

Das mathematische Fadenpendel

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, 8001 Zürich

Einleitung

Es gibt zwei Formen von mathematischen Pendeln: Das am häufigsten verwendete ist ein idealisiertes Stangenpendel, bei dem ein Massenpunkt an einer masselosen, starren Stange hängt. Weniger oft betrachtet wird das idealisierte Fadenpendel, bei dem ein Massenpunkt an einem undehnbaren, flexiblen, masselosen Faden hängt. Solange das Pendel nicht über die horizontale Lage hinaus schwingt, muss man nicht zwischen diesen beiden Formen unterscheiden. Wenn es über die Waagrechte hinaus schwingt, so hält die Stange den Massenpunkt auf einer Kreisbahn, während der Faden das nicht immer schafft. Das Fadenpendel löst sich unter Umständen von der Kreisbahn und folgt einer Wurfparabel.

Parabelbahnen

Das Fadenpendel löst sich von der Kreisbahn, wenn die radiale Komponente der Fallbeschleunigung grösser als die Zentripetalbeschleunigung wird (Abbildung 1).

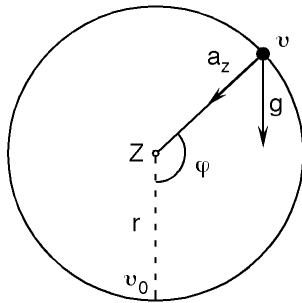


Abbildung 1: Die zentripetale Komponente der Beschleunigung der Pendelmasse hat den Betrag

$$a_z = \frac{v^2}{r}$$

Die radiale Komponente der Fallbeschleunigung ist

$$g_z = g \cos \varphi$$

Das Kreiszentrum liege im Nullpunkt eines (x/y)-Koordinatensystems mit y-Achse nach oben.

Das Pendel habe im tiefsten Punkt die Bahngeschwindigkeit $v_0 = \sqrt{fgr}$ mit dem freien Parameter f . Ist $f \leq 2$, so schwingt das Pendel nicht über die Horizontale durch das Kreiszentrum hinaus. Ist $f \geq 5$, so beschreibt das Pendel einen vollen Kreis. Im Bereich $2 < f < 5$ fällt die Pendelmasse in den Kreis hinein. Beim momentanen Winkel φ folgt aus dem Energiesatz für die Bahngeschwindigkeit

$$v^2 = v_0^2 - 2gh = fgr - 2g \cdot (r - r \cos \varphi).$$

Für den Winkel φ , an dem die Kreisbewegung in eine Wurfbahn übergeht, erhält man somit die Bedingung

$$\frac{v^2}{r} = -g \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{2-f}{3}$$

An der Ablösestelle ist dann die momentane Bahngeschwindigkeit

$$v^2 = \frac{gr}{3} \cdot (f-2) = -gr \cos \varphi$$

Dort beginnt eine Wurfparabel mit Abwurfwinkel $\alpha = \varphi$ gegen die Horizontale. Diese Parabel hat die Gleichung

$$y = -r \cos \varphi + \tan \varphi \cdot (x - r \sin \varphi) + \frac{1}{2r \cos^3 \varphi} \cdot (x - r \sin \varphi)^2$$

Die trigonometrischen Funktionen liessen sich noch eliminieren, aber die Gleichungen reichen aus, um Abbildung 2 zu erzeugen.

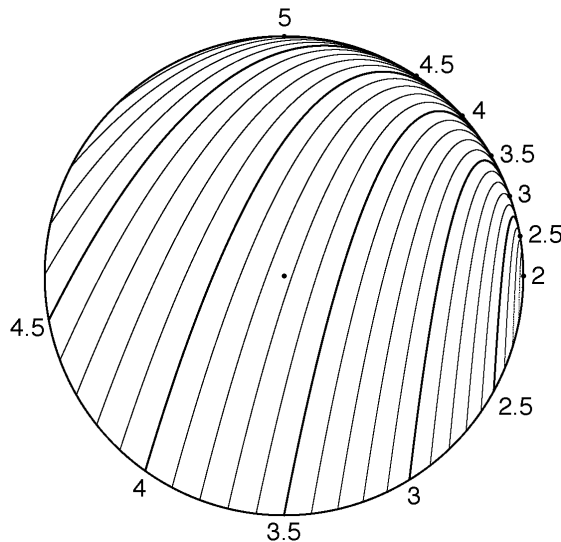


Abbildung 2: Bahnen der Fadenpendel, die in den Kreis hinein fallen. Im tiefsten Punkt ist die Bahngeschwindigkeit \sqrt{fgr} . Der Parameter f ist neben der entsprechenden Wurfparabel eingezeichnet. Der Start erfolgt im ersten Quadranten und ist für die halb- und ganzzahligen f -Werte mit einem kleinen, fetten Punkt gekennzeichnet. Der f -Wert wurde von 2 bis 5 in Schritten von 0.1 erhöht.

