $a_k$ der kleinste (positive) Koeffizient in (3). Ist $a_k = 1$, dann wählen wir für jede der Unbekannten ausser $x_k$ eine ganze Zahl und setzen $x_k = c - a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_{k-1}x_{k-1} - a_{k+1}x_{k+1} - a_{k+2}x_{k+2} - \cdots - a_nx_n$.

(Das ist zum Beispiel bei der Gleichung $15x + z = 60$ von „Zwanzig Bonbons“ der Fall. Wir wählen also $x = k$ und setzen $z = 60 - 15k$. Auch so bekommen wir alle Lösungen der Gleichung.)

Andernfalls dividieren wir alle anderen Koeffizienten mit Rest durch $a_k$ und ersetzen dann jeweils $a_l$ durch $q_la_k + r_l$. So können wir $a_k$ ausklammern und die Summe in der zugehörigen Klammer durch eine neue Variable ersetzen.

Durch Wiederholen dieses Prozesses werden die Koeffizienten immer kleiner, (mindestens) einer davon wird schliesslich gleich 1 und wir können die Gleichung nach der zugehörigen Unbekannten auflösen.

Damit können wir dann alle Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch $n-1$ ganzzahlige Variablen ausdrücken.

Wir illustrieren das Vorgehen zuerst an der Aufgabe „Für 1 Dollar Briefmarken“, siehe oben.

Die auftretende Gleichung lautet $12x + 5y = 100$. Der ggT von 12 und 5 ist 1.

$$\begin{aligned}
12x + 5y &= 100 && \\
(2\cdot 5 + 2)x + 5y &= 100 && \text{(Division mit Rest von } 12 \text{ mit } 5) \\
5(2x + y) + 2x &= 100 && \text{Wir setzen } 2x + y = y',\ \ x = x' \\
5y' + 2x' &= 100 && \\
(2\cdot 2 + 1)y' + 2x' &= 100 && \text{(Division mit Rest von } 5 \text{ mit } 2) \\
2(2y' + x') + y' &= 100 && \text{Wir setzen } 2y' + x' = x'',\ \ y' = y'' \\
2x'' + y'' &= 100 \quad \Longrightarrow && y'' = 100 - 2x''
\end{aligned}$$

Aus $y'' = 100 - 2x''$ lassen sich jetzt zuerst $x', y'$ und schliesslich $x, y$ durch $x''$ ausdrücken.

$$x' = x'' - 2y' = x'' - 2y'' = x'' - 2(100 - 2x'') = 5x'' - 200 \quad \Longrightarrow \quad x = x' = 5x'' - 200$$

$$y' = y'' = 100 - 2x'' \quad \Longrightarrow \quad y = y' - 2x = 100 - 2x'' - 10x'' + 400 = 500 - 12x''$$

Es sind, bis auf die Bezeichnungen, die gleichen Lösungen wie oben.

Hier eine weitere Aufgabe von Sam Loyd: (Der ursprüngliche Text wurde gekürzt.)

**Chinesisch in bar** (Aufgabe 111 in [1])

Die Chinesen haben schon viele tausend Jahre vor der christlichen Zeitrechnung Münzen geprägt und als Geld verwendet.
Als Bargeld verwendeten sie Messingmünzen mit einem runden, quadratischen oder dreieckigen Loch in der Mitte.
Angenommen, elf Münzen mit runden Löchern seien 15 Bits, elf mit quadratischen Löchern 16 Bits und elf mit dreieckigen Löchern 17 Bits wert, dann sagen Sie mir bitte, wieviele Münzen mit runden, quadratischen oder dreieckigen Löchern nötig wären, um diesen fetten, kleinen Hund im Wert von 11 Bits zu kaufen.

Lösung: Ist
$x$ die Zahl der Münzen mit rundem Loch,
$y$ die Zahl der Münzen mit quadratischem Loch und
$z$ die Zahl der Münzen mit dreieckigem Loch, dann wird

$$\frac{15}{11}x + \frac{16}{11}y + \frac{17}{11}z = 11 \text{ oder } 15x + 16y + 17z = 121.$$

$$
\begin{aligned}
15x + 16y + 17z &= 121 && \text{(15 ist der kleinste Koeffizient.)}\\
15x + (1 \cdot 15 + 1)y + (1 \cdot 15 + 2)z &= 121 && \text{(Division mit Rest von 16 und 17 mit 15)}\\
15(x + y + z) + y + 2z &= 121 && \text{Wir setzen } x + y + z = x',\ \ y = y',\ \ z = z'\\
15x' + y' + 2z' &= 121 \quad \Longrightarrow && y' = 121 - 15x' - 2z'
\end{aligned}
$$

Aus $y' = 121 - 15x' - 2z'$ lassen sich jetzt $x, y, z$ durch $x'$ und $z'$ ausdrücken.

$$
\begin{aligned}
y &= y' = 121 - 15x' - 2z'\\
z &= z'\\
x &= x' - y - z = x' - 121 + 15x' + 2z' - z' = 16x' + z' - 121
\end{aligned}
$$

mit $x', z' \in \mathbf{Z}$ beliebig.

