Eine pseudohistorische Herleitung der diatonischen Tonleiter

Peter Gallin, Universität Zürich

Die diatonische Tonleiter ist durch die folgenden Schwingungszahlen (Frequenzen) festgelegt, welche in willkürlichen Einheiten den Oktavumfang von 24 bis 48 abdecken:

Ton der diatonischen Tonleiter	C	D	E	F	G	A	H	c
Schwingungszahl oder Frequenz	24	27	30	32	36	40	45	48

Wenn überhaupt eine Begründung geliefert wird, so beruft man sich meistens auf die Reihe der Obertöne eines Grundtones C. Wir verwenden hier anstelle der Bezeichnung „Oberton" den Begriff „Teilton", damit die Nummerierung einen direkteren Zusammenhang mit der Frequenz hat: Der 1. Oberton entspricht dem 2. Teilton, welcher die doppelte Frequenz des Grundtones hat. Der 3. Teilton hat die dreifache Frequenz des Grundtones und der 1. Teilton ist der Grundton selbst. Die Teiltonreihe sieht dann folgendermassen aus:

Teilton mit Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Ton	C	c	g	c'	e'	g'	(i')	c''	d''	e''	(fa'')	g''	(a'')	(i'')	h''	c'''

Dabei treten unerwünschte Töne auf, welche nicht in der diatonischen Tonleiter enthalten sind. Der 7. Teilton wird auch die natürliche Septime oder der Ton i' genannt. Er hat die Frequenz $7 \cdot 24$ in unseren willkürlichen Einheiten. Nun führen wir die „Oktavierung" ein: Eine Frequenz darf beliebig mit einer beliebigen Zweierpotenz 2, 4, 8, 16 usw. multipliziert oder dividiert werden, ohne dass sich der Name des Tones verändert. Die Tonnamen erhalten dann einfach mehr oder weniger Striche oder wechseln in der Tiefe zu Grossbuchstaben oder Grossbuchstaben mit einer Ziffer als Index. So ergibt sich die Oktavreihe: C_2, C_1, C, c, c', c'', c''', … mit den Frequenzen 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, … in unseren willkürlichen Einheiten. Zwei Oktaven tiefer als i' heisst der Ton dann I und hat die durch 4 geteilte Frequenz des 7. Teiltones: $7 \cdot 24/4 = 42$. Er liegt also ziemlich genau in der Mitte zwischen A und H und ist bei den Bassisten offenbar gefürchtet, weil er wegen der langen Saiten einer Bassgeige leicht zum Schwingen gebracht werden kann. Der 11. Teilton wird auch Alphorn-*fa* genannt und wird als Naturton im Alphorn erzeugt. Drei Oktaven tiefer als fa'' liegt der Ton *Fa*, der die Frequenz $11 \cdot 24/8 = 33$ hat. Er liegt also höher als das diatonische F mit der Frequenz 32.

Nun merkt man sofort, dass die Töne F und A und ihre höheren Oktavierungen in der Teiltonreihe gar nie auftreten können, denn sie sind die einzigen, deren Frequenz in unseren willkürlichen Einheiten keinen Faktor 3 enthalten. Alle Vielfachen von 24 — die Frequenzen der Teiltöne von C — enthalten aber diesen Faktor 3, den man mit der Oktavierung nicht mehr los wird. So muss man denn zur Herleitung der diatonischen Tonleiter bei einem unschönen Kunstgriff Zuflucht nehmen: Man lässt die störenden Teiltöne (7., 11., 13. und 14.) einfach weg oder biegt sie zu den Tönen b' (als 4. Ton in der diatonischen Tonleiter von F aus), f'', a'' und b'' zurecht.

Vor diesem ästhetisch unbefriedigenden Hintergrund habe ich nach einer anderen Möglichkeit gesucht, die exakten Frequenzen plausibel herzuleiten. Dazu habe ich folgende drei Axiome gesetzt:

1. Axiom: **Aller guten Dinge sind drei**. Wir wollen mit drei über die Teiltonreihe möglichst nahe verwandten, aber doch verschiedenen Tönen als Grundtönen beginnen.

2. Axiom: **Oktavierung**. Töne, deren Saitenlängen oder Frequenzen durch Division oder Multiplikation mit einer Zweierpotenz auseinander hervorgehen, erachten wir als gleich und erhalten den gleichen Buchstaben als Namen.

