Achille Brocot, der Uhrmacher

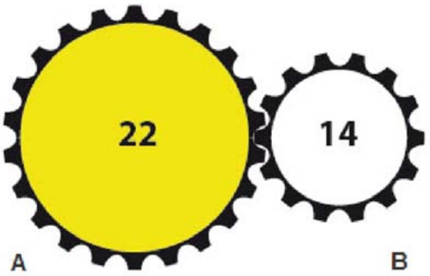
Paris 1860. Napoleon III ist seit 1852 Kaiser von Frankreich. Im Zuge der industriellen Revolution erlebt die Uhrmacherkunst eine Hochblüte. Ab 1855 publiziert Claudius Saunier, der seine Lehrjahre in der Schweiz verbrachte, die *Revue chronométrique,* das älteste Fachblatt der Uhrmacher. In der Ausgabe des Jahres 1860 findet sich ein Artikel von Achille Brocot (1817-1874) mit dem Titel *Calcul des rouages par approximation. Nouvelle méthode.*
Als Sohn eines berühmten Uhrmachers wächst Achille in einer äusserst kreativen Umgebung auf und ergreift ebenfalls diesen Beruf. Als Hobby-Mathematiker interessiert er sich erst für die Astronomie, als er sich mit der Herstellung von Planetenuhren beschäftigt.

Planetenuhr in Prag

Um die Rotationsgeschwindigkeiten der Zahnräder den astronomischen Gegebenheiten anzupassen, bedient man sich seit langem der Getriebe von Rädern mit unterschiedlicher Anzahl von Zähnen. Da kein bekanntes Verfahren zur Berechnung der Zähnezahl genügend einfach und genau ist, erfindet Brocot ein eigenes System und beschreibt es in der obigen Abhandlung. Zusätzlich liefert er später eine Tabelle, um die Rechnungen effizienter zu machen.

Zahn um Zahn

Zahnradgetriebe erlauben die Übersetzung von Kräften, Geschwindigkeiten und Drehzahlen von einem Rad auf andere Räder. Im einfachsten Fall treibt ein Zahnrad A ein Zahnrad B an, welches irgendeine Arbeit verrichtet. In der Fachsprache heisst A der *Driver* und B der *Follower*.



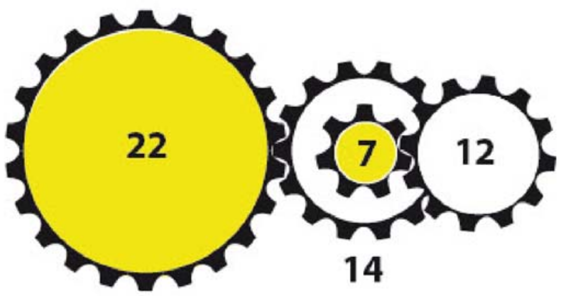
Im Beispiel hat das Rad A 22 Zähne und B deren 14. Das Zahnrad B macht 11 Umdrehungen, wenn A sich 7 mal dreht und ist daher schneller. Drehzahl und Geschwindigkeit werden erhöht, das Drehmoment wird vermindert und die Drehrichtung umgekehrt.

Unter der *Übersetzung* des Getriebes versteht man das Verhältnis der Zähnezahl des Followers zur Zähnezahl des Drivers.

In unserem Beispiel beträgt die Übersetzung 14:22 = 7:11 ≈ 0.64.
Schaltet man zwischen Driver und Follower weitere Zahnräder (so genannte *Idler,* Nichtstuer) in einer Kette dazwischen, so haben diese (überraschenderweise) keinen Einfluss auf die Übersetzung.
Für die Astronomie sind Getriebe mit mehreren Zahnrädern auf derselben Achse interessant.
Brocot formuliert die damals bereits bekannte **Regel:**
Les révolutions du premier et du dernier axe sont exactement dans le même rapport que s'il s'agissait d'un rouage à deux mobiles dont l'un serait le produit des nombres de dents de tous les mobiles menants, et dont l'autre serait le produit des nombres de dents de tous les mobiles menés.
Die Umdrehungen der ersten und letzten Achse sind genau in demselben Verhältnis wie wenn es sich um ein Getriebe mit zwei Rädern handeln würde, von denen das eine das Produkt aller Zähne der führenden Räder (Driver) und das andere das Produkt der Zähne der geführten Räder (Follower) besitzt.