Betrachtet man Abbildung 2, so stellt sich natürlich sofort die Frage, welche Bahn den untersten Punkt, das Kreiszentrum oder den Punkt ganz links trifft. Eine numerische Nullstellensuche liefert die Parameter $f = 3.500000000$, 3.7320508076 und 4.5980762114 . Dazu gehören die Werte $\cos \varphi = -0.500$ ($-1/2$), -0.577 ($-1/\sqrt{3}$) und -0.866 ($-\sqrt{3}/2$) resp. $\varphi = 120^\circ$, $125.26..^\circ$ und 150° .

Reflexionen

In Abbildung 2 hören die Parabelbahnen einfach auf, wenn sie den Kreis erreichen. Bei einem Fadenpendel würde sich da der Faden spannen und die Pendelmasse zurückschnellen. Bei einem mathematischen Fadenpendel ergäbe sich eine Singularität: Da der Faden nicht dehnbar ist, müsste die Pendelgeschwindigkeit augenblicklich ändern. Das hätte unendlich grosse Kräfte zur Folge. Stellen wir uns unter dem Faden etwas hart-elastisches vor, z.B. einen Stahldraht, so scheint die Annahme vernünftig, dass die radiale Komponente der Momentangeschwindigkeit ihr Vorzeichen umdreht und die Tangentialkomponente konstant bleibt, d.h. die Pendelmasse elastisch am Kreis reflektiert wird. Wie setzt sich also die Bahn fort?

Die im Folgenden dargestellten Bahnen wurden rein numerisch berechnet mit der höchsten Genauigkeit, welche mein einfaches BASIC-Programm zuließ.

3.9

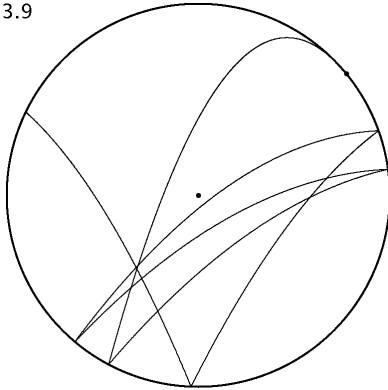


Abbildung 3: Die ersten sechs Parabel-Äste der Bahn eines Fadenpendels mit Parameter $f = 3.9$ (Zahl oben links im Bild). Der Pendelkörper löst sich oben rechts beim fetten Punkt vom Kreis und wird dann "am Kreis vollkommen elastisch reflektiert", wenn sich der Pendelfaden spannt.

3.9

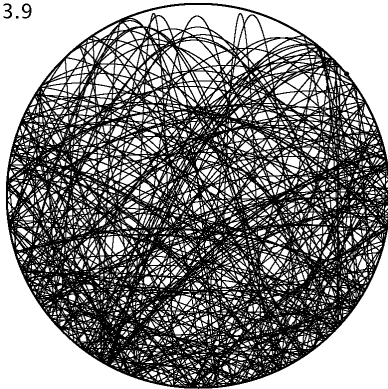


Abbildung 3: Die Bahn von Abb. 3 fortgesetzt bis zu 300 Parabel-Ästen. Mit Parameter $f = 3.9$ kann die Pendelmasse nach dem Energiesatz bis zur Höhe $f/4 = 97.5\%$ des Kreisdurchmessers hochsteigen.

Und natürlich gibt es auch periodische Lösungen:

3.5

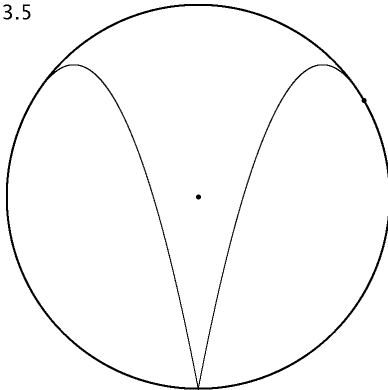


Abb. 4: Periodische Lösung mit einer Reflexion.

