



# Das Zeichnen der logarithmischen Spirale mit dem Zirkel

Peter Gallin, Universität Zürich

## 1 Einleitung

In der Natur finden sich als Folge von Wachstumsprozessen immer wieder logarithmische Spiralen. Abbildung 1 zeigt die aufgeschnittene Schale eines Nautilus, welche ich von Mike Rohr, Mathematiklehrer an der Kantonsschule Küsnacht (ZH), erhalten habe. Möchte man in die Bilder von realen Gegenständen eine möglichst gut passende logarithmische Spirale einzeichnen, stellen sich interessante mathematische Probleme. Zunächst untersuchen wir die Frage, wie man bei gegebenem Ausschnitt einer Spirale deren Zentrum findet. Dann stellen wir uns die Frage, wie die Beziehung zwischen der Kurve und den sie approximierenden Viertelkreisen ist.



Abbildung 1: Längsschnitt der Nautilus-Schale mit Kammern

## 2 Bestimmen des Zentrums der logarithmischen Spirale

So wie es für Schülerinnen und Schüler keine triviale Frage ist, wie man das Zentrum eines Kreises bestimmt, von dem nur die Kreislinie gegeben ist, so stellt sich die analoge Frage bei der logarithmischen Spirale als recht anspruchsvoll heraus. Wir wissen ja lediglich, dass in der Polardarstellung der Radius  $r$  exponentiell mit dem Argumentwinkel  $\phi$  wächst:

$$r(\phi) = ae^{k\phi}$$

Die Zahl  $k$  nennt man die Steigung der Spirale, denn sie gibt den Tangens des Winkels an, welcher von der Kurventangente mit der Normalen zum Radius eingeschlossen wird. Der positive Parameter  $a$  ist ein beliebiger

Anfangswert für den Radius. Er kann ohne Beschränkung auf 1 gesetzt werden, da er wegen  $ae^{k\phi} = e^{k(\phi + \ln(a)/k)}$  als Drehung der Spirale interpretiert werden kann. Die Spirale geht durch geeignete Drehstreckungen in sich selbst über. Wenn man speziell eine Drehstreckung mit dem Drehwinkel  $\pi$  ausführt, müssen die Tangenten in einem Kurvenpunkt und dessen Bildpunkt parallel zueinander sein. Findet man also parallele Tangenten der Spirale, müssen die Verbindungen der zugehörigen Berührungspunkte durch das gesuchte Zentrum gehen. Abbildung 2 zeigt eine erste Variante zur Konstruktion des Zentrums: Man bestimmt zwei Paare paralleler Tangenten. Das Zentrum ist der Schnittpunkt der beiden Verbindungsgeraden der entsprechenden Tangentenberührungspunkte.

