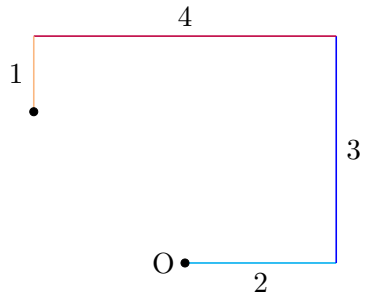
Guido Lob
CMSI, guido.lob@edu.ti.ch

La risoluzione grafica di equazioni – Il metodo di Lill

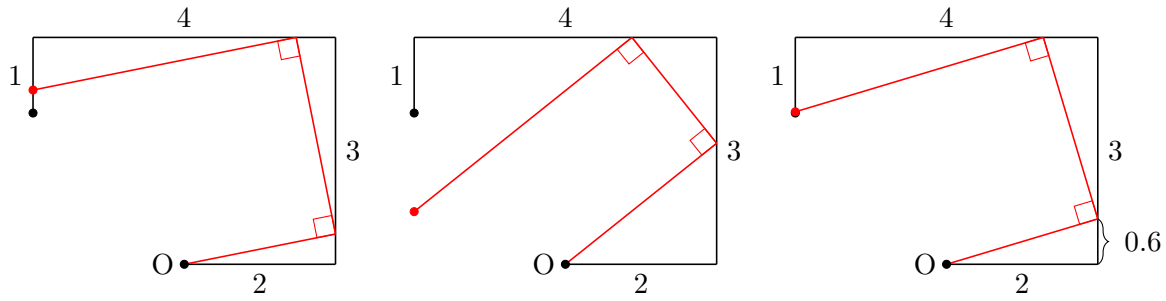
Per risolvere equazioni polinomiali si conoscono solitamente metodi algebrici o numerici relativamente freddi. Esiste però un sorprendente metodo geometrico per risolvere equazioni di qualunque grado detto Metodo di Lill presentato in modo molto elegante da Burkard Polster nel suo canale YouTube `Mathologer` (`https://www.youtube.com/watch?v=IUC-8P0zXe8`). Per capire il meccanismo iniziamo da un esempio e supponiamo di voler risolvere l'equazione

$$2x^3 + 3x^2 + 4x + 1 = 0.$$

Partiamo disegnando una spirale rettangolare basando le lunghezze sui coefficienti come segue:



Adesso supponiamo di avere un laser (particolare) posto nell'origine O che rimbalza formando degli angoli retti ogni volta che incide su di una parete (per provare, utilizzare l'applet `https://www.qedcat.com/misc/lill_method/`):



Il risultato di Lill dice che quando il punto di arrivo del laser coinciderà con il punto finale avremo trovato la soluzione e che questa sarà (meno) la pendenza del primo tratto di laser.

Possiamo verificare che nel terzo caso la pendenza è $\frac{0.6}{2} = 0.3$ e che effettivamente

$$2 \cdot (-0.3)^3 + 3 \cdot (-0.3)^2 + 4 \cdot (-0.3) + 1 = 0.016$$

dunque è con ottima approssimazione una soluzione.

La formalizzazione di percorso e laser

Specifichiamo le definizioni formali del percorso e del comportamento del laser per evitare ambiguità.

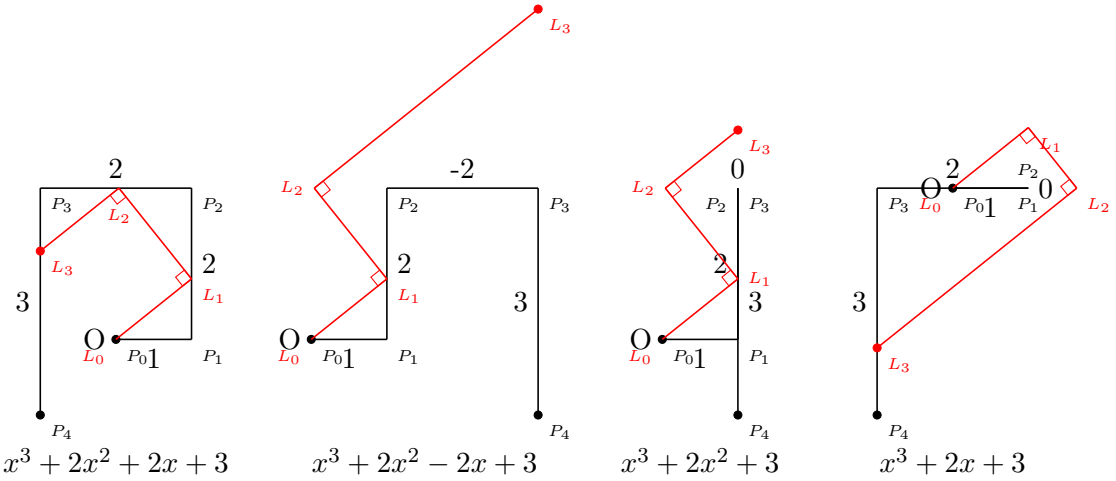
Definizione 1. Il polinomio $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ definisce un percorso come segue:

1. Si fissa un punto $P_0 = O$ una direzione unitaria di partenza e si fissa $a_i = a_0$, il primo coefficiente.
2. Si procede di a_i unità raggiungendo il punto P_{i+1} poi si ruota in senso antiorario di 90°.
3. Si ripete il punto precedente con il prossimo coefficiente ($i \mapsto i + 1$) finché non sono terminati.

