Wer erhält zuerst drei Punkte?

Hans Ulrich Keller, MNG Zürich

Zusammenfassung
Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ergibt oft überraschende Ergebnisse: Vermeintlich einfache Situationen können zu mathematisch aufwendigen Problemen führen. Dies ist z.B. bei einem Spiel der Fall, bei dem zwei Personen in einem Versuch je eine feste Wahrscheinlichkeit p_a resp. p_b für den Erhalt eines Punktes haben, wobei solche Versuche so lange wiederholt werden, bis eine der Personen insgesamt n Punkte gesammelt hat. In einem ersten Teil wird der Fall $p_a + p_b = 1$ gelöst, was, mit endlichen Spielen, zu einer Pascal−Verteilung führt. In einem zweiten Teil wird der Fall $p_a + p_b = 1 - p_x$ gelöst, bei dem eine Wahrscheinlichkeit $p_x > 0$ dafür vorhanden ist, dass im einzelnen Versuch keine der beiden Personen einen Punkt erhält, was zu potentiell unendlich langen Spielen führt. Geeignete Algorithmen sind hier, neben dem allerdings etwas mühsamen Baumdiagramm, einerseits die Monte−Carlo−Methode, die schnell und unkompliziert zu angenäherten Resultaten führt, andererseits das aufwändigere Verfahren der Markow−Kette, womit ebenfalls exakte Resultate sowie zusätzliche Erkenntnisse gefunden werden können.

Erster Teil: Endlich lange Spiele

Anna und Berta vereinbaren folgendes Spiel: Jemand wirft − als Versuch − einen Spielwürfel. Zeigt der Würfel die Augenzahl 1 oder 2, erhält Anna einen Punkt. Andernfalls erhält Berta einen Punkt. Dieser Versuch wird so oft wiederholt, bis entweder Anna oder Berta drei Punkte erhalten hat, womit das Spiel beendet ist.

Anna hat somit bei jedem Versuch eine Wahrscheinlichkeit $p_a = \frac{1}{3}$ für den Erhalt eines Punktes, während Berta dafür die Gegenwahrscheinlichkeit $p_b = 1 - p_a = \frac{2}{3}$ hat.

Das Spiel ist frühestens nach 3 und spätestens nach 5 Versuchen beendet. Wird vereinbart, dass das Spiel allgemein nach dem Erhalt von n Punkten beendet ist, werden dazu mindestens n und höchstens $2n - 1$ Versuche benötigt.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Anna das Spiel, wenn $n = 3$ ist?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt sie bei einem beliebigen n?

Zur Beantwortung dieser Fragen kann für $n = 2$ der übliche Baum gezeichnet werden:

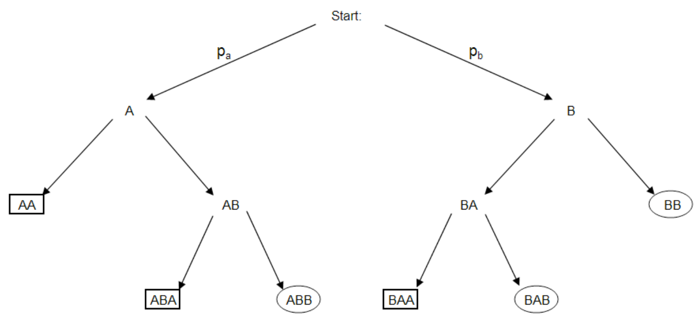

Fig. 1: Baum für das Spiel mit $n = 2$. Die Rechtecke markieren den Spielgewinn von Anna, die Ovale den von Berta.

Aus dem Baumdiagramm lassen sich leicht die Wahrscheinlichkeiten für Annas resp. Bertas Spielgewinn angeben:

$$p_a^{tot}(n=2) = p_a^2 + 2\,p_a^2\,p_b \text{ , resp. } p_b^{tot}(n=2) = p_b^2 + 2\,p_a\,p_b^2 \qquad \text{(Gl. 1, 2)}$$

Es kann hier sofort verifiziert werden, dass die Summe dieser beiden Wahrscheinlichkeiten wie erwartet gleich 1 ist.

