Christian Aebi
Collège Calvin, christian.aebi@edu.ge.ch

L'irrationalité d'une pyramide régulière

Le but de cette note est de prouver que toute pyramide régulière à base carrée doit compter parmi les mesures de son volume, de l'aire de ses faces et de la longueur de ses arêtes un nombre irrationnel. Pour y parvenir nous parcourons des résultats classiques d'arithmétique. Le seul prérequis que nous admettons est le corollaire du lemme d'Euclide (LE) : *si un produit de nombres premiers entre eux est un carré alors chaque facteur est un carré.*

Lemme 1. *Supposons que $a, b, c \in \mathbb{N}$, pgcd$(a, b) = 1$, a est impair et*

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1}$$

Alors il existe m et n de parités différentes et premiers entre eux tels que $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$.

Démonstration. Si on observe l'équation ci-dessus modulo 4, on voit que b est pair et donc c est impair. Puisque $\text{pgcd}(\frac{c+a}{2}, \frac{c-a}{2}) = 1$, alors par (LE), $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{c+a}{2} \cdot \frac{c-a}{2}$ est le produit de deux carrés premiers entre eux. En posant $\frac{c+a}{2} = m^2$ et $\frac{c-a}{2} = n^2$, on obtient la conclusion, puisque $c = m^2 + n^2$ est impair. □

Lemme 2. *Supposons que $a, b, c \in \mathbb{N}$, pgcd$(a, b) = 1$, $a > b$ et*

$$a^2 + b^2 = 2c^2. \tag{2}$$

Alors il existe m et n de parités différentes et premiers entre eux tels que $a = m^2 + 2mn - n^2$, $b = \left|m^2 - 2mn - n^2\right|$ et $c = m^2 + n^2$.

Démonstration. En observant à nouveau l'équation modulo 4, nous voyons que a, b, c sont tous impairs. Posons $\frac{a+b}{2} = x$ et $\frac{a-b}{2} = y$, que nous vérifions facilement être premiers entre eux et de parités différentes. En remplaçant a par $x + y$ et b par $x - y$ dans (2) on obtient $x^2 + y^2 = c^2$. Ainsi, si x est impair alors par le Lemme 1, $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$ et $c = m^2 + n^2$, ce qui, une fois substitué ci-dessus, donne le résultat souhaité. Dans le cas contraire, a et c restent inchangés et $b = 2mn - m^2 + n^2$. □

Théorème 1. *Si a, b sont premiers entre eux et de parités différentes, alors il n'y a pas de solution entière à l'équation*

$$a^4 - b^4 = c^2. \tag{3}$$

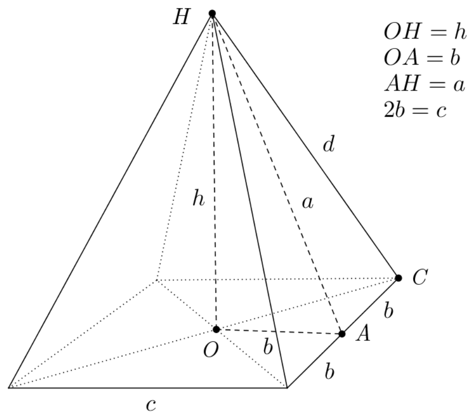
Démonstration. Par l'absurde. Considérons la plus petite solution possible pour b. L'équation (3) modulo 4 implique que a est impair et b est pair. En factorisant (3) et en appliquant (LE), nous voyons que $a^2 + b^2 = f^2$, $a^2 - b^2 = g^2$, et donc $2a^2 = f^2 + g^2$ avec f, g premiers entre eux. Par le Lemme 2, $f = m^2 + 2mn - n^2$ et $g = \left|m^2 - 2mn - n^2\right|$, avec m et n premiers entre eux. En substituant dans l'égalité $2b^2 = f^2 - g^2$ on obtient

$$b^2 = 4mn(m - n)(m + n). \tag{4}$$

Par (LE) $m = u^2$, $n = v^2$ et $w^2 = \frac{b^2}{4u^2v^2}$, donnant $w^2 = u^4 - v^4$, analogue à (3). Mais, (4) implique $b^2 = 4u^2v^2(u^4 - v^4) > v^2$, ce qui contredit la minimalité de b. □

Théorème 2. *Il ne peut exister de pyramide centrée à base carrée dont les longueurs des arêtes, les aires des faces et le volume soient tous des nombres entiers naturels.*

Démonstration. Par l'absurde. Soit une pyramide de hauteur h, à base carrée de côté $2b = c \in \mathbb{N}$. Les arêtes des faces latérales mesurent $d \in \mathbb{N}$ et les hauteurs de ces dernières issues du sommet de la pyramide mesurent a, comme illustré ci-dessous. Par hypothèse sur l'aire et le volume, $\frac{ac}{2} \in \mathbb{N}$, $\frac{c^2}{3}h \in \mathbb{N}$ et donc $a \in \mathbb{Q}$ et $h \in \mathbb{Q}$.



Par le théorème de Pythagore sur CAH on a

$$(2a)^2 = (2d)^2 - c^2 \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Or, si le carré d'un nombre rationnel $2a$ est un entier alors $2a \in \mathbb{N}$. En observant (5) modulo 4, on déduit que c est pair et donc $a \in \mathbb{N}$. Par le même argument que ci-dessus sur AOH on a

$$(2h)^2 = (2a)^2 - c^2 \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

ce qui implique $h \in \mathbb{N}$ par un argument modulo 4. Ainsi, toutes les grandeurs en lettres latines sur la figure ci-dessus sont des entiers naturels strictement positifs. Remarquons que si $k = \operatorname{pgcd}(a, b)$ alors $k \mid d$ et $k \mid h$ en observant l'équation de Pythagore sur CAH et AOH. En divisant toutes les grandeurs par k on peut donc supposer que $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$. Remarquons que d et a sont les hypoténuses des triangles à côtés entiers CAH et AOH respectivement et sont donc impairs, d'où b est pair. Finalement, le produit de (5) par(6), légèrement remanié donne une différence carrée de deux bicarrés $a^4 - b^4 = (dh)^2$, parfaitement analogue à (3) et donc contredisant le Théorème 1. □

Historique. Le Lemme 1 caractérise les triplets pythagoriciens primitifs, connus certainement depuis l'époque babylonienne. Le Lemme 2 est une solution d'un problème de Fibonacci sur les suites arithmétiques de carrés. Enfin, le Théorème 1 est un cas particulier d'une équation célèbre de Fermat.

Remerciements. Un grand merci à Fabien Friedli pour ses commentaires très pertinents, ainsi qu'à Grant Cairns, qui a réussi à localiser le résultat précédent dans la littérature, [1], page 135, problème 41. L'ouvrage contient de nombreux problèmes des Olympiades et leurs solutions, mais malheureusement il n'y a pas de corrigé pour ledit problème.

Références

[1] D. Djukić, V. Jankivić, I. Matić, N. Petrović *The IMO Compedium*, Springer-Verlag, (2004)