Beispiel:
Die Zahnräder 7 und 14 befinden sich auf derselben Achse.
Driver: 22 und 7.
Follower: 14 und 12.
Die Übersetzung berechnet sich zu

$$\frac{14 \cdot 12}{22 \cdot 7} = \frac{12}{11} \approx 1.091\ .$$



Intermezzo: Huygens automatisches Planetarium

Im 1703 posthum herausgegebenen Werk *Descriptio automati planetarii* beschreibt Huygens (1629-1695) das Konzept seines Planetariums. Bereits 1682 baute Johannes van Ceulen (ca. 1650-1715) die achteckige Planetenuhr nach den Plänen von Huygens. Exemplarisch verfolgen wir die Überlegungen zum Planeten Merkur. Die besten damals erhältlichen Daten für die Umlaufzeiten waren

- für die Erde: 365 Tage 5 Stunden 45' 15'' 46''' und
- für den Merkur: 87 Tage 23 Stunden 14' 24''.

Huygens rundete für die Erde auf 365 Tage 5 Stunden und 50 Minuten, für Merkur auf 87 Tage 23 Stunden und 15 Minuten.
Dies ergab ein Verhältnis von 105190:25335 = 21038:5067 $\approx$ 4.15. Da es unmöglich war, Zahnräder mit so vielen Zähnen zu konstruieren, musste Huygens einen Bruch finden, welcher kleinere Zähler und Nenner besass, aber den obigen Bruch möglichst gut annähert. Huygens kannte die neue Theorie der Kettenbrüche und zeigte bei seinem Planetarium zum ersten Mal eine praktische Anwendung dieser Theorie. Er entwickelte also den Bruch in einen Kettenbruch und bestimmte die daraus entstehenden Näherungsbrüche.

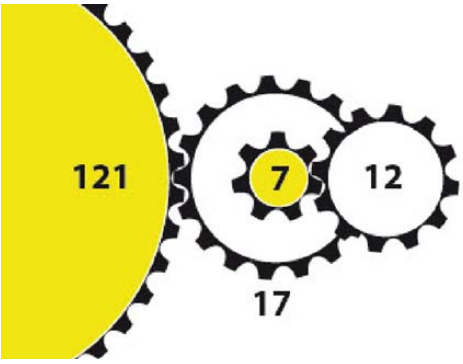
$$4+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}}}}}}$$

Da die Zähler stets 1 betragen, kürzt man die Darstellung des Kettenbruches zweckmässig wie folgt ab:
21038/5067 =
[4,6,1,1,2,1,1,1,1,7,1,2] .

Durch das schrittweise Berechnen des Kettenbruchs entstehen die Näherungsbrüche

$$4, \frac{25}{6}, \frac{29}{7}, \frac{54}{13}, \frac{137}{33}, \frac{191}{46}, \frac{328}{79}, \frac{519}{125}, \frac{847}{204}, \frac{6448}{1553}, \frac{7295}{1757}, \frac{21038}{5067}.$$

Von diesen Näherungsbrüchen kommt für zwei Räder nur 137/33 als bester Bruch mit erträglicher Zähnezahl in Frage. Falls sich aber ein späterer Näherungsbruch zerlegen lässt, könnte man mit vier Rädern und einer höheren Genauigkeit arbeiten.
Als wichtigen Glücksfall erweist sich der Bruch 847/204 $\approx$ 4.15, da sich die Zerlegung (7*121)/(12*17) anbietet.



Dies lässt sich mit vier Rädern realisieren. Eine Umdrehung in einem Jahr des Erdenrades mit 121 Zähnen bewirkt ca. 4.15 Umdrehungen des Merkurrades mit 12 Zähnen.

Die neue Methode

Achille Brocot kennt ebenfalls die von Huygens angewendete Theorie der Kettenbrüche, welche jedoch nicht allen Uhrmacherkollegen vertraut ist. Zudem bemängelt er, dass man beim Suchen geeigneter Zahlen wenige Näherungen zur Verfügung hat (Huygens hatte „Glück“ mit der schönen Faktorisierungsmöglichkeit von 847/204).