Für die oben konkret angegebenen Wahrscheinlichkeiten $p_a = \frac{1}{3}$ und $p_b = \frac{2}{3}$ gewinnt Anna das Spiel mit der Wahrscheinlichkeit $p_a^{tot}(n=2) = \frac{7}{27}$ und Berta mit der Wahrscheinlichkeit $p_b^{tot}(n=2) = \frac{20}{27}$.

Für n = 3 wird der Baum − mit 38 Pfeilen − sehr unübersichtlich.
Hier helfen kombinatorische Überlegungen weiter, die z.B. für n = 4 darin bestehen, nacheinander die Elemente {A, A, A, A}, dann die Elemente {A, A, A, A, B}, {A, A, A, A, B, B} und {A, A, A, A, B, B, B} zu permutieren. A steht dabei für einen Punktegewinn von Anna, B für einen Punktegewinn von Berta, und die Reihenfolge entspricht der Reihenfolge, in welcher Anna resp. Berta einen Punkt gewinnt. Es muss berücksichtigt werden, dass das Spiel nach jeweils den ersten vier A's, meist gemischt mit B's, für Anna gewonnen ist, was die Anzahl der zu berücksichtigenden Permutationen verringert.

Auf diese Weise kann für n = 3 die Formel

$$p_a^{tot}(n=3) = p_a^3 + 3\,p_a^3\,p_b + 6\,p_a^3\,p_b^2 \qquad \text{(Gl. 3)}$$

gefunden werden, was für $p_a = \frac{1}{3}$ den Wert $p_a^{tot}(n=3) = \frac{17}{81}$ ergibt. Es fällt bereits jetzt auf, dass es für Anna mit zunehmendem n offenbar immer schwieriger wird, überhaupt ein Spiel zu gewinnen. Tatsächlich ist $\lim_{n\to\infty} p_a^{tot}(n) = 0$: Ist $p_b > p_a$, dann wird für $n \to \infty$ der Gewinn des Spiels für Berta zur Gewissheit!

Die Überlegungen mit den Permutationen erlauben es, die Wahrscheinlichkeit $p_a^{tot}(n)$ für den Spielgewinn von Anna für ein beliebiges n wie folgt anzugeben:

$$p_a^{tot}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} \cdot p_a^n \cdot (1-p_a)^k \qquad \text{(Gl. 4)}$$

Eine analoge Formel lässt sich für $p_b^{tot}(n)$ angeben. Die auftretenden Binomialkoeffizienten finden sich auf der n−ten Diagonale des Pascal−Dreiecks. Diese Verteilung ist auch als 'Pascal−Verteilung' oder 'negative Binomialverteilung' bekannt.

Unten sind im gleichen Diagramm die zu unseren Beispielwahrscheinlichkeiten $p_a = \frac{1}{3}$ und $p_b = \frac{2}{3}$ gehörigen Wahrscheinlichkeiten $p_a^{tot}(n)$ und $p_b^{tot}(n)$ dargestellt:

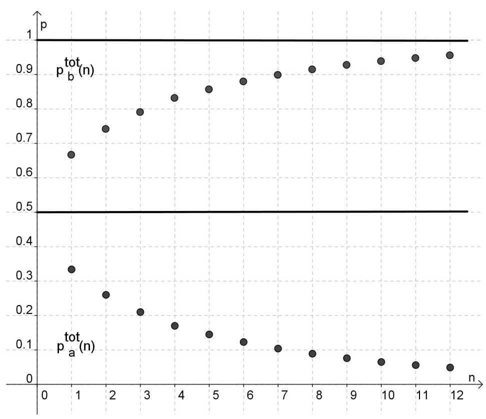

Fig. 2: Wahrscheinlichkeit $p_a^{tot}(n)$ des Spielgewinns für Anna (unten) und $p_b^{tot}(n)$ für Berta (oben) in Abhängigkeit von der Anzahl Punkte n, die für den Spielgewinn verlangt sind.