3.68902

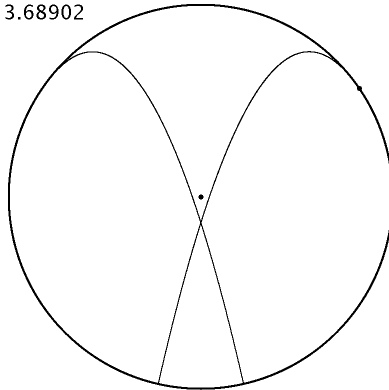


Abb. 5: Periodische Lösung mit zwei Reflexionen.

In den folgenden Bildern ist die zeitliche Dichte der Positionen als Grauwert codiert.

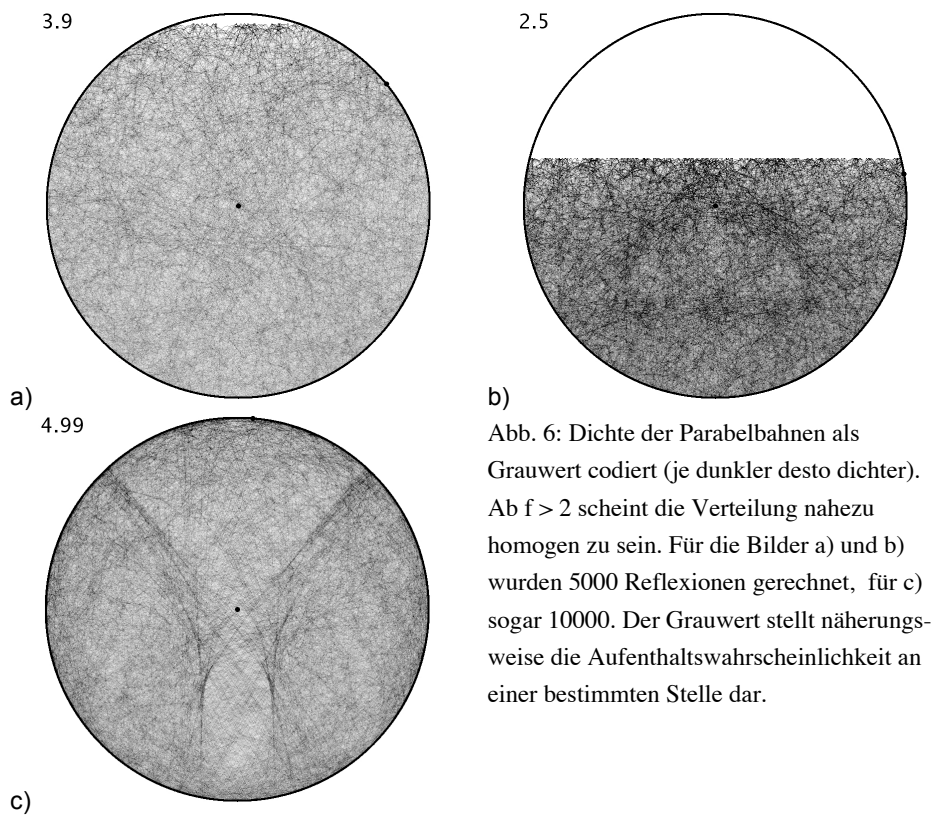


Abb. 6: Dichte der Parabelbahnen als Grauwert codiert (je dunkler desto dichter). Ab $f > 2$ scheint die Verteilung nahezu homogen zu sein. Für die Bilder a) und b) wurden 5000 Reflexionen gerechnet, für c) sogar 10000. Der Grauwert stellt näherungsweise die Aufenthaltswahrscheinlichkeit an einer bestimmten Stelle dar.

Ich bin mir aber gar nicht sicher, ob die in Abb. 6 beobachtbaren Strukturen "mathematisch real" sind, oder lediglich Artefakte der Numerik beziehungsweise Statistik darstellen. Das System scheint hoch chaotisch zu sein. Immerhin zeigt Abb. 6b eine scharfe Obergrenze der möglichen Steighöhen, d.h. die Gesamtenergie der Pendelmasse scheint sich nicht gross verändert zu haben.

Mein Computerprogramm rechnet mit ca. 16 signifikanten Stellen. Eine winzige Änderung, hier eine Vergrößerung des Parameters f um eine Einheit in der hintersten Stelle, hatte bereits zur Folge, dass sich zwei Bahnen nach fünfzig Reflexionen komplett unterschieden.

Eine Diskussion der Bewegung ohne Reflexion findet man in Am.J.Phys., Vol. 74, Sept. 2006, p. 784-788. Dort wird der Pendelfaden perfekt unelastisch modelliert.

Martin Lieberherr, 8. 8. 08