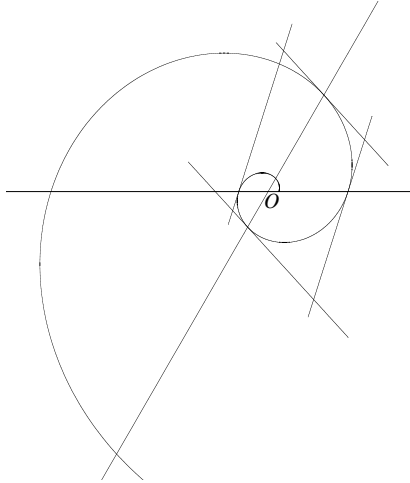


Abbildung 2: Zwei Paare paralleler Tangenten

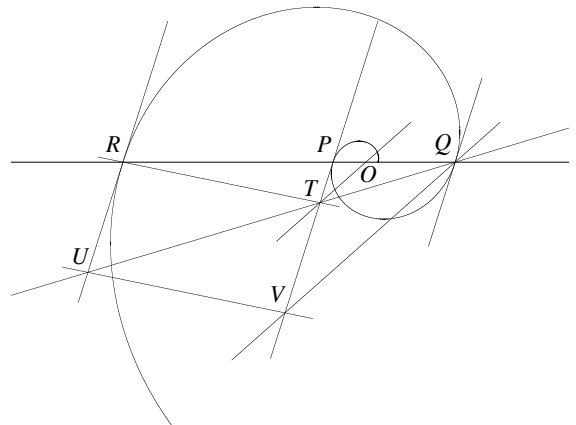


Abbildung 3: Drei parallele Tangenten

Abbildung 3 zeigt eine zweite Variante: Es wurden drei parallele Tangenten mit den aufeinanderfolgenden Berührungspunkten  $P$ ,  $Q$  und  $R$  gelegt. Da die Strecke  $PQ$  das gestauchte Bild der Strecke  $QR$  ist, gibt deren Längenverhältnis den zum Drehwinkel  $\pi$  gehörigen Streckfaktor  $\lambda < 1$  an. Mit einem beliebigen Hilfsstrahl  $QU$  übertragen wir dieses Verhältnis auf  $\lambda = |TQ| : |QU| = |TP| : |RU|$ . Da die Strecken  $RU$  und  $TV$  nach Konstruktion gleich lang sind, gilt  $\lambda = |TP| : |TV|$ . Durch eine Parallele zu  $VQ$  durch  $T$  erhalten wir den Punkt  $O$  auf der Verbindungsgeraden der Berührungspunkte, so dass  $\lambda = |TP| : |TV| = |OP| : |OQ|$ , wie es für das Zentrum  $O$  der Fall sein muss.

### 3 Hilfssatz: Zum geometrischen Mittel zweier Dreiecksseiten

Das geometrische Mittel zweier Dreiecksseiten tritt erstaunlicherweise als eine einfach zu konstruierende Länge auf der Winkelhalbierenden der beiden Seiten in Erscheinung. Wir beweisen hier diesen Satz und werden ihn anschliessend bei der Approximation der logarithmischen Spirale durch Kreisbogen verwenden können.

Auf dem Umkreis des Dreiecks  $ABC$  (Abbildung 4) seien  $W$  bzw.  $Z$  die Punkte, welche auf der inneren bzw. äusseren Winkelhalbierenden der Ecke  $C$  liegen. Der Kreis mit Mittelpunkt  $Z$  durch den Punkt  $A$  schneide die Winkelhalbierende in einem Punkt  $G$ . Behauptung: Die Länge  $g = |CG|$  ist das geometrische Mittel  $\sqrt{ab}$  der Seiten  $a$  und  $b$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir hier  $b > a$  an.

Beweis: Da in einem Dreieck die innere und äussere Winkelhalbierende einer Ecke und die Mittelsenkrechte der gegenüberliegenden Seite sich auf dem Umkreis schneiden, liegen  $W$  und  $Z$  auf der Mittelsenkrechten der Seite  $AB$ . Nun drehen wir die Seite  $CB$  um  $C$  so weit, dass die gedrehte Strecke in der Verlängerung der Seite  $AC$  liegt. So erhalten wir den Punkt  $D$ .  $BD$  liegt parallel zur inneren Winkelhalbierenden von  $C$ , und die Mittelsenkrechte der Strecke  $BD$  ist die äussere Winkelhalbierende. Damit ist  $Z$  Umkreismittelpunkt des Dreiecks  $ABD$  und der Umkreisradius ist  $|ZA| = |ZG|$ . Füllen wir schliesslich das Lot von  $Z$  auf die Seite  $AD$ ,