Mit der oben angegebenen Formel für die gesamte Wahrscheinlichkeit lässt sich der Erwartungswert $E(v) = \overline{v} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(p_a^{tot}(n+k) + p_b^{tot}(n+k)\right)\cdot(n+k)$ für die (mittlere) Anzahl der Versuche angeben, die nötig sind, bis das Spiel zu Ende ist:

$$\overline{v} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\cdot\left(p_a^n\cdot(1-p_a)^k + (1-p_a)^n\cdot p_a{}^k\right)\cdot(n+k) \qquad \text{(Gl. 5)}$$

Dieser Erwartungswert E(v) ist im folgenden Diagramm in Abhängigkeit von n wiedergegeben:

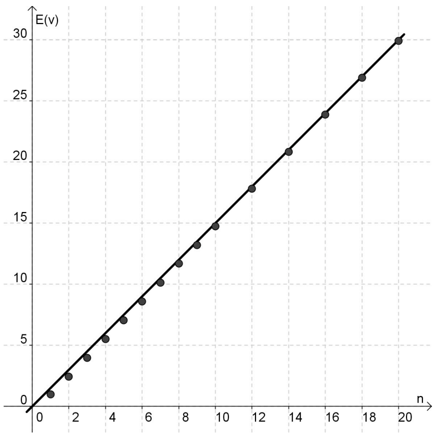

Fig. 3:
Erwartungswert der Spieldauer $E(v) = \overline{v}$ in Abhängigkeit von der zum Spielgewinn nötigen Punktezahl n. Interessant ist die Proportionalität zwischen n und E(v), die sich asymptotisch für n >> 1 ergibt; mit den vorgegeben Wahrscheinlichkeiten ist $\overline{v} \approx \frac{3}{2}\cdot n$.

Zweiter Teil: Potentiell unendlich lange Spiele

Anna und Berta vereinbaren nun ein neues Spiel: Jemand wirft – als Versuch – einen Spielwürfel. Zeigt der Würfel die Augenzahl 1 oder 2, erhält Anna einen Punkt. Berta erhält einen Punkt, wenn der Würfel die Augenzahl 3, 4 oder 5 zeigt; zeigt der Würfel die Augenzahl 6, wird erneut gewürfelt. Dieser Versuch wird so oft wiederholt, bis entweder Anna oder Berta drei Punkte erhalten hat, wodurch das Spiel beendet ist.

Anna hat somit bei jedem Versuch eine Wahrscheinlichkeit $p_a = \frac{1}{3}$ für den Erhalt eines Punktes, während Berta dafür die Wahrscheinlichkeit $p_b = \frac{1}{2}$ hat. Es gibt weiter eine Wahrscheinlichkeit $p_x = \frac{1}{6}$ dafür, dass bei einem Versuch weder Anna noch Berta einen Punkt erhält und einfach weitergewürfelt werden muss.

Das Spiel kann theoretisch beliebig lange dauern, da beliebig lange Serien von Würfen mit der Augenzahl 6 denkbar sind. Für n = 1 lässt sich das Problem mit einem – bereits unendlich grossen – Baum und einer geometrischen Reihe in üblicher Weise lösen:

$$p_a^{tot}(n=1) = p_a + p_x\, p_a + p_x^2\, p_a + \ldots = p_a\,(1 + p_x + p_x^2 + \ldots) = \frac{p_a}{1-p_x} \qquad \text{(Gl. 6)}$$

Eine analoge Formel ergibt sich für $p_b^{tot}(n=1)$. Wie sofort gezeigt werden kann, ist die Summe dieser beiden Wahrscheinlichkeiten gleich 1, da $p_x = (1 - p_a - p_b)$ ist. Dies ist offensichtlich, da über kurz oder lang Anna oder Berta den einzigen Punkt und damit das Spiel gewinnen wird. Verwenden wir die oben erwähnten Wahrscheinlichkeiten $p_a = \frac{1}{3}$, $p_b = \frac{1}{2}$ und $p_x = \frac{1}{6}$, so ergibt sich für $p_a^{tot}(n=1) = \frac{2}{5}$ und für $p_b^{tot}(n=1) = \frac{3}{5}$. Dies ist eine nicht unerwartete Aufteilung im Verhältnis der elementaren Wahrscheinlichkeiten für den Gewinn eines Punktes, wobei berücksichtigt ist, dass das Spiel beliebig lange dauern könnte.

