Über eine ziemlich allgemeine Zahlenfolge und eine ziemlich allgemeine Funktion

Beat Jaggi, beat.jaggi@phbern.ch

Abstract

Ausgehend von einem verallgemeinerten Mittelwert wird eine Zahlenfolge definiert, die eine Verallgemeinerung von arithmetischen, geometrischen und harmonischen Folgen darstellt. Mit der expliziten Beschreibung dieser Folge kann eine Funktion angegeben werden, die affine Funktionen, Potenzfunktionen, Wurzelfunktionen, Exponentialfunktionen etc. umfasst.

Einleitung

Zwischen gewissen Folgen reeller Zahlen $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$ und Mittelwerten besteht ein enger Zusammenhang: Bei einer arithmetischen Folge ist jedes Folgeglied (mit Ausnahme des ersten) das arithmetische Mittel seiner Nachbarglieder. Analoges gilt für geometrische und harmonische Folgen.

Diese Eigenschaft kann genutzt werden, um rekursive Beschreibungen dieser drei Typen von Folgen zu gewinnen.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad\Longrightarrow\quad a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} \ ; \quad n \geq 1 \tag{1}$$

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}} \quad\Longrightarrow\quad a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \ ; \quad n \geq 1 \tag{2}$$

$$a_n = \frac{2a_{n-1}a_{n+1}}{a_{n-1} + a_{n+1}} \quad\Longrightarrow\quad a_{n+1} = \frac{a_{n-1}a_n}{2a_{n-1} - a_n} \ ; \quad n \geq 1 \tag{3}$$

Sind die ersten beiden Zahlen a_0 und a_1 vorgegeben, dann können wir die Folgeglieder sukzessive berechnen.

Es ist leicht zu sehen, dass aus den rekursiven Beschreibungen (1), (2) und (3) die untenstehenden expliziten Darstellungen folgen:

$$a_n = a_0 + n(a_1 - a_0) = na_1 - (n-1)a_0 \tag{4}$$

$$a_n = a_0 \cdot \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^n = \frac{a_1^n}{a_0^{n-1}} \tag{5}$$

$$a_n = \frac{1}{\frac{1}{a_0} + n\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_0}\right)} = \frac{a_0 a_1}{na_0 - (n-1)a_1} = \frac{a_0 a_1}{a_1 + n(a_0 - a_1)} \tag{6}$$

Setzt man in (4) $a_1 - a_0 = d$ oder in (5) $\frac{a_1}{a_0} = q$, so erhält man die wohlbekannten expliziten Beschreibungen von arithmetischen und geometrischen Zahlenfolgen. (6) ist die explizite Beschreibung einer allgemeinen harmonischen Zahlenfolge. a_0 und a_1 sind dabei so zu wählen, dass der Nenner $a_1 + n(a_0 - a_1)$ für alle $n \in \mathbf{N}_0$ ungleich Null bleibt.

Verallgemeinerter Mittelwert

Die oben beschriebenen Mittelwerte lassen sich zu einem allgemeinen Mittelwert zusammengefassen. (siehe z.B. [1])

Definition: Für zwei positive reelle Zahlen a und b und eine reelle Zahl r definieren wir

$$m_r \quad = \quad \left(\frac{a^r + b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}} \tag{7}$$

Bemerkung: Definition (7) kann auf n Zahlen verallgemeinert werden (siehe [1]).

Eine einfache Rechnung zeigt, dass m_1 das arithmetische und m_{-1} das harmonische Mittel von a und b ist.

Der Fall $r = 0$ verdient besondere Beachtung.

Es gilt:

$$\left(\frac{a^r + b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}} = e^{\ln\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}} = e^{\frac{\ln\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)}{r}}$$

Auf den Quotienten

$$\frac{f(r)}{g(r)} = \frac{\ln\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)}{r}$$

lässt sich die Regel von Bernoulli-de l'Hôpital anwenden, also gilt

$$\lim_{r\to 0}\frac{f(r)}{g(r)} = \lim_{r\to 0}\frac{f'(r)}{g'(r)} = \lim_{r\to 0}\frac{\frac{a^r\cdot\ln a + b^r\cdot\ln b}{a^r+b^r}}{1} = \frac{\ln a + \ln b}{2} = \frac{1}{2}\ln(ab) = \ln(ab)^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{ab}$$

und somit

$$\lim_{r\to 0}\left(\frac{a^r + b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}} = \sqrt{ab}$$

Wir können m_0 mit dem geometrischen Mittel identifizieren und m_r ist tatsächlich für jede reelle Zahl r definiert.