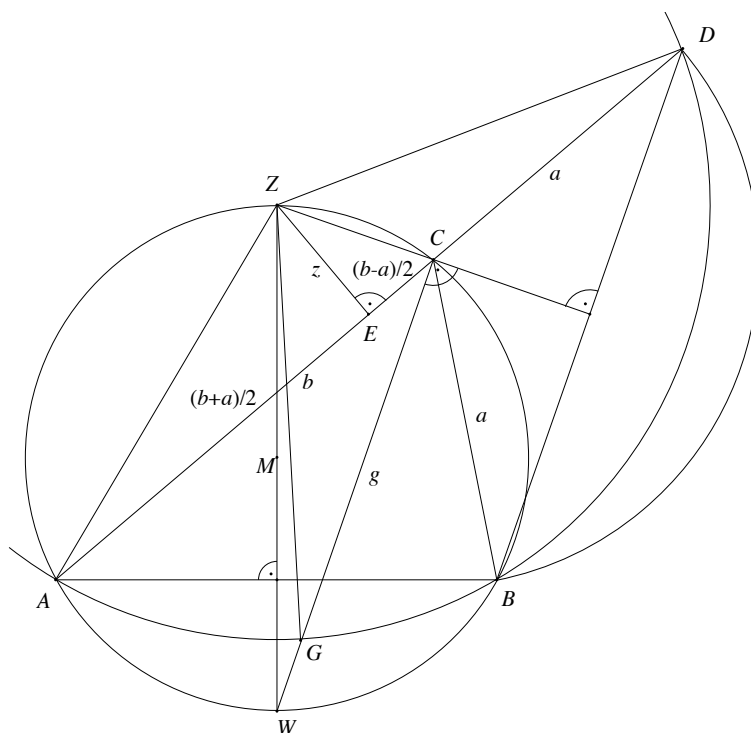


Abbildung 4: Zum geometrischen Mittel  $g$  der Seiten  $a$  und  $b$

so erhalten wir den Mittelpunkt  $E$  der Seite  $AD$ . Es gilt also

$$|EA| = \frac{b+a}{2} \quad \text{und} \quad |EC| = \frac{b-a}{2} .$$

Wir setzen die Länge  $|ZE| = z$  und berechnen die gesuchte Länge  $g = |CG|$  mit Pythagoras:

$$\begin{aligned} g^2 = |CG|^2 &= |ZG|^2 - |ZC|^2 = |ZA|^2 - |ZC|^2 = \left( \left( \frac{b+a}{2} \right)^2 + z^2 \right) - \left( \left( \frac{b-a}{2} \right)^2 + z^2 \right) = \\ &= \left( \frac{b+a}{2} \right)^2 - \left( \frac{b-a}{2} \right)^2 = ab , \end{aligned}$$

womit die Behauptung  $g = \sqrt{ab}$  bewiesen ist.

## 4 Approximation der logarithmischen Spirale durch Kreisbogen

Traditionsgemäss will man die logarithmische Spirale durch Viertelkreise approximieren, weil diese dann in Quadraten einbeschrieben werden können. Wir kommen im nächsten Abschnitt darauf zurück. Es wären durchaus auch andere Kreissektoren wählbar, wie beispielsweise Halbkreise. Man könnte also in Abbildung 3 die Thaleskreise über den Strecke  $PQ$  und  $QR$  als Näherungen auffassen, was man aber als zu grob empfindet. Grundsätzlich wählt man also einen festen Zentriwinkel  $\beta$  der Kreissektoren und will mit ihnen die Spirale approximieren (Abbildung 5). Damit zwei aufeinander folgende Kreissektoren — in Abbildung 5 beim Punkt  $B$  — einen knickfreien Übergang haben, müssen die Radien der beiden zusammenfallenden Endpunkte aufeinander liegen, also muss  $Z_1$  auf  $Z_2B$  liegen.