Seine neue einfache Methode zeigt er am Beispiel des gekürzten Bruches 191/23 ≈ 8.3. Der Bruch liegt zwischen 8/1 und 9/1. Die Fehler betragen -7/23 (zu wenig) und 16/23 (zu viel). Nun bildet Brocot den Zwischenbruch (8+9)/(1+1), indem er die Zähler und die Nenner addiert. Der Bruch 17/2 heisst Mediant von 8/1 und 9/1 (Nicolas Chuquet führte im 15. Jh. diesen Begriff ein). Brocot stellt fest, dass auch der neue Fehler wieder Mediant der beiden ursprünglichen Fehler ist. Eine einfache Tabelle zeigt die Fortsetzung der Methode:

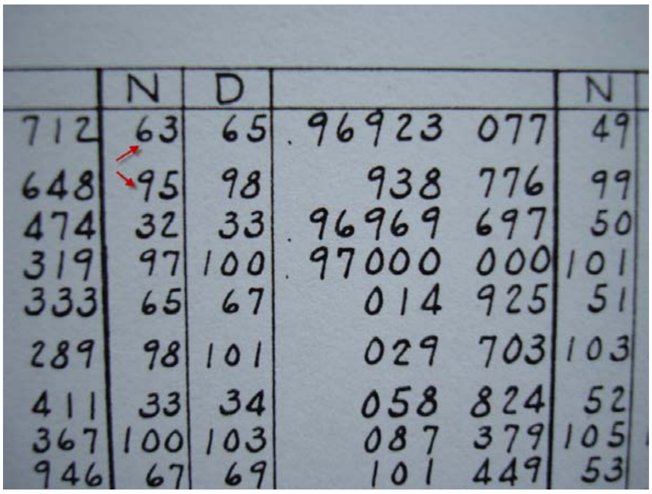
8:1	Fehler	-7
33:4	Fehler	-5
58:7	Fehler	-3
83:10	Fehler	-1
191:23	Fehler	**0**
108:13	Fehler	+1
25:3	Fehler	+2
17:2	Fehler	+9
9:1	Fehler	+16

Der Nenner beim Fehler wird weggelassen.
Ziel ist es, den Fehler auf +1 oder -1 zu reduzieren. Ist man mit 83/10 nicht zufrieden, sucht man weitere Medianten zwischen 83/10 und 191/23. Dasselbe gilt für 108/13. Die entstehenden Brüche 274/33 usw. weisen zwar grössere Zähler und Nenner auf. Brocot versucht wie Huygens Brüche zu finden, welche eine Faktorisierung zulassen. Er zeigt zahlreiche Varianten. Beispiel: 1802/217 =(34*53)/(7*31) ≈ 8.3 mit einem Fehler von lediglich -1/4991 = -0.00020036.

Eine genauere Betrachtung der Tabelle zeigt, dass sämtliche Näherungsbrüche 8, 25/3, 83/10, 191/23 der Kettenbruchentwicklung von 191/23 vorkommen Die zusätzlichen Brüche 33/4, 58/7 und 17/2 in der Tabelle hat bereits Lagrange (1736-1813) als Pseudonäherungen der Kettenbruchentwicklung bezeichnet und ein allgemeines Verfahren zur Berechnung mittels Mediantenbildung angegeben. Das Verdienst von Brocot besteht darin, dass er seine Methode einem breiteren Publikum ohne den Einsatz von Kettenbrüchen und mittels einer einfachen Tabelle zugänglich gemacht hat.

Testfall Merkur

Im zweiten Beispiel wendet sich Brocot dem Planeten Merkur zu. Ein Rad dreht sich vollständig in einem Tag. Wie sieht eine Übersetzung für 87.96926 Tage aus? Dies ist die bis heute gültige siderische Umlaufzeit des Merkur. Vergleich: Zur Zeit von Huygens betrug sie lediglich 87.9683 Tage.
Die Tabelle mit 87:1 bis 88:1 als Start wird etwas aufwendig. Brocot verwendet daher sein Tabellenwerk. Darin finden sich alle gekürzten Brüche von 1/120 bis 119/120 mit den zugehörigen Dezimalzahlen aufgelistet. Die Zahl 0.96926 ist in der Tabelle nicht enthalten.