Bemerkungen: 1. Man kann zeigen, dass m_r, aufgefasst als Funktion von r, streng monoton steigt ($a \neq b$). Aus dieser Monotonie von m_r folgen dann die bekannten Ungleichungen $m_{-1} < m_0 < m_1$ zwischen harmonischem, geometrischem und arithmetischem Mittel zweier Zahlen a und b.

2. Es gilt

$$\lim_{r\to\infty} m_r = \mathrm{Max}\{a,b\} \quad \text{und} \quad \lim_{r\to-\infty} m_r = \mathrm{Min}\{a,b\}$$

Allgemeine Mittelwert-Folge

Mit dem im vorherigen Abschnitt definierten verallgemeinerten Mittelwert m_r lässt sich nun für jede reelle Zahl r eine allgemeine Folge definieren: Jedes Folgeglied (mit Ausnahme des ersten) soll der verallgemeinerte Mittelwert seiner Nachbarglieder sein.

$$a_n = \left(\frac{a_{n-1}^r + a_{n+1}^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}} \tag{8}$$

Obwohl die Folgeglieder nun von r abhängen, verzichten wir auf eine entsprechende Anpassung der Bezeichnungen.

Rekursive Beschreibung der verallgemeinerten Mittelwert-Folge:
Auflösen von (8) nach a_{n+1} ergibt eine rekursive Darstellung

$$a_{n+1} = \left(2a_n^r - a_{n-1}^r\right)^{\frac{1}{r}} \tag{9}$$

Nach Vorgabe von zwei Zahlen a_0 und a_1 liefert die obige Formel im Prinzip für jede reelle Zahl r eine Zahlenfolge, die wir als verallgemeinerte Mittelwert-Folge $(a_r)_{n\in\mathbf{N}}$ bezeichnen.

Explizite Beschreibung der verallgemeinerten Mittelwert-Folge

Behauptung: Aus der rekursiven Beschreibung (9) der verallgemeinerten Mittelwert-Folge ergibt sich die folgende explizite Darstellung:

$$a_n = [na_1^r - (n-1)a_0^r]^{\frac{1}{r}} = [a_0^r + n\,(a_1^r - a_0^r)]^{\frac{1}{r}} \tag{10}$$

Beweis: Mit Induktion: Für $n = 0$ und für $n = 1$ ergibt der Term in (10) gerade a_0 resp. a_1.

(9) kann in der Form $a_{n+1}^r = 2a_n^r - a_{n-1}^r$,
(10) in der Form $a_n^r = a_0^r + n\,(a_1^r - a_0^r)$ geschrieben werden.

Die Formel (10) sei richtig für n. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 2a_n^r - a_{n-1}^r &= 2\,[a_0^r + n\,(a_1^r - a_0^r)] - [a_0^r + (n-1)\,(a_1^r - a_0^r)] \\ &= 2a_0^r + 2n\,(a_1^r - a_0^r) - a_0^r - (n-1)\,(a_1^r - a_0^r) \\ &= a_0^r + (2n - (n-1))\,(a_1^r - a_0^r) \\ &= a_0^r + (n+1)\,(a_1^r - a_0^r) = a_{n+1}^r \qquad \text{wzzw.} \end{aligned}$$

Behauptung: Die Zahlenfolge

$$a_n = [na_1^r - (n-1)a_0^r]^{\frac{1}{r}} = [a_0^r + n\,(a_1^r - a_0^r)]^{\frac{1}{r}}$$

beschreibt für $r = 1$ eine arithmetische, für $r = 0$ eine geometrische und für $r = -1$ eine harmonische Folge mit den Anfangsgliedern $a_0 > 0$ und $a_1 > 0$.

Beweis: Die Fälle $r = 1$ und $r = -1$ sind trivial.