Wir suchen nichtnegative Lösungen:
Aus $y = 121 - 15x' - 2z' \geq 0$ folgt wegen $z' \geq 0$ sicher $x' \leq \frac{121}{15} = 8.0\overline{6}$.
Aus $y = 121 - 15x' - 2z' \geq 0$ folgt $2z' \leq 121 - 15x'$ und
aus $x = 16x' + z' - 121 \geq 0$ folgt $2z' \geq 242 - 32x'$.
Also wird $242 - 32x' \leq 121 - 15x'$ oder $17x' \geq 121$ und damit $x' \geq \frac{121}{17} \approx 7.1$.

Somit muss $x' = 8$ und wegen $y = 121 - 15x' - 2z' \geq 0$ schliesslich $z' = 0$ gelten.

Damit erhalten wir dann $x = 16 \cdot 8 + 0 - 121 = 7$, $y = 121 - 15 \cdot 8 - 0 = 1$ und $z = z' = 0$.

Antwort: Mit 7 Münzen mit rundem Loch und einer Münze mit quadratischem Loch kann der Hund im Wert von genau 11 Bits gekauft werden.

**Ein ehrliches Strandvergnügen** (Aufgabe 56 in [1])

Neulich sah ich mir zusammen mit einem Freund die Attraktionen auf Coney Island an, und dabei lernten wir kennen, was uns jemand als das ehrlichste Spiel am ganzen Strand anpries. Da waren zehn kleine Figuren, die man mit einem Ball umwerfen musste. Der Mann sagte: „Für einem Cent haben Sie einen Wurf, und Sie können werfen, so oft Sie wollen, und so dicht herangehen, wie Sie wollen. Zählen Sie die Zahlen auf den Figuren, die Sie umwerfen zusammen, und wenn Sie genau 50 haben, nicht mehr und nicht weniger, erhalten Sie eine prächtige 25-Maggie-Cline-Zigarre mit einem Goldband drum herum.“ Unser Geld war alle, noch bevor wir heraus hatten, wie man eigentlich gewinnen konnte, ausserdem fiel uns auf, dass eine ganze Menge Leute genauso wenig Maggie-Cline-Zigarren rauchten wie wir. Wissen Sie, wie man genau 50 Punkte macht?

Lösung: Die Zahlen auf den Figuren (von links oben nach rechts unten) liefern die Gleichung

$$25q + 27r + 3s + 12t + 6u + 15v + 9w + 30x + 21y + 19z = 50$$

Der kleinste Koeffizient ist 3. Wir setzen

$25 = 8 \cdot 3 + 1$, $27 = 9 \cdot 3$, $12 = 4 \cdot 3$, $6 = 2 \cdot 3$, $15 = 5 \cdot 3$, $9 = 3 \cdot 3$, $30 = 10 \cdot 3$, $21 = 7 \cdot 3$, $19 = 6 \cdot 3 + 1$.

Die Gleichung wird

$$3(8q + 9r + s + 4t + 2u + 5v + 3w + 10x + 7y + 6z) + q + z = 50.$$

Mit $8q + 9r + s + 4t + 2u + 5v + 3w + 10x + 7y + 6z = s'$,
$q = q',\ \ r = r',\ \ t = t',\ \ u = u',\ \ v = v',\ \ w = w',\ \ x = x',\ \ y = y',\ \ z = z'$
erhalten wir

$$3s' + q' + z' = 50 \ \text{ oder } \ z' = 50 - 3s' - q'.$$

$$\begin{aligned} s &= s' - 8q' - 9r' - 4t' - 2u' - 5v' - 3w' - 10x' - 7y' - 6z' \\ &= s' - 8q' - 9r' - 4t' - 2u' - 5v' - 3w' - 10x' - 7y' - 6(50 - 3s' - q') \\ &= 19s' - 2q' - 9r' - 4t' - 2u' - 5v' - 3w' - 10x' - 7y' - 300. \end{aligned}$$

Jede Wahl von neun ganzen Zahlen für $s', q', r', t', u', v', w', x', y'$ liefert eine Lösung
$q = q',\ \ r = r',\ \ s = 19s' - 2q' - 9r' - 4t' - 2u' - 5v' - 3w' - 10x' - 7y' - 300,$
$t = t',\ \ u = u',\ \ v = v',\ \ w = w',\ \ x = x',\ \ y = y',\ \ z = z' = 50 - 3s' - q'$
der Gleichung.