In particolare vale che

- se un coefficiente è negativo, il cammino procede nella direzione opposta;
- se un coefficiente è zero non avviene alcuna traslazione, ma avviene comunque la rotazione.

Raffiguriamo alcune delle possibili situazioni con i relativi cammini:



$x^3 + 2x^2 + 2x + 3$ $x^3 + 2x^2 - 2x + 3$ $x^3 + 2x^2 + 3$ $x^3 + 2x + 3$

Mentre per quanto riguarda il comportamento del laser:

1. Il laser è inizialmente una retta passante per $L_0 = O$ con un angolo iniziale dato.
2. Il laser interseca la perpendicolare al segmento L_iP_{i+1} passante per P_{i+1}, formando il punto L_{i+1}. Il prossimo laser-retta avrà pendenza perpendicolare a quella corrente.
3. Si ripete il passaggio precedente per $i \mapsto i + 1$ finché si è raggiunto l'ultimo punto di riflessione.

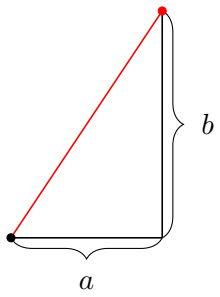
Esercizio 1. Fissando l'origine in O e utilizzando il sistema di riferimento canonico esprimi il punto di arrivo della spirale tramite una serie.

La dimostrazione matematica

Per semplicità invece di lavorare subito con equazioni di grado generale cominciamo come di consueto dal basso e consideriamo equazioni di grado $1, 2$ e infine 3.

Equazioni di primo grado

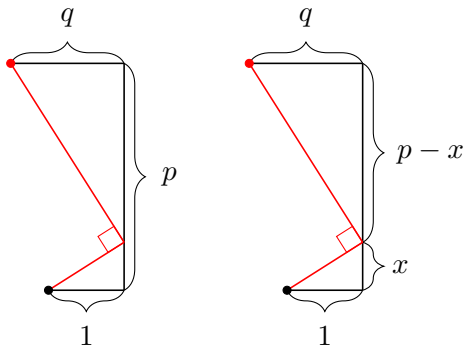
Per equazioni di primo grado della forma $ax + b = 0$ spiegare perché si possa puntare direttamente il laser tra i due punti e leggere la pendenza è immediato:



La pendenza è infatti $\frac{b}{a}$ e naturalmente $x = -\frac{b}{a}$ è la soluzione di $ax + b = 0$.

Equazioni di secondo grado

Per equazioni di secondo grado il discorso diventa più interessante. Per semplicità consideriamo la situazione monica della forma $x^2 + px + q = 0$ e disegniamo il cammino corrispondente.



Supponiamo ora di puntare il laser così che la pendenza sia x. in questo modo il segmento p sarà diviso nella parte x e nella parte $p - x$. Guardando gli angoli notiamo che i due triangoli sono simili e di conseguenza vale

$$\frac{x}{1} = \frac{q}{p-x} \iff (p-x)x = q \iff x^2 - px + q = 0.$$

A questo punto possiamo riscrivere tutto come

$$(-x)^2 + p \cdot (-x) + q = 0$$

per vedere che $-x$ è la soluzione della nostra equazione originale come volevasi dimostrare.

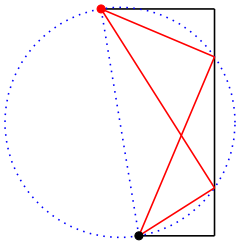
La risoluzione con riga e compasso

Attualmente per trovare la soluzione dobbiamo andare a tentativi sfruttando per esempio un software o una squadra. Nel caso dell'equazione quadratica è però possibile sfruttare la geometria e risolvere l'equazione tramite riga e compasso.