	N	D		N
712	63	65	.96923 077	49
648	95	98	938 776	99
474	32	33	.96969 697	50
319	97	100	.97000 000	101
333	65	67	014 925	51
289	98	101	029 703	103
411	33	34	058 824	52
367	100	103	087 379	105
946	67	69	101 449	53

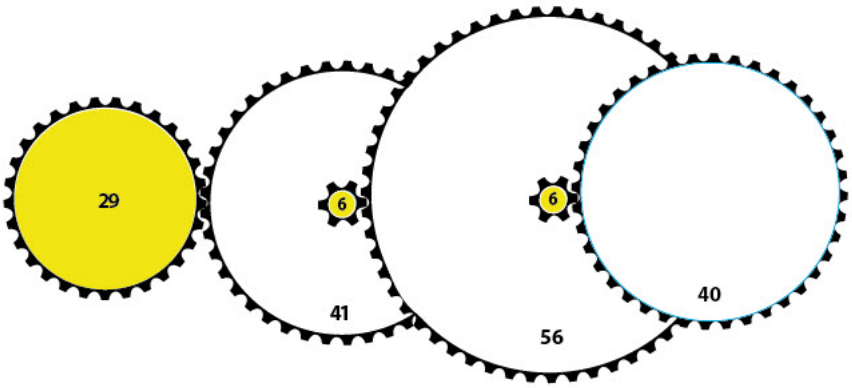
N: Nominator (Zähler)
D: Denominator (Nenner)

Die Tabelle enthält 4381 Brüche und deren Dezimalzahlen auf 8 Stellen genau.
Das Nachrechnen der Tabelle mit *Mathematica* zeigte, dass Brocot sehr sorgfältig gearbeitet, aber vier Brüche vergessen hatte.

Benachbarte Tabellenwerte 0.96923077 = 63/65 und 0.96938776 = 95/98 geben für die Berechnung geeignete Startzahlen. Brocot beginnt daher mit 5718:65 und 8621:98, indem er jeweils 87 Ganze hinzuaddiert.
Die Fortsetzung durch Mediantenbildung ergibt:

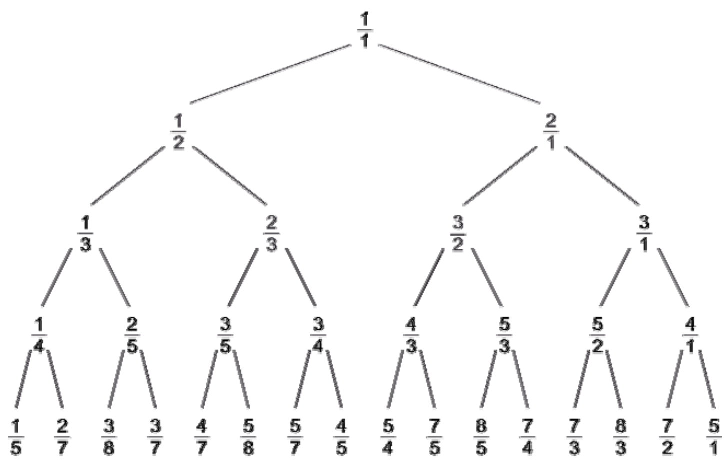
5718:65
20057:228
14339:163
22960:261
8621:98

Nur der Bruch 22960:261 liefert eine gute Zerlegung, nämlich (10*56*41)/(3*3*29). Leider sagt Brocot nicht, wie er sich das Räderwerk vorstellt, denn Zahnräder mit 3 Zähnen eignen sich nicht. Mein Vorschlag: Erweitern mit 4. Dies ergibt (40 *56*41)/(6*6*29) mit den Drivern 29, 6 und 6.



Falls sich das Tagesrad mit 29 Zähnen 87.969 mal dreht, macht das Merkurrad mit 40 Zähnen genau eine Umdrehung.
Damit kommt Brocot mit kleineren Zähnezahlen aus als Huygens, braucht aber statt vier Räder deren sechs.

Ausblick:
Die von Achille Brocot fortlaufende Mediantenbildung kommt besonders im nach ihm (und dem Mathematiker Stern) benannten **Stern-Brocot-Baum** zur Geltung. Zwar dient er weniger den Uhrmachern als vielmehr den Mathematikern. Der Baum enthält sämtliche nicht negativen Brüche genau einmal und aufsteigend geordnet.



Der Baum zeigt eindrücklich, dass die Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig ist wie die Menge der rationalen Zahlen.
Für zahlreiche Verbesserungsvorschläge danke ich Daniel Baumgartner ganz herzlich.

Albert A. Gächter