Aha! Mathematik! – Teil II.
Was bei der Approximation von Funktionswerten passieren kann.

Urs Stammbach

Am Anfang steht ein numerisches Experiment mit der Funktion

$$f : x \;\to\; f(x) = \sin\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x-2}\right) .$$

Die Vorstellung ist die, dass in einer Anwendung der Funktionswert von f innerhalb einer längeren Rechnung bestimmt werden muss und zwar für Werte von x, die ihrerseits aus Messungen errechnet wurden und deshalb nur näherungsweise bekannt sind. Dabei wird angenommen, dass der Wert des Argumentes x mit zusätzlichem Aufwand beliebig genau gemacht werden kann. Das Folgende ist dann sozusagen eine Demonstration dieses Vorganges in einer kontrollierten Umgebung. Die Funktion f wird zuerst an den Stellen

$$3.9,\ 3.99,\ 3.999,\ 3.9999,\ 3.99999, \cdots$$

ausgewertet, also auf einer Folge von Zahlen, die sehr rasch gegen den als genau angesehenen Wert 4 konvergiert. Mit jedem Schritt wird die Distanz zum "richtigen" Wert 4 um den Faktor 10 verkleinert. Diese Folge von Zahlen deutet die sukzessiv immer besser werdende Genauigkeit für die Grösse x an.

Ferner wird die gleiche Rechnung für die Folge von Zahlen

$$1.9,\ 1.99,\ 1.999,\ 1.9999,\ 1.99999, \cdots$$

durchgeführt, welche gegen 2 konvergiert. Die zugehörigen Berechnung liefert folgende Werte:[1]

x	$f(x)$		x	$f(x)$
3.9	0.8313595846		1.9	0.4413721770
3.99	0.8603029298		1.99	0.0330343010
3.999	0.8629213180		1.999	−0.9823680634
3.9999	0.8631805876		1.9999	−0.1634533406
3.99999	0.8632064890		1.99999	−0.0748074451
3.999999	0.8632090789		1.999999	−0.6256837105
3.9999999	0.8632093379		1.9999999	−0.9457588989
3.99999999	0.8632093638		1.99999999	−0.9997768755
3.999999999	0.8632093664		1.999999999	0.9978731823

Offensichtlich ist das Verhalten der Funktion f in der Nähe der beiden durch $x = 2$ und $x = 4$ gegebenen Punkte völlig unterschiedlich. Während für $x = 4$ die Werte $f(x)$ sich

[1] Die Werte wurden vor einigen Jahren mit Hilfe von Mathematica bestimmt; neuere Systeme ergeben möglicherweise Abweichungen, das wesentliche Verhalten der Werte bleibt aber dasselbe.

– wie eine