Für diesen einfachsten Fall n = 1 lässt sich wiederum die mittlere Spieldauer $E(v) = \bar{v}$ berechnen:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= 1\,(p_a + p_b) + 2\,(p_x\, p_a + p_x\, p_b) + 3\,(p_x^2\, p_a + p_x^2\, p_b) + \ldots \\ &= (p_a + p_b)\,(1 + 2\,p_x^1 + 3\,p_x^2 + 4\,p_x^3 + \ldots) \end{aligned} \qquad \text{(Gl. 7)}$$

Der zweite Faktor ist eine bekannte, der geometrischen Reihe verwandte Reihe, wodurch sich Gl. 7 vereinfacht zu

$$\bar{v} = \frac{p_a + p_b}{(1-p_x)^2} \qquad \text{(Gl. 8)}$$

Wieder mit den oben erwähnten Wahrscheinlichkeiten $p_a = \frac{1}{3}$, $p_b = \frac{1}{2}$ und $p_x = \frac{1}{6}$, ergibt sich eine mittlere Anzahl Versuche von $\bar{v} = \frac{6}{5}$.

Bereits für n > 1 ist jedoch die Methode der Baumdiagramme nur noch schwierig anwendbar, da sich der Baum in Myriaden von unendlich langen Ästen aufsplittert. Mit geeigneten Reihen ist es aber durchaus möglich, dennoch die – hier vorweggenommenen – exakten Resultate für den Spielgewinn von (z.B.) Anna herzuleiten, worauf hier aber nicht weiter eingegangen werden soll:

$$p_a^{tot}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} \cdot p_a^n \cdot p_b^k \cdot \left(\frac{1}{1-p_x}\right)^{n+k} \qquad \text{(Gl. 9)}$$

Für $p_x = 0$ geht Gl. 9 in die in Gl. 4 angegebene Pascal–Verteilung über.

Es bieten sich zwei andere Verfahren an: Am einfachsten kann eine solche Situation mit der Monte–Carlo–Methode bearbeitet werden, womit für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten allerdings nur angenäherte Werte bestimmt werden können. Es werden z.B. einige Tausende solcher Spiele mit Hilfe von Pseudozufallszahlen "durchgespielt" und die interessierenden Mittelwerte berechnet.

Dies kann z.B. mit dem folgenden einfachen Programm (*Mathematica*) geschehen:

```
simnrmax = 100000; n = 4;
spiela = 0; spielb = 0; anzvers = 0;
For[simnr = 1, simnr ≤ simnrmax, simnr++,
  punktea = 0; punkteb = 0;
  While[punktea < n && punkteb < n,
   r = Random[Integer, {1, 6}];
   If[r ≤ 2, punktea++];
   If[r ≥ 3 && r ≤ 5, punkteb++];
   anzvers++;];
  If[punktea == n, spiela++];
  If[punkteb == n, spielb++];];
{n, spiela / simnrmax, spielb / simnrmax,
  anzvers / simnrmax} // N
```

Fig. 4:
Mathematica–Programm zur Simulation einer Serie von 100'000 Spielen.

Es werden 100'000 Spiele "durchgespielt", hier für n = 4. Die Variable punktea enthält die Anzahl der von Anna gesammelten Punkte. Die Pseudozufallszahl r gibt die "gewürfelte" Augenzahl an. Die Variable anzvers zählt die gesamte Anzahl der Versuche, die Variable spiela zählt die von Anna gewonnenen Spiele.

Das Programm ergibt beispielsweise für n = 4, dass – im Mittel – Anna etwa 28.93 % und Berta die restlichen 71.07 % der Spiele gewinnt, und dass für ein Spiel etwa $\overline{v}$ = 6.837 Versuche benötigt werden.
Die gleiche Simulation ergibt für n = 1, dass – im Mittel – Anna etwa 39.95 % und Berta die restlichen 60.05 % der Spiele gewinnt, und dass für ein Spiel etwa $\overline{v}$=1.203 Versuche benötigt werden. Dies steht in bester Übereinstimmung mit den oben angegebenen exakt berechneten Werten.