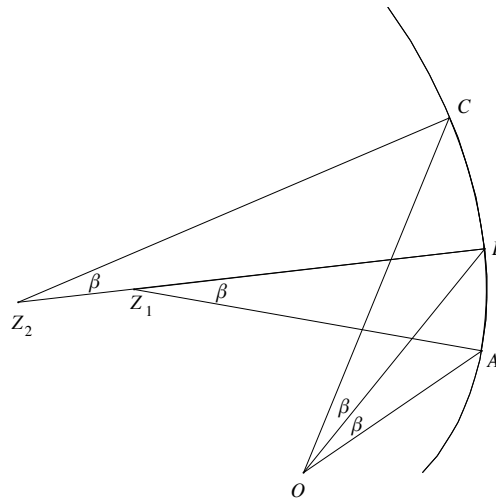


Abbildung 5: Approximation der Spirale durch Kreissektoren

Die Stützpunkte  $A, B, C, \dots$  auf der Spirale mit der Gleichung  $r(\phi) = ae^{k\phi}$  wählt man so, dass ihre Argumentwinkel jeweils die Differenz  $\beta$  aufweisen. Damit wächst der Radius von Stützpunkt zu Stützpunkt mit dem gleichen Faktor und so sind die Dreiecke  $OAB, OBC, \dots$  ähnlich zueinander. Die Tangenten an die Spirale in den Stützpunkten bilden mit den zugehörigen Radiusstrecken immer den gleichen Winkel, nämlich  $\frac{\pi}{2} + \arctan(k)$ . Das bedeutet, dass sich die Tangenten von Stützpunkt zu Stützpunkt um den Winkel  $\beta$  weiterdrehen. Damit nun die Kreissektoren den Zentriwinkel  $\beta$  aufweisen, müssen deren Zentren – wegen dem Peripheriewinkelsatz – auf dem Umkreis des Dreiecks aus den zwei Stützpunkten und  $O$  liegen, also beispielsweise  $Z_1$  auf dem Umkreis des Dreiecks  $OAB$  oder  $Z_2$  auf dem Umkreis des Dreiecks  $OBC$ . Zudem liegen die Zentren ja auf den Mittelsenkrechten der beiden Stützpunkte.

Die Tangenten an die Kreisbogen in den Stützpunkten liegen senkrecht zu den Radien. Auch sie drehen sich demzufolge – wie die Tangenten an die Spirale selbst – von Stützpunkt zu Stützpunkt um den Winkel  $\beta$  weiter. Falls nun bei irgendeinem Stützpunkt die Tangente an die Spirale und die Tangente an die Kreisbogen einen von Null verschiedenen Winkel miteinander einschließen, tun sie dies bei allen Stützpunkten in gleicher Weise. Dass dies tatsächlich der Fall ist, untersuchen wir in Abschnitt 5 genauer. In jedem Stützpunkt überquert die Spirale die Approximationskurve der Kreisbogen in (wörtlich) ähnlicher Weise und zwar für wachsenden Radius von innen nach aussen. Aus Stetigkeitsgründen muss die Spirale also zwischen den Stützpunkten immer wieder einen gemeinsamen Punkt mit der Approximationskurve besitzen, wo sie von aussen wieder nach innen zurückkehrt.

Dank des vorangehenden Satzes können wir nun diesen weiteren gemeinsamen Punkt genauer angeben: Betrachten wir das Dreieck  $OAB$  und seine Winkelhalbierende in  $O$ . Diese wird vom Kreisbogen durch  $A$  und  $B$  mit Zentrum  $Z_1$  so in einem Punkt  $G$  geschnitten, dass die Länge  $|OG|$  das geometrische Mittel von  $|OA|$  und  $|OB|$  ist. Nun ist aber wegen der Gleichung  $r(\phi) = ae^{k\phi}$  der Spirale jeder Radius das geometrische Mittel zweier Nachbarradien, sofern diese symmetrisch zu ihm liegen:

$$\sqrt{r(\phi - \beta/2) \cdot r(\phi + \beta/2)} = \sqrt{ae^{k(\phi - \beta/2)} \cdot ae^{k(\phi + \beta/2)}} = \sqrt{a^2 e^{2k\phi}} = ae^{k\phi} = r(\phi)$$

Auf der Winkelhalbierenden in  $O$  jedes Stützdreiecks  $OAB, OBC, \dots$  liegen also weitere Punkte, welche die Spirale und die Approximationskurve gemeinsam haben. Das sind die Punkte, wo die Spirale jeweils von ausserhalb der Approximationskurve wieder nach innen verläuft. So können diese Punkte nicht als neue Stützpunkte für Approximationskreisbogen fungieren.

Anmerkung: Stellt man sich vor, in Abbildung 5 lasse man  $\beta$  immer kleiner werden, so fallen die Kreissekto-

ren schliesslich zu Kurvennormalen den Spirale zusammen. Deren Hüllkurve ist definitionsgemäss der Ort der Krümmungsmittelpunkte der Spirale — ihre Evolute — und ist eine zur ursprünglichen Spirale kongruente, bloss gedrehte Spirale.