3. Axiom: **Senarius**. Nur jene Teiltöne sind hörbar, die innerhalb des Senarius liegen, was bedeutet, dass wir nur die ersten 6 Teiltöne als hörbar akzeptieren.

Wir starten mit einer Saite die dem Grundton c' entsprechen soll. Durch Halbieren der Saite erhalten wir wegen dem 2. Axiom keinen neuen Ton, obgleich es sich natürlich um den Ton c'' handelt. Also dritteln wir die Saite und erhalten so den ersten neuen Ton, unseren zweiten Ton g''. Nun wollen wir einen dritten, tieferen Ton konstruieren und müssen daher die Saitenlänge vervielfachen (man begibt sich also in die primär physikalisch nicht beobachtbare Untertonreihe); gewitzigt durch die soeben gemachte Erfahrung werden wir die ursprüngliche Saite nicht verdoppeln sondern verdreifachen. So erhalten wir den Ton F. Damit ist der ursprüngliche Ton c' natürlich der 3. Teilton von F, was physikalisch wiederum beobachtbar ist. Durch Oktavierung wollen wir nun alle Töne in den Bereich einer einzigen Oktave zwischen c' und c'' legen. Der ursprüngliche Ton c' soll also die (erneut willkürliche) Frequenz 1 besitzen, dann hat der zweite Ton g'' die Frequenz 3 und der reduzierte Ton g' die halbe Frequenz 3/2. Der dritte Ton F hat die Frequenz 1/3, woraus sich für den zwei Oktaven höher liegenden Ton f' die vierfache Frequenz 4/3 ergibt.

Über den nun erhaltenen drei Grundtönen c', f' und g' konstruieren wir jetzt je den Senarius und berechnen die zugehörigen oktavierten Frequenzen. Vom Senarius sind nur der 3. Teilton (die Quinte) und der 5. Teilton (die grosse Terz) relevant, weil die übrigen Töne mit ihren geraden Nummern bereits bekannte Töne liefern. Mit anderen Worten: Wir errichten über den drei Grundtönen c', f' und g' je den Durdreiklang. Von c' mit der Frequenz 1 ergeben sich zunächst der Ton g'', den wir bereits kennen, und der Ton e''', dessen Frequenz also 5 beträgt. Damit erhalten wir zwei Oktaven tiefer den Ton e' mit der Frequenz 5/4. Der Dreiklang über f' mit Frequenz 4/3 ergibt zuerst den Ton mit der dreifachen Frequenz 4, was wieder einen bekannten Ton — nämlich den Ton c''' — bedeutet, und den Ton a''' mit der fünffachen Frequenz $5 \cdot 4/3 = 20/3$. Durch Vierteln dieser Frequenz erhalten wir a' mit der Frequenz 5/3. Schliesslich errichten wir den Durdreiklang über dem Ton g' mit der Frequenz 3/2 und erhalten mit der dreifachen Frequenz 9/2 den Ton d''' mit der fünffachen Frequenz 15/2 den Ton h'''. Daraus erhalten wir je zwei Oktaven tiefer die Töne d' mit der Frequenz 9/8 und h' mit der Frequenz 15/8. Tragen wir alles in der folgenden Tabelle zusammen. Dabei ist auch der Kehrwert der Frequenz angegeben, der einer relativen Saitenlänge entspricht. Die mit 180 multiplizierten relativen Saitenlängen kann man also also Orte für die Stege einer „Gitarre“interpretiert werden, deren Saiten 180 Einheiten lang sind.

Ton	c'	d'	e'	f'	g'	a'	h'	c''
Relative Frequenz	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
Mit 24 multiplizierte Frequenz	24	27	30	32	36	40	45	48
Relative Saitenlänge als Kehrwert der Frequenz	1	8/9	4/5	3/4	2/3	3/5	8/15	1/2
Mit 180 erweiterte Saitenlänge	180	160	144	135	120	108	96	90

Nebenbei bemerkt hat uns das 1. Axiom auf die drei wichtigen Grundtöne c', f' und g' geführt, welche zusammen mit dem je darauf aufgebauten Durdreiklang den drei Stufen Tonika, Subdominante und Dominante entsprechen, die in der abendländischen Musik als Kadenz bezeichnet werden.