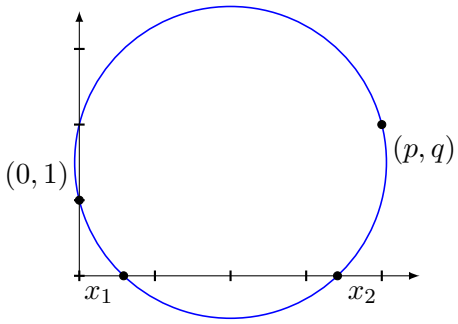
Dobbiamo infatti trovare il punto sul segmento verticale così che l'angolo sia retto, sappiamo però che

Teorema 1 (Talete)**.** *Dato un segmento tutti i punti sulla circonferenza con il segmento come diametro insistono su di esso un angolo retto e viceversa.*

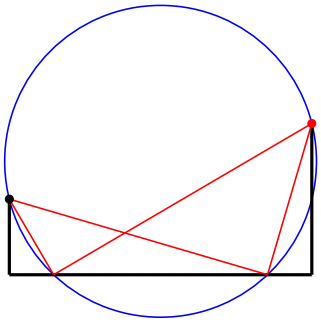
Per questo possiamo formare il cerchio di Talete con il segmento dal punto di inizio e di fine come diametro e i punti d'interesezione con il secondo segmento daranno le soluzioni dell'equazione



Osservazione 1 (Cerchio di Carlyle). Questa soluzione è equivalente al cosidetto cerchio di Carlyle, il quale dice che per risolvere l'equazione $x^2 - px + q = 0$ è sufficiente disegnare il cerchio con i punti $(0, 1)$ e (p, q) come diametro e leggere le soluzioni dell'equazione dalle intersezioni del cerchio con gli assi.



Il cerchio di Carlyle



L'interpretazione con il metodo di Lill

Il discriminante

Considerando la spirale relativa all'equazione $2x^2 + 2x + 3 = 0$ ci si accorge immediatamente che indipendentemente da come si posiziona la squadra per simulare il laser non è possibile raggiungere il punto di arrivo. Ne consegue che l'equazione è impossibile da risolvere geometricamente.

Calcolando il discriminante Δ algebricamente notiamo che effettivamente $\Delta = -8$ dunque è corretto dire che l'equazione non ha soluzioni. Come possiamo dunque legare i due aspetti precisamente? Per rispondere a questa domanda, chiediamoci:

Domanda 1. Considerando il cammino generico di $x^2 + px + q$ disegnato precedentemente, dove bisogna puntare il raggio laser sul segmento verticale affinché arrivi il più a sinistra possibile?

Tramite qualche tentativo si intuisce che il massimo si ottiene quando si punta il laser esattamente a metà del segmento verticale, ossia quando $x = \frac{p}{2}$. In quel caso si ottiene uno spostamento orizzontale pari a

$$x \cdot (p - x) = \frac{p}{2}\left(p - \frac{p}{2}\right) = \frac{p^2}{4}.$$

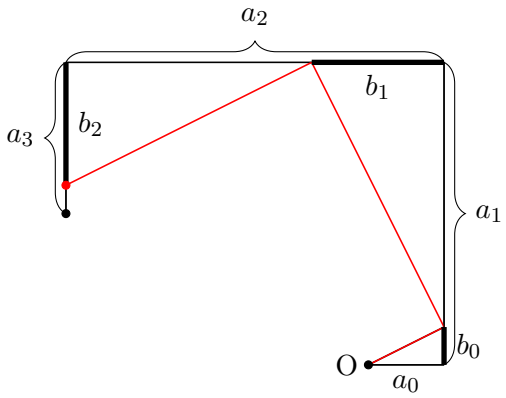
Di conseguenza è possibile ottenere una soluzione se e solo se $q \leq \frac{p^2}{4}$ ossia se $0 \leq p^2 - 4q$ il che è esattamente il criterio del Δ nel caso del polinomio quadrico monico.

Equazioni di grado superiore

In modo analogo al precedente vogliamo dimostrare che l'opposto del rapporto incrementale è una soluzione anche con un'equazione di terzo grado

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

dove la scelta particolare degli indici dei coefficienti è per praticità nelle formule generali che seguiranno. Per questo utilizziamo i tre triangoli simili che si formano:



Per la similitudine vale che:

$$\frac{b_0}{a_0} = \frac{b_1}{a_1 - b_0} = \frac{b_2}{a_2 - b_1}.$$

Poniamo ora il rapporto tra i lati $x = \frac{b_0}{a_0}$ così che

$$b_0 = a_0x,$$

e riscriviamo b_1 utilizzando x e i coefficienti a_3, a_2, a_1, a_0:

$$x = \frac{b_1}{a_1 - b_0} \implies b_1 = x \cdot (a_1 - b_0) = x \cdot (a_1 - a_0x) = -a_0x^2 + a_1x$$

e poi b_2:

$$\frac{b_2}{a_2 - b_1} = x \implies b_2 = x \cdot (a_2 - b_1) = x \cdot (a_2 - (-a_0x^2 + a_1x)) = a_0x^3 - a_1x^2 + a_2x.$$