Solche Simulationen, so nützlich sie für den Praktiker sein mögen, bleiben dennoch in gewisser Weise unbefriedigend, da keine exakten Werte bestimmt werden können. Um wiederum exakte Werte zu finden, eignet sich die Beschreibung des Spiels mittels Markow–Ketten. Eine gute Einführung in dieses Thema findet sich beispielsweise im Buch von Arthur Engel, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Band 2. Markow–Ketten sind generell definiert durch Zustände und die Übergangswahrscheinlichkeiten von jedem solchen Zustand in jeden anderen. Die Übergangswahrscheinlichkeiten können in einer Übergangsmatrix P zusammengefasst werden.
Bei unserem Problem kann jeder mögliche Spielstand als ein Zustand aufgefasst werden. Für n = 2 ergeben sich neun mögliche Zustände: 0:0, 0:1, 0:2, 1:0, 1:1, 1:2, 2:0, 2:1 und 2:2. So soll der Zustand 1:2 beispielsweise bedeuten, dass Anna erst einen Punkt erhalten hat, Berta

aber bereits deren zwei. Für ein beliebiges n ergeben sich $(n + 1)^2$ Zustände, wobei der Zustand n:n gar nie erreicht werden kann. Der Einfachheit halber kann aber dieser Zustand dennoch mitgeführt werden: Die Übergangswahrscheinlichkeiten zu diesem Zustand von allen anderen Zuständen aus werden einfach alle gleich Null gesetzt.
Die Übergangswahrscheinlichkeit von einem allgemeinen Zustand a:b (mit a, b < n) in den Zustand (a + 1):b ist gleich p_a, diejenige von a:b nach a:(b + 1) ist gleich p_b, und diejenige von einem beliebigen Zustand in den wiederum gleichen Zustand ist gleich p_x. Die übrigen Übergangswahrscheinlichkeiten sind gleich Null. Zustände wie n:b oder a:n mit a, b < n heissen absorbierende Zustände, und die Übergangswahrscheinlichkeit von einem solchen Zustand in wiederum den gleichen Zustand ist gleich 1.
Die Übergangsmatrizen P sind quadratisch und haben $(n + 1)^2$ Zeilen und ebenso viele Spalten, also für n = 4 bereits 625 Elemente! Die meisten dieser Übergangswahrscheinlichkeiten sind aber gleich 0, da es z.B. nicht möglich ist, in genau einem Schritt vom Zustand 0:1 in den Zustand 0:0 oder in den Zustand 1:2 zu gelangen.

Der Einfachheit halber soll hier nur auf das Problem mit n = 2 im Detail eingegangen werden. Eine Erweiterung auf n > 2 ist zwar aufwändig, aber problemlos möglich.
Die Übergangsmatrix P sieht für n = 2 wie folgt aus:

a:b	0:0	0:1	0:2	1:0	1:1	1:2	2:0	2:1	2:2
0:0	p_x	0	0	0	0	0	0	0	0
0:1	p_b	p_x	0	0	0	0	0	0	0
0:2	0	p_b	1	0	0	0	0	0	0
1:0	p_a	0	0	p_x	0	0	0	0	0
1:1	0	p_a	0	p_b	p_x	0	0	0	0
1:2	0	0	0	0	p_b	1	0	0	0
2:0	0	0	0	p_a	0	0	1	0	0
2:1	0	0	0	0	p_a	0	0	1	0
2:2	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Fig. 5: Die 9 x 9 − Übergangsmatrix P für n = 2. Die Matrixelemente geben jeweils die Wahrscheinlichkeit an, mit welcher − in genau einem Versuch − von einem Zustand a:b (in der obersten Zeile angegeben) ein Zustand a':b' (in der äussersten Spalte links angegeben) erreicht werden kann.

