DPK

Ist der schiefe Wurf eine Kreisbewegung?

Martin Lieberherr
Mathematisch Naturwissenschaftliches Gymnasium Rämibühl, 8001 Zürich
31. August 2011

Jede krummlinige Bewegung kann als Abfolge von Kreisbewegungen dargestellt werden. Der geometrische Ort aller Krümmungskreismittelpunkte der Bahnkurve heisst Evolute. Die Evolute der Wurfparabel wird dargestellt und diskutiert.

I. EINLEITUNG

Die Kreisbewegung und andere krummlinige Bewegungen werden meist separat behandelt ohne auf die Gemeinsamkeiten einzugehen. Wird insbesondere nur die gleichmässige Kreisbewegung und die gleichmässig beschleunigte Bewegung entlang einer Geraden behandelt, so erleben die Schülerinnen und Schüler nie ein allgemeines Beispiel zum Aktionsprinzip. Das zweite newtonsche Axiom kann bei krummlinigen Bewegungen in folgender Form geschrieben werden:

$$\vec{F}_{res} = m\vec{a}_t + m\vec{a}_z\,, \tag{1}$$

wobei $\vec{a}_t$ die Beschleunigung tangential zur Bahn und

$$a_z = \frac{v^2}{r} \tag{2}$$

die normale oder zentripetale Beschleunigung ist. Diese Zerlegung ist sehr nützlich, denn $\vec{a}_z$ ändert nur die Richtung und $\vec{a}_t$ ändert nur die Schnelligkeit (Betrag der Geschwindigkeit) der Bewegung.

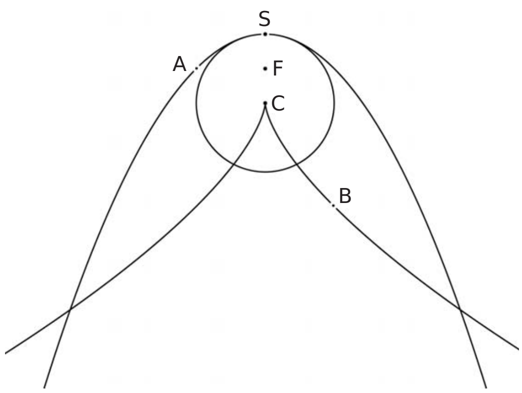

Abbildung 1. Wurfparabel mit Krümmungskreis im Scheitel S und dem geometrischen Ort aller Krümmungskreismittelpunkte (Evolute). Die Evolute ist eine semikubische oder Neil'sche Parabel mit Spitze in C. Der Brennpunkt F der Wurfparabel liegt in der Mitte zwischen S und C. Der Mittelpunkt des Krümmungskreises in A liegt bei B.

II. EVOLUTE DER WURFPARABEL

Der schiefe Wurf ist eine der wenigen krummlinigen Bewegungen, die im Grundlagenunterricht noch gelegentlich behandelt werden. Manchmal ergibt sich sogar ein Berührungspunkt mit der Kreisbewegung, nämlich bei der Looping-Aufgabe (Welche Schnelligkeit muss die Gondel einer Achterbahn im höchsten Punkt eines Loopings mindestens haben, damit die Passagiere nicht herausfallen?). Im Grenzfall schmiegt sich die Kreisbahn im obersten Punkt an die Wurfparabel an. Man kann das auch Gleichung 1 ansehen: Im obersten Punkt ist $a_t = 0$ und es bleibt nur noch die zentripetale Komponente übrig. Man kann aber auch anderswo die Wurfparabel als momentane Kreisbewegung anschauen. Der Radius ist jener des Krümmungskreises. Der geometrische Ort der Krümmungskreismittelpunkte einer Kurve heisst Evolute dieser Kurve. Wie sieht die Evolute der Wurfparabel aus? Eine Wurfparabel mit Scheitel in $(0,0)$ gehorcht folgenden Gleichungen:

$$x(t) = v_0 t \tag{3}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{4}$$

$$y(x) = -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \tag{5}$$

Der Mittelpunkt (x_K, y_K) des Krümmungskreises einer Kurve $y(x)$ wird mit folgender Gleichung[1] berechnet:

$$x_K = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} \tag{6}$$

$$y_K = y + \frac{1+y'^2}{y''} \tag{7}$$

daraus wird in unserem Fall

$$x_K = -\left(\frac{g}{v_0^2}\right)^2 x^3 \tag{8}$$

$$y_K = -\frac{3g}{2}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 - \frac{v_0^2}{g} \tag{9}$$

III. DISKUSSION

Gleichungen 8 und 9 beschreiben eine semikubische oder Neil'sche Parabel in parametrischer Form. Im Scheitel S(0,0) der Wurfparabel hat der Krümmungskreismittelpunkt C, siehe Abb. 1, die Koordinaten $(0, -v_0^2/g)$, d.h. der Krümmungskreis hat den Radius $r = v_0^2/g$. Aus der Looping-Aufgabe ist bekannt, dass sich die Gondel im obersten Punkt mindestens mit $v_0 = \sqrt{gr}$ bewegen muss. Die Resultate passen also zusammen. Der Brennpunkt der Wurfparabel liegt bei $y_F = -v_0^2/(2g)$, also genau zwischen Krümmungskreismittelpunkt und Parabelscheitel. Auch das ist ein bekanntes Resultat, diesmal aus der geometrischen Optik.

Punkt A in Abb. 1 liegt auf der Höhe des Brennpunkts $y_F = -v_0^2/(2g)$ bei $x_A = -v_0^2/g$. Der zugehörige Krümmungskreismittelpunkt liegt bei $x_B = +v_0^2/g = -x_A$ und $y_B = -5v_0^2/(2g) = -5y_F$. Der Abstand AB ist $\sqrt{2}$ mal grösser als der Durchmesser des eingezeichneten Krümmungskreises. In Punkt A kann man ohne weiteres die resultierende Kraft einzeichnen und diese in tangentiale sowie zentripetale Komponenten zerlegen – die Richtungen hat man ja.

IV. SCHLUSSFOLGERUNGEN

Es wäre schön, wenn unsere Schülerinnen und Schüler neben den skalaren Gleichungen $F_{res} = ma$ und $F_{res} = ma_z$ auch mal ein Beispiel zur vektoriellen Gleichung 1 zu sehen bekämen. Ein praktisches Beispiel, wo Gleichung 1 kaum umgangen werden kann, ist das Bremsen in der Kurve. Die Evolute ist sicher kein Thema für den Grundlagenunterricht, aber vielleicht ist ja mal eine Klasse besonders wissbegierig. Dieser Klasse würde ich dann Abb. 1 zeigen und qualitativ besprechen. Der Krümmungskreis liesse sich auch bei keplerschen Ellipsenbahnen gewinnbringend einsetzen.[2]

[1] I. N. Bronstein und K. A. Semendjaiew, *Taschenbuch der Mathematik* (Harri Deutsch, Thun und Frankfurt a. Main, 1981), 20. Aufl.

[2] J. M. Aguirregabiria, "TEACHING ABOUT CENTRAL FORCES," Am. J. Phys. **72**(7), 855 (2004).