



# Le problème des 3 cylindres

Jean Piquerez

Soit un repère orthonormé  $Oxyz$ . Soient 3 cylindres de même rayon  $R$  et d'axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  respectivement. Calculer le volume de leur partie commune.

### Préambule

$$\left. \begin{aligned} \sin(\beta) &= \frac{z}{R} \\ \alpha &= \frac{\pi}{2} - 2\beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin(\alpha) = \cos(2\beta)$$

$$= 1 - 2\sin^2(\alpha) = 1 - 2\left(\frac{z}{R}\right)^2$$

$$B = \text{aire secteur } DIJ - \text{aire triangle } DIJ = \frac{R^2}{2} [\alpha - \sin(\alpha)]$$

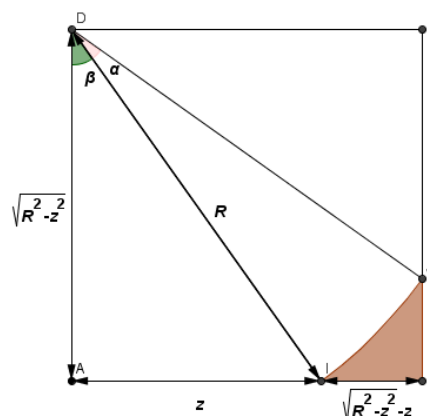
$$B(z) = \frac{1}{2} R^2 \left[ \arcsin\left(1 - \frac{2z^2}{R^2}\right) - \left(1 - \frac{2z^2}{R^2}\right) \right]$$

$A(z) = \text{Aire triangle curviligne } IBJ :$

$$A(z) = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{R^2 - z^2} - z \right]^2 - B(z) = \frac{1}{2} \left[ R^2 - 2z\sqrt{R^2 - z^2} \right] - \frac{1}{2} R^2 \left[ \arcsin\left(1 - \frac{2z^2}{R^2}\right) - \left(1 - \frac{2z^2}{R^2}\right) \right] =$$

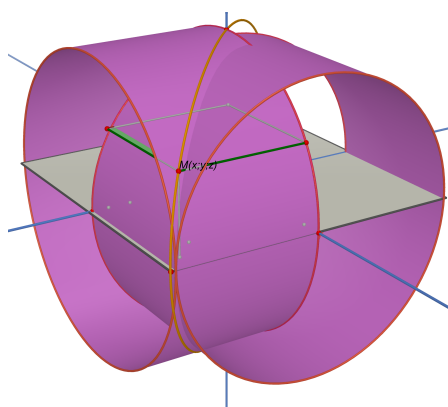
$$R^2 - z^2 - \frac{1}{2} R^2 \arcsin\left(1 - \frac{2z^2}{R^2}\right) - z\sqrt{R^2 - z^2}$$

$$\Rightarrow S(z) = R^2 - z^2 - A(z) = \frac{1}{2} R^2 \arcsin\left(1 - \frac{2z^2}{R^2}\right) + z\sqrt{R^2 - z^2}$$



Revenons alors au problème posé et considérons dans un premier temps le problème plus simple consistant à calculer le volume de la partie commune à deux cylindres de même rayon  $R$  et d'axes orthogonaux  $Ox$  et  $Oy$ .

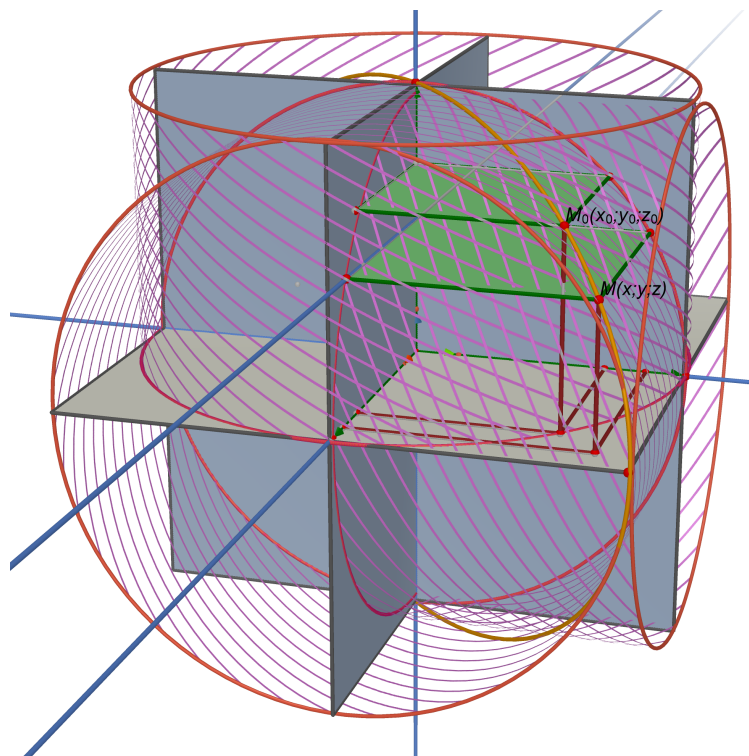
Intéressons-nous à la partie commune située dans le 1<sup>er</sup> octant (voir figure ci-contre).