$r = 0$:

$$[na_1^r - (n-1)a_0^r]^{\frac{1}{r}} = e^{\ln[na_1^r - (n-1)a_0^r]^{\frac{1}{r}}} = e^{\frac{\ln[na_1^r - (n-1)a_0^r]}{r}}$$

Der Quotient

$$\frac{f(r)}{g(r)} = \frac{\ln[na_1^r - (n-1)a_0^r]}{r}$$

erfüllt wiederum die Voraussetzungen für die Regel von Bernoulli-de l'Hôpital.

$$\frac{f'(r)}{g'(r)} = f'(r) = \frac{na_1^r \cdot \ln a_1 - (n-1)a_0^r \cdot \ln a_0}{na_1^r - (n-1)a_0^r} \quad .$$

Somit wird

$$\lim_{r \to 0} \frac{na_1^r \cdot \ln a_1 - (n-1)a_0^r \cdot \ln a_0}{na_1^r - (n-1)a_0^r} = \frac{n \cdot \ln a_1 - (n-1) \cdot \ln a_0}{n - (n-1)} = \frac{\ln(a_1)^n - \ln(a_0)^{n-1}}{1}$$

$$= \ln\left(\frac{a_1^n}{a_0^{n-1}}\right)$$

und schliesslich folgt

$$\lim_{r \to 0} [na_1^r - (n-1)a_0^r]^{\frac{1}{r}} = \frac{a_1^n}{a_0^{n-1}} = a_0 \cdot \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^n$$

Wir erhalten die explizite Beschreibung einer geometrischen Folge mit den Anfangsgliedern a_0 und a_1 (siehe (5)). wzzw.

Die Folge

$$a_n = [na_1^r - (n-1)a_0^r]^{\frac{1}{r}} = [a_0^r + n\,(a_1^r - a_0^r)]^{\frac{1}{r}}$$

ist also tatsächlich eine Verallgemeinerung von arithmetischen, geometrischen und harmonischen Folgen. Die bekannteste harmonische Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ erhält man mit $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$ und $r = -1$.

Im nächsten Abschnitt ersetzen wir die Zahl $n \in \mathbf{N}_0$ durch $x \in \mathbf{R}$ und untersuchen die so entstehende Funktion.

Verallgemeinerte Funktion

Da jede Zahlenfolge als Funktion mit Definitionsmenge $\mathbf{N}_0$ aufgefasst werden kann, wird die oben beschriebene Folge durch Erweitern der Definitionsmenge zu einer reellen Funktion.

Definition Zu zwei (positiven) reellen Zahlen a_0 und a_1 setzen wir

$$f_r(x) \quad = \quad [a_0^r + x\,(a_1^r - a_0^r)]^{\frac{1}{r}} \quad ; \qquad r \in \mathbf{R} \tag{11}$$

Bemerkung: Die Definitionsmenge der Funktion f_r hängt von r und von der Wahl von a_0 und a_1 ab.

Durch besondere Wahl von a_0, a_1 und r erhält man mit (11) zahlreiche elementare Funktionen:

Funktion(styp)	r	a_0	a_1	**Funktionsgleichung**
Potenzfunktionen	> 0	0	1	$f_{1/r}(x) = x^r$
Wurzelfunktionen	$n \in \mathbf{N}$	0	1	$f_n(x) = \sqrt[n]{x}$
Quadratwurzelfunktion	2	0	1	$f_2(x) = \sqrt{x}$
Exponentialfunktionen	0	A	$A \cdot b$	$f_0(x) = A \cdot b^x$
Affine Funktionen	1	q	$m + q$	$f_1(x) = mx + q$
Besondere rationale Funktion	-1	$\frac{1}{q}$	$\frac{1}{m+q}$	$f_{-1}(x) = \frac{1}{mx+q}$

So ist

$$f_r(x) = \left[a_0^r + x\,(a_1^r - a_0^r)\right]^{\frac{1}{r}} \quad ; \qquad r \in \mathbf{R}$$

eine Verallgemeinerung aller Funktionen, die in der obigen Liste aufgeführt sind.

Bemerkung: Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ kann nicht direkt erzeugt werden.

Mit $a_0 = 1,\ a_1 = \frac{1}{2}$ gilt aber $f_{-1}(x-1) = \frac{1}{x}$.

Schlussbemerkung: Die oben vorgestellte Zahlenfolge a_n und die Funktion f_r müssten eigentlich bekannt und schon untersucht worden sein. Hinweise nimmt der Autor dankbar entgegen.

Literatur:

[1] G. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polyá, Inequalities, Second edition, Cambridge Mathematical Library, 1952