## 5 Approximation der logarithmischen Spirale durch Viertelkreise

Wir zeichnen hier konkret für  $k = \frac{2}{\pi} \approx 0.637$  die Spirale mit der Gleichung  $r(\phi) = e^{2\phi/\pi}$  (Abbildung 6). Die Stützpunkte  $A, B, \dots$  wählen wir auf den Koordinatenachsen, so dass also  $\beta = \pi/2$ . Der Ortsbogen zur Konstruktion des Zentrums  $Z$  des approximierenden Viertelkreises wird dann zum Thaleskreis über  $AB$ .  $W$  ist wiederum der Punkt, wo sich die Winkelhalbierende in  $O$  des Dreieck  $OAB$  mit dessen Umkreis, dem Thaleskreis, schneiden. Das Viereck  $AWBZ$  ist ein Quadrat, in dem der Viertelkreissektor mit Zentrum  $Z$  eingeschrieben ist. Stellt man sich die Quadrate mit Diagonalen  $AC, CD, \dots$  vor, so ergäbe sich eine „Spirale“ aus lauter kleiner werdenden, aneinander hängenden Quadraten. Weil der Radius der Spirale pro Winkelzunahme um  $\frac{\pi}{2}$  mit dem Faktor  $e$  gestreckt wird, ist der Streckfaktor von Quadrat zu Quadrat ebenfalls  $e$ .

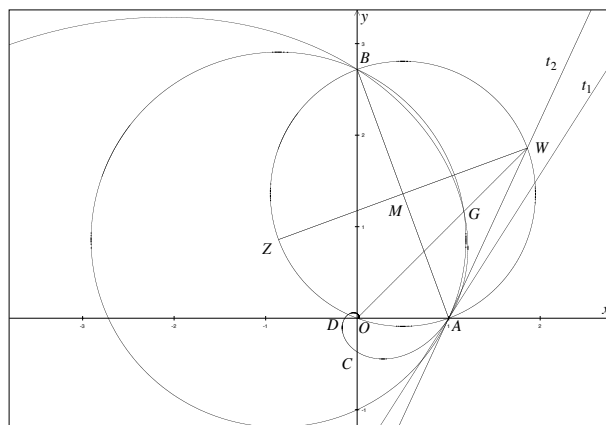


Abbildung 6: Spirale und approximierender Viertelkreis

In dieser Abbildung ist nun gut erkennbar, wie die Spirale für wachsenden Radius (und hier wegen  $k > 0$  auch wachsendes  $\phi$ ) vom Punkt  $A$  an ausserhalb des approximierenden Kreisbogens verläuft und dann beim Punkt  $G$  auf der Winkelhalbierenden  $OW$  den Kreisbogen überquert, um dann bis  $B$  innerhalb des Bogens zu liegen. Ferner sehen wir, wie die Spirale und der Kreisbogen im Stützpunkt  $A$  verschiedene Tangenten  $t_1$  und  $t_2$  haben. Dies ist in allen Stützpunkten gleich. Berechnen wir nun für die allgemeine Spirale  $r(\phi) = e^{k\phi}$  den Winkel, den die Kreistangente  $t_2$  mit der Normalen zu  $OA$  in  $A$  einschliesst. Sie steht senkrecht zum Radius  $ZA$ . Also müssen wir nur den spitzen Winkel  $\angle OAZ$  von  $ZA$  zur  $x$ -Achse berechnen. Aus den Punkten  $B(0; e^{k\pi/2})$  und  $A(1; 0)$  ergibt sich  $\angle OAB = \arctan(e^{k\pi/2})$ . Davon ist  $\angle ZAB = \frac{\pi}{4}$  zu subtrahieren:  $\angle OAZ = \arctan(e^{k\pi/2}) - \frac{\pi}{4}$ . Andererseits schliesst die Spiraltangente  $t_1$  mit der Normalen zu  $OA$  in  $A$  den Winkel  $\arctan(k)$  ein. Man kann beweisen, dass für alle  $k > 0$  die Ungleichung  $\arctan(k) > \arctan(e^{k\pi/2}) - \frac{\pi}{4}$  besteht (Abbildung 7) und damit immer ein Unterschied der beiden Tangenten auftritt. Für unseren Fall  $k = \frac{2}{\pi}$  ergibt sich ein Winkelunterschied von ungefähr  $7.68^\circ$ .