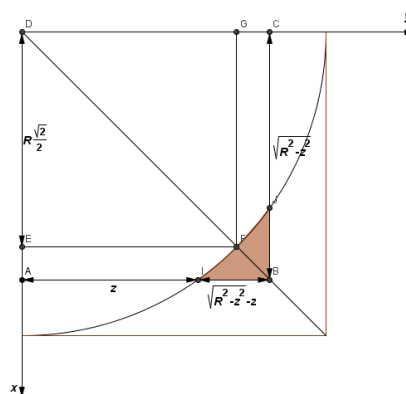
Si l'on coupe cette partie commune par des plans horizontaux, donc parallèles à  $Oxy$ , à la cote  $z$ , l'intersection obtenue est un carré de côtés  $x = y = \sqrt{R^2 - z^2}$  donc d'aire  $S(z) = R^2 - z^2$ , avec  $0 \leq x, y, z \leq R$ .

$$\text{Ainsi } V = 8 \int_0^R S(z) dz = 8 \int_0^R (R^2 - z^2) dz = 8 \left( R^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right) \Big|_0^R = \frac{16}{3} R^3 .$$

Imaginons maintenant un 3<sup>ème</sup> cylindre de même rayon et d'axe  $Oz$  (voir figure ci-dessous).



$M_0$  est de coordonnées  $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$  et pour  $z \in \left[ \frac{R\sqrt{2}}{2}; R \right]$  les sections  $S(z)$  précédentes restent incluses dans le 3<sup>ème</sup> cylindre, alors qu'il n'en est rien si  $z \in \left[ 0; \frac{R\sqrt{2}}{2} \right]$ . Dans ce dernier cas, l'aire  $S(z) = R^2 - z^2$  sera amputée de  $A(z)$  (voir figure ci-contre).



Ainsi on a :

$$\int_0^R S(z) dz = \int_{R\sqrt{2}/2}^R (R^2 - z^2) dz + \int_0^{R\sqrt{2}/2} \left[ \frac{R^2}{2} \arcsin\left(1 - \frac{2z^2}{R^2}\right) + z\sqrt{R^2 - z^2} \right] dz =$$

$$\underbrace{\left(R^2 z - \frac{1}{3} z^3\right) \Big|_{R\sqrt{2}/2}^R}_{R^3(8-5\sqrt{2})/12} + \frac{R^2}{2} \int_0^{R\sqrt{2}/2} \arcsin\left(1 - \frac{2z^2}{R^2}\right) dz - \underbrace{\frac{1}{3}(R^2 - z^2)^{3/2} \Big|_0^{R\sqrt{2}/2}}_{R^3(\sqrt{2}-4)/12} =$$

$$\frac{R^3}{2}(2 - \sqrt{2}) + \underbrace{\frac{R^2}{2} \int_0^{R\sqrt{2}/2} \arcsin\left(1 - \frac{2z^2}{R^2}\right) dz}_I$$

Tout revient donc à calculer cette dernière intégrale ?! Procédons par parties en posant :  $\alpha = \frac{2}{R^2}$

$$u'(z) = 1 \Rightarrow u(z) = z \text{ et } v(z) = \arcsin\left(1 - \frac{2z^2}{R^2}\right) \Rightarrow v'(z) = \frac{-2\alpha z}{\sqrt{1 - (1 - \alpha z^2)^2}}, \text{ d'où :}$$

$$I = \underbrace{z \arcsin\left(1 - \frac{2z^2}{R^2}\right) \Big|_0^{R\sqrt{2}/2}}_0 + \int_0^{R\sqrt{2}/2} 2z(2\alpha - \alpha^2 z^2)^{-1/2} dz = -\frac{1}{\alpha} \int_0^{R\sqrt{2}/2} \underbrace{-2\alpha^2 z(2\alpha - \alpha^2 z^2)^{-1/2}}_{2(2\alpha - \alpha^2 z^2)^{1/2} \Big|_0^{R\sqrt{2}/2}} dz =$$

$$-\frac{2}{\alpha}(2\alpha - \alpha^2 z^2)^{1/2} \Big|_0^{R\sqrt{2}/2} = -R^2 \left[ \underbrace{\left(\frac{2}{R^2}\right)^{1/2} - \left(\frac{4}{R^2}\right)^{1/2}}_{\frac{\sqrt{2}-2}{R}} \right] = (2 - \sqrt{2})R$$

$$\int_0^R S(z) dz = \frac{R^3}{2}(2 - \sqrt{2}) + \frac{2 - \sqrt{2}}{2} R^3 = (2 - \sqrt{2})R^3$$

Il reste à multiplier par 8 :  $8(2 - \sqrt{2})R^3 \approx 4,686R^3$

*Remarque :*

Le rapport entre l'intersection de 3 cylindres et celle de 2 cylindres est de  $\frac{3(2 - \sqrt{2})}{2} \approx 0,88\%$ . Le volume n'est donc ponctionné que d'environ 12% par le 3<sup>ème</sup> cylindre.