Durch Bilden von Quotienten aufeinander folgender Frequenzen ergeben sich die bekannten Intervalle der diatonischen Durtonleiter:

Intervall	$c'-d'$	$d'-e'$	$e'-f'$	$f'-g'$	$g'-a'$	$a'-h'$	$h'-c''$
Frequenzverhältnis	9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15

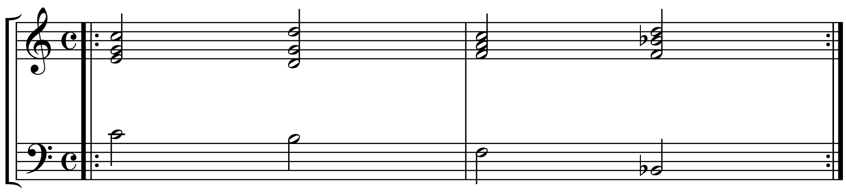
Man erkennt hier die überraschende Tatsache, dass es nur drei verschiedene Intervalle gibt: Den grossen Ganzton mit dem Frequenzverhältnis 9/8, den kleinen Ganzton mit dem Frequenzverhältnis 10/9 und den Halbton mit dem Frequenzverhältnis 16/15. Daraus können nun zwei interessante Tatsachen abgeleitet werden, die hier nicht vertieft werden sollen:

1. Dem Aneinanderhängen (Addition) von benachbarten Intervallen entspricht die Multiplikation der zugehörigen Frequenzverhältnisse. Untersucht man nun, was das Aneinanderhängen von zwei Halbtönen ergibt, stellt man fest, dass sie zusammen etwas mehr als einen grossen Ganzton ausmachen:

$$(16/15)^2 \gtrapprox 9/8$$

So kommt man auf die Idee, den Umfang einer ganzen Oktave mit ihren 5 Ganzton- und 2 Halbtonschritten in insgesamt 12 gleiche Intervalle mit dem Frequenzverhältnis x zu unterteilen. Daher erhält man die Bedingung $x^{12} = 2$ und daraus das berühmte Frequenzverhältnis $x = \sqrt[12]{2}$ für den sogenannten wohltemperierten Halbton. Es gleicht einem Wunder, dass die Tonleiter bestehend aus 12 wohltemperierten Halbtönen die 7 Töne der diatonischen Tonleiter recht genau trifft. (Man hat einfach fünf neue Töne eingefügt, die den schwarzen Tasten auf dem Klavier entsprechen.) Jedenfalls kann das Ohr die wohltemperiert gespielten Töne durchaus als diatonische zurechthören. Ohne diese Tatsache gäbe es nicht die 12 verschiedenen Dur-Tonleitern, welche von jeder der 12 Stufen *c, cis, d, dis, e, f, fis, g, gis, a, b, h* aus gespielt werden können.

2. Das Zurechthören unserer Ohren und unseres Gehirns funktioniert in überraschender Art so, dass wir sogar in der Lage sind, den grossen Ganztonschritt vom kleinen Ganztonschritt zu unterscheiden, selbst wenn dieselben Töne auf einem wohltemperiert gestimmten Klavier gespielt werden. Das folgende Notenbeispiel zeigt in der obersten Melodiestimme jeweils den Schritt vom Ton c'' zum Ton d''. Nun sind aber die begleitenden Akkorde so gelegt, dass im ersten Takt, dieser Schritt als Schritt vom Grundton zum zweiten Ton der diatonischen Tonleiter und damit als Frequenzverhältnis 9/8 interpretiert werden muss. Im zweiten Takt dagegen bewegen wir uns in F-dur und machen dort den Schritt von der Tonika zur Subdominanten. Damit interpretieren wir den Schritt von c'' nach d'' als Schritt vom 5. zum 6. Ton der diatonischen Tonleiter, welcher — gemäss obiger Tabelle — einem kleinen Ganzton mit dem Verhältnis 10/9 entspricht. Ein geschultes Ohr hört also verschiedene Intervalle, obwohl die gleichen Töne c'' und d'' gespielt werden.



Dass die Wahrnehmung durchaus von der physikalischen Realität verschieden sein kann, ist ein Phänomen, das wir aus der Geometrie und der Wahrnehmung durch das Auge bereits kennen: In der folgenden Figur sind die beiden vertikalen Strecken gleich lang, erscheinen aber als verschieden lang.