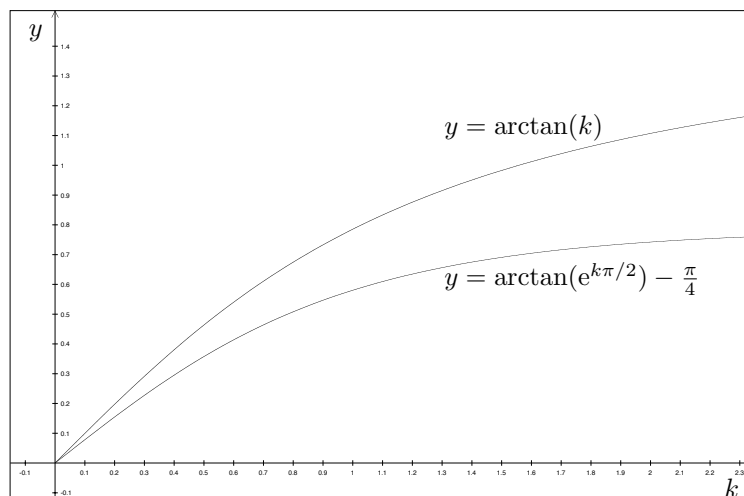


Abbildung 7: Winkelunterschiede der beiden Tangenten

## 6 Die goldene Spirale

Ein wichtiger Spezialfall entsteht, wenn der Streckfaktor pro Winkelzunahme um  $\frac{\pi}{2}$  der goldenen Zahl  $\tau = (\sqrt{5} + 1)/2 \approx 1.618$  entspricht. Damit ist  $k = \frac{2 \ln(\tau)}{\pi} \approx 0.306$ . Die Folge der sich verkleinernden oder vergrößernden Quadrate übernimmt dann den Faktor  $\tau$  von Quadrat zu Quadrat. Wie Abbildung 8 zeigt, bilden dann je vier aufeinanderfolgende Quadrate ein goldenes Rechteck: Am kleinsten Quadrat  $ABCD$  hängt das mit  $\tau$  vergrößerte Quadrat  $GCEF$ , an diesem das nochmals vergrößerte Quadrat  $KFHI$  und an diesem das Quadrat  $ILMB$ . Alle liegen im goldenen Rechteck  $LMEH$ . Jedes Quadrat wird durch ein goldenes Rechteck zu einem neuen goldenen Rechteck ergänzt.

Das Zentrum  $O$  der Drehstreckung zum Drehwinkel  $\frac{\pi}{2}$  findet man in diesem Spezialfall durch geeignete Diagonalen der goldenen Rechtecke, welche alle entweder auf  $LE$  oder auf  $BH$  liegen. Diese stehen senkrecht zueinander, da ja die Drehstreckung von einem Rechteck zum nächsten den Drehwinkel  $\frac{\pi}{2}$  hat. Zeichnet man zusätzlich die Winkelhalbierenden dieser beiden Diagonalrichtungen ein, so gehen sie durch bereits bestehende Eckpunkte von Quadraten. Beispielsweise geht die Winkelhalbierende von  $\angle LOH$  durch den Punkt  $I$ , denn sie muss ja die Gegenseite  $LH$  im Dreieck  $LOH$  im Verhältnis der anliegenden Seiten  $OL$  und  $OH$ , mithin im Verhältnis  $\tau$  schneiden. Der Punkt  $I$  erfüllt aber genau diese Forderung. Damit erhalten wir ein zweites Paar zueinander senkrechter Richtungen  $IC$  und  $MF$ , welche die Rolle der Koordinatenachsen von Abbildung 6 übernehmen. Zeichnet man schliesslich die Viertelkreise in den Quadraten ein, so schneiden sie die Winkelhalbierenden der neuen Achsen in den Punkten  $S, T, U, V, \dots$ , welche neben den Stützpunkten  $A, C, F, I, M, \dots$  zugleich auch Punkte der exakten goldenen Spirale sein müssen. Sie ist in Abbildung 8 nicht eingezeichnet, weil sie sich nur sehr wenig von den approximierenden Viertelkreisen unterscheidet. Die Tangenten an die goldene Spirale weichen allerdings in den Stützpunkten leicht von den Rechtecksseiten ab. Diese Bemerkung stammt aus dem Buch „Unvergängliche Geometrie“ von H. S. M. Coxeter (Birkhäuser Verlag, 1963, Seite 205) und war Anlass für die vorliegende Untersuchung. Konkret ergibt sich für dieses  $k = \frac{2 \ln(\tau)}{\pi}$  gemäss Abbildung 7 ein Winkelunterschied von etwa  $3.75^\circ$ .