Leider ist die Frage nach nichtnegativen Lösungen schwierig. Es braucht eine andere Idee:

Betrachten wir noch einmal die Gleichung

$$3(8q + 9r + s + 4t + 2u + 5v + 3w + 10x + 7y + 6z) + q + z = 50.$$

Wegen $50 = 3 \cdot 16 + 2$ können wir diese Gleichung in der Form

$$3(8q + 9r + s + 4t + 2u + 5v + 3w + 10x + 7y + 6z - 16) = 2 - q - z$$

schreiben.

Die zehn Unbekannten können nur die Werte 0 oder 1 annehmen und $2 - q - z$ muss ein Vielfaches von 3 sein. Das ist nur mit $2 - q - z = 0$ oder also $q = z = 1$ möglich.

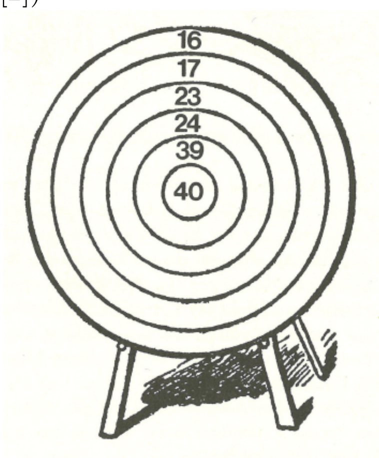
Zu $q$ und $z$ gehören die Figuren mit den Zahlen 25 und 19.

$25 + 19 = 44$: Es fehlt noch die Figur mit der Zahl 6.

Antwort: Man muss die Figuren mit den Zahlen $6, 19$ und $25$ umwerfen, um 50 Punkte zu machen.

Zum Abschluss noch einmal zwei Rätsel zum Selberlösen.

**Bogenschiessen** (Aufgabe 92 in [2])




Wieviele Pfeile braucht man, um auf der Zielscheibe genau 100 Punkte zu erzielen?

Die zugehörige Diophantische Gleichung lautet: $16u + 17v + 23w + 24x + 39y + 40z = 100$.

**Pistolenschiessen** (Aufgabe 86 in [1])


Als alter Schützenveteran, der an vielen Wettkämpfen teilgenommen hat, war ich natürlich brennend an dem Pistolenschiessen interessiert, das kürzlich über Kabel ausgetragen wurde und bei dem die Amerikaner ihre Überlegenheit über die Franzosen unter Beweis stellten.
Im Verlauf des Wettkampfes tauchten einige Fragen auf, die unsere Rätselfreunde ganz bestimmt interessieren werden. Hier habe ich zum Beispiel eine, die ich sehr nett fand, und ich bin fest davon überzeugt, dass Sie für die Mühe, die Sie auf sich nehmen, um sie zu beantworten, voll entschädigt werden. Einer der Schützen kam mit sechs Schuss auf 96 Punkte, aber man musste schon sehr genau hinsehen, um zu erkennen, dass er drei „Dubletten“ geschossen hatte, wie das Kunststück, mit zwei Kugeln das gleiche Loch zu treffen, genannt wird. Wissen Sie, wie man mit drei Dubletten eine Gesamtpunktzahl von 96 erzielt?

Die zugehörige Diophantische Gleichung lautet: $1s + 2t + 3u + 5v + 10w + 20x + 25y + 50z = 48$.
Zudem muss $s + t + u + v + w + x + y + z = 3$ gelten.

## Literatur

[1] Loyd, Sam und Gardner, Martin: *Mathematische Rätsel und Spiele*, Dumont Taschenbücher, 2020

[2] Loyd, Sam und Gardner, Martin: *Vom Küken zum Ei*, *Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele*, Dumont Taschenbücher, 2015

[3] Niven, Ivan; Zuckerman Herbert S.; Montgomery Hugh L.: *An Introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley & Sons, Inc. 1991

Für [3] siehe auch

`https://editorialdinosaurio.wordpress.com/wp-content/uploads/2012/03/itn-niven.pdf`