Mit Hilfe dieser Übergangsmatrix P lässt sich nun die Wahrscheinlichkeit p(a,b,k) jedes Zustandes a:b nach k Versuchen berechnen:

$$\begin{pmatrix} p_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_b & p_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_b & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_a & 0 & 0 & p_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_a & 0 & p_b & p_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(0,0,k) \\ p(0,1,k) \\ \underline{p(0,2,k)} \\ p(1,0,k) \\ p(1,1,k) \\ \underline{p(1,2,k)} \\ \underline{p(2,0,k)} \\ \underline{p(2,1,k)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fig. 6:
Die Wahrscheinlichkeit eines Zustands nach k (mit $k \in \mathbb{N}_o$) Versuchen ist gegeben durch das Produkt der k−ten Potenz der Übergangsmatrix P mit dem Anfangsvektor $\left(p(a,b,0)\right)$ (Gl. 10). Die unterstrichenen Wahrscheinlichkeiten entsprechen den vier absorbierenden Zuständen.

Der Anfangsvektor $\left(p(a,b,0)\right)$ hat die Komponenten $p(0,0,0)=1$, respektive $p(a,b,0)=0$, wenn $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ ist, da zu Beginn des Spieles die Wahrscheinlichkeit des Spielstandes 0:0 gleich 1 ist und die Wahrscheinlichkeit jedes anderen Spielstandes gleich 0 ist. Die Wahrscheinlichkeit des Spielstandes p(2,2,k) ist und bleibt für jedes k gleich 0, da das Spiel jeweils bereits vorher beendet ist: Die unterste Zeile und die letzte Spalte der oben angegebenen Matrix P könnten, wie erwähnt, ohne Einschränkung der Allgemeinheit weggelassen werden.

Interessant ist es nun zu sehen, wie sich die Wahrscheinlichkeit jedes Zustandes mit zunehmendem k ändert, was zusätzliche Erkenntnisse über den Spielverlauf ergibt:

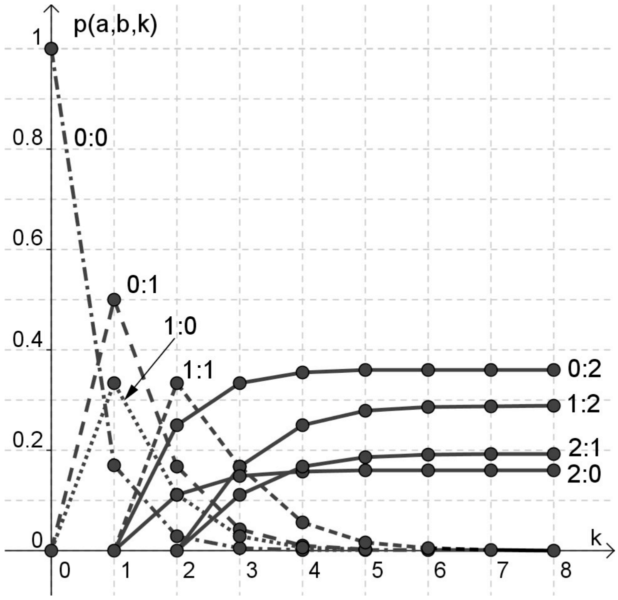

Fig. 7: Wahrscheinlichkeit eines Zustandes, d.h. eines Spielstandes, nach k Versuchen. Lesebeispiel: Für k = 0 hat der Zustand 0:0 die Wahrscheinlichkeit 1 und nach einem Versuch (k = 1) die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$, während der Zustand 0:1 bei k = 1 seine maximale Wahrscheinlichkeit von 50 % erreicht.

Es zeigt sich bereits für $k \geq 6$ Versuche, dass die Wahrscheinlichkeiten aller Zustände wie erwartet einem Grenzwert zustreben. Die Spielstände 0:0, 0:1, 1:0 und 1:1 werden immer unwahrscheinlicher, und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten streben gegen 0.
Die Schlussbesetzung der Zustände ergibt sich, indem die Grenzmatrix $P_\infty = \lim_{k\to\infty} P^k$, die sich (z.B. mit *Mathematica*) leicht berechnen lässt, mit dem Anfangszustandsvektor $(1,0,0,0,0,0,0,0,0)^T$ multipliziert wird, was das Resultat $\left(0,0,\frac{9}{25},0,0,\frac{36}{125},\frac{4}{25},\frac{24}{125},0\right)^T$ ergibt.