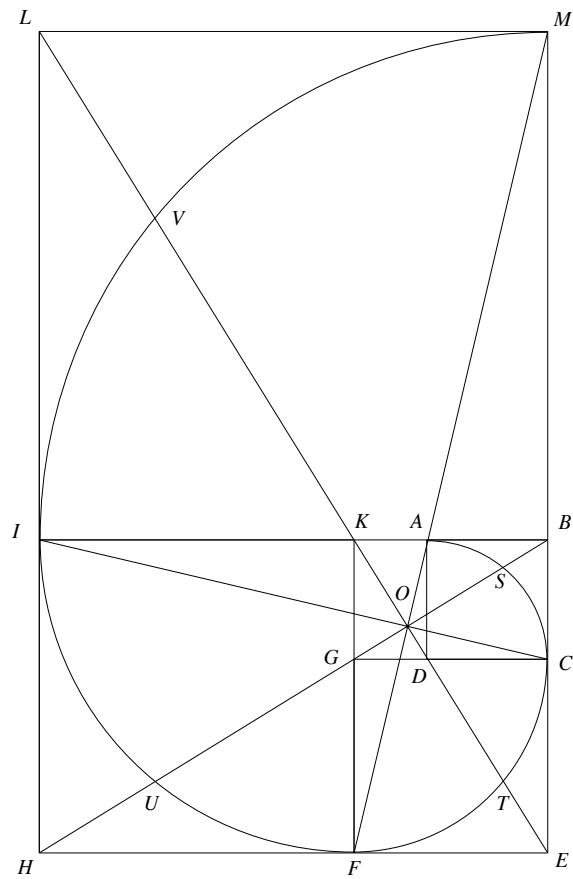


Abbildung 8: Die Folge von goldenen Rechtecken und die approximierte goldene Spirale

## 7 Die Fibonacci-Spirale als Annäherung an die goldene Spirale

Als letzten Spezialfall einer Spirale sei hier die Fibonacci-Spirale erwähnt (Abbildung 9).

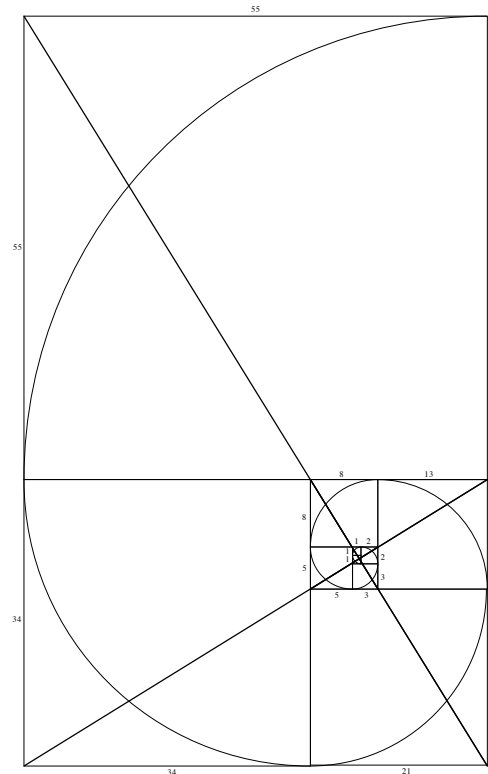


Abbildung 9: Fibonacci-Spirale

Wir starten mit zwei (kleinen) aneinander anliegenden Einheitsquadraten. Dieses Rechteck mit Seitenverhältnis 2 zu 1 wird durch ein Quadrat mit Seitenlänge 2 zu einem Rechteck mit Seitenverhältnis 3 zu 2 ergänzt, dieses mit einem Quadrat mit Seitenlänge 3 zu einem Rechteck mit Seitenverhältnis 5 zu 3, usw. Die Folge der Rechtecke haben also die Fibonacci-Zahlen 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... als Seitenlängen. Sie besteht zwar nicht aus ähnlichen Rechtecken, jedoch sind sie sehr bald kaum von goldenen Rechtecken unterscheidbar, da der Grenzwert der Quotienten aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen sich  $\tau$  nähert. Dank der Strichdicke unterscheiden sich in Abbildung 9 die Diagonalen im Rechteck mit den Seiten 5 und 8 schon nicht mehr von der Diagonalen im Rechteck mit den Seiten 13 und 21. Damit bilden die eingezeichneten Viertelkreise — ausser im Zentrum — eine gute Annäherung an die goldene Spirale von Abbildung 8.