Portando b_2 a destra, notiamo che se $b_2 = a_3$ allora

$$a_0(-x)^3 + a_1(-x)^2 + a_2(-x) + a_3 = 0,$$

ossia $x_0 = -\frac{b_0}{a_0}$ è la soluzione dell'equazione

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0.$$

Osservazione 2. La dimostrazione per laser che fuoriescono dai segmenti come pure per gradi superiori è analoga: come per le espressioni ottenute per il grado 3 si può dimostrare per induzione che

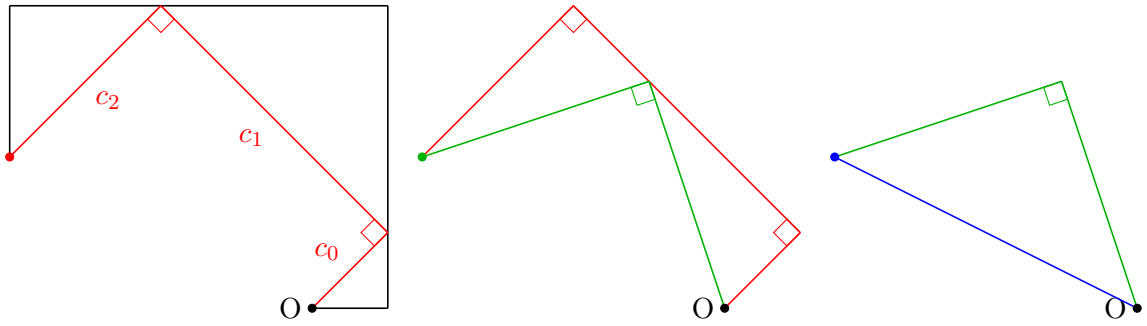
$$b_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \cdot a_i \cdot x^{n-i+1}.$$

Tra risoluzione iterativa e divisione polinomiale

Consideriamo il polinomio

$$p(x) = (x+1)^2(x+2) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2.$$

Per costruzione sappiamo che potremmo identificare due soluzioni disegnando la spirale corrispondente e puntando il laser in $x = 1$ e $x = 2$ ma c'è di più: notiamo che se consideriamo il percorso del laser come nuovo percorso e leggiamo le soluzioni corrispondenti possiamo determinare iterativamente tutte le soluzioni dell'equazione originale:



$x_0 = 1$ $\qquad$ $x_1 = 2$ $\qquad$ $x_2 = 1$

Questo non è chiaramente un caso: la realtà è che il metodo di Lill non solo permette di trovare soluzioni ma esegue addirittura la divisione polinomiale. Partendo dai coefficienti per il terzo grado determinati nel caso precedente, combinando Pitagora e la similitudine otteniamo che se x_0 è la pendenza del primo segmento e i c_i sono le lunghezze dei rispettivi segmenti del percorso del laser vale

$$\begin{aligned}
c_0 &= \sqrt{a_0^2 + b_0^2} &&= \sqrt{a_0^2 + (a_0x_0)^2} &&= \sqrt{1+x_0^2}\cdot a_0 \\
c_1 &= c_0 \cdot \frac{b_1}{b_0} &&= \sqrt{1+x_0^2}\cdot a_0 \cdot \frac{-a_0x_0^2 + a_1x_0}{a_0x_0} &&= \sqrt{1+x_0^2}\cdot(-a_0x_0 + a_1) \\
c_2 &= c_0 \cdot \frac{b_2}{b_0} &&= \sqrt{1+x_0^2}\cdot a_0 \cdot \frac{a_0x_0^3 - a_1x_0^2 + a_2x_0}{a_0x_0} &&= \sqrt{1+x_0^2}\cdot(a_0x_0^2 - a_1x_0 + a_2)
\end{aligned}$$

dunque notiamo che il cammino risultante corrisponde a

$$q(x) = \sqrt{1+x_0^2}\cdot(a_0x^2 + (-a_0x_0 + a_1)x + (a_0x_0^2 - a_1x_0 + a_2)),$$

che non è altro che il quoziente di $p(x) \div (x - x_0)$ riscalato di $\sqrt{1+x_0^2}$.

Osservazione 3. Per gradi superiori la dimostrazione è analoga: dalle espressioni ottenute per il grado 3 si può infatti dimostrare per induzione che

$$c_n = \sqrt{1+x_0^2}\cdot\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\cdot a_i \cdot x_0^{n-i}$$

Ne consegue che:

- possiamo eseguire geometricamente la divisione polinomiale modulo riscalamento;
- siccome si può eseguire la divisione polinomiale, per Ruffini è quindi possibile trovare iterativamente tutte le soluzioni del polinomio (con molteplicità) utilizzando ogni successivo percorso.

Esercizio 2. Argomenta perché un polinomio divisibile per $x^2 + 1$ genera un percorso chiuso.