Erneute Multiplikation von P_∞ mit diesem Resultatvektor belässt diesen dann invariant.
Anna gewinnt folglich mit einer Wahrscheinlichkeit von 16 % mit einem Schlussspielstand von 2:0, und mit 19.2 % mit 2:1, insgesamt also mit einer Wahrscheinlichkeit von 35.2 %; Berta gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von 36 % mit 0:2 und mit einer Wahrscheinlichkeit von 28.8 % mit 1:2, insgesamt also mit einer Wahrscheinlichkeit von 64.8 %, was in Übereinstimmung steht mit dem in Gl. 9 angegebenen Resultat.

Bei einem Verhältnis der Grundwahrscheinlichkeiten $p_a : p_b = 1 : 1.5$ verhalten sich die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für den Spielgewinn also bereits wie 1 : 1.84. Es zeigt sich hier das gleiche Phänomen, das schon im ersten Teil (mit $p_a = 1 - p_b$, d.h. $p_x = 0$) zu beobachten war: Wird die benötigte Punktezahl n angehoben, strebt die Wahrscheinlichkeit $p_b^{tot}(n)$ für den Spielgewinn der Spielerin mit der grösseren Grundwahrscheinlichkeit ($p_b > p_a$) ebenfalls wieder gegen 1, wie das in Fig. 8 veranschaulicht wird.

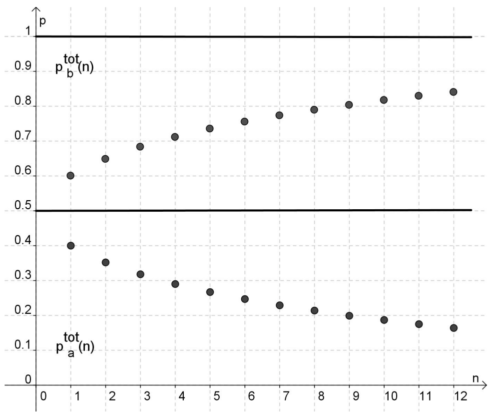

Fig. 8: Wahrscheinlichkeit $p_a^{tot}(n)$ des Spielgewinns für Anna (unten) und $p_b^{tot}(n)$ für Berta (oben), bei potentiell unendlich langen Spielen, in Abhängigkeit von der Anzahl Punkte n, die für den Spielgewinn verlangt sind.

Mit Hilfe der Übergangsmatrix P lässt sich auch hier wiederum die mittlere Spieldauer $\overline{v}$ berechnen: Die bei einem allgemeinen n vorhandenen 2n absorbierenden Zustände vergrössern zusammen beim k–ten Versuch ihre Wahrscheinlichkeit jeweils total um Δp_k^{tot}; der Erwartungswert für v ergibt sich dann in üblicher Weise als $\overline{v} = E(v) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta p_k^{tot} \cdot k$. Diese Reihe konvergiert in unserem einfachen Beispiel recht schnell: Mit n = 2 sind vier absorbierende Zustände vorhanden, die ihren Beitrag zu Δp_k^{tot} liefern, und schon mit nur gerade 10 Summanden kann hier bereits der auf vier Dezimalen korrekte Wert $\overline{v} \approx 2.97589...$ für den exakten Wert $\overline{v} = \frac{372}{125}$ Versuche gefunden werden.

So kann eine sehr einfache Fragestellung – wer erhält zuerst drei Punkte? – schnell zu weiteren interessanten Fragestellungen und zu mathematisch reizvollen Resultaten führen.

Die hier vorgestellten Aufgaben und Lösungen können Anregungen zur Lösung des sog. Teilungsproblems geben: Wie muss der Einsatz der Spielenden gerecht zurückverteilt werden, wenn ein solches Spiel vorzeitig abgebrochen werden muss?
Dieses Teilungsproblem wurde zum ersten Mal von Luca Pacioli (1494) gestellt, und Blaise Pascal und Pierre de Fermat führten darüber einen ausführlichen Briefwechsel.

Literatur:
Arthur Engel, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Band 2.