## 8 Nautilus und die logarithmische Spirale

Verschiedene zeichnerische Möglichkeiten zur Darstellung logarithmischer Spiralen sind jetzt ausgeleuchtet. Die goldene Spirale begegnet uns in der Natur leider selten. In Abbildung 1 beispielsweise liegt eine Spirale mit  $k \approx -\ln(1.7)/\pi$  vor, da pro halbe Umdrehung eine Streckung mit dem Faktor von etwa 1.7 gemessen wird. Mit den heutigen Darstellungsmöglichkeiten kann die Kurve auf eine Folie gedruckt und mit der Kontur des Nautilus mehr oder weniger gut zur Deckung gebracht werden (Abbildung 10). Nur im Zentrum ist die Abweichung gross, was uns an die Fibonacci-Spirale erinnert.

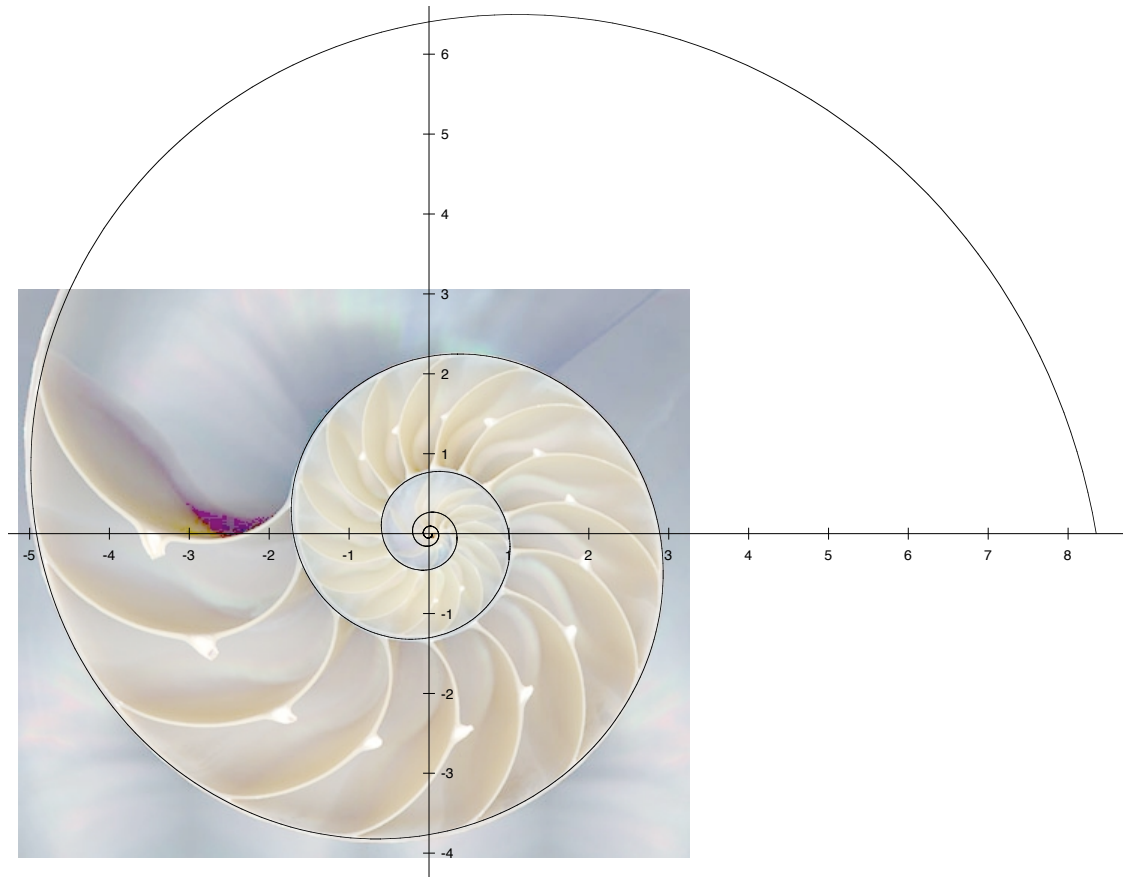


Abbildung 10: Nautilus-Schale mit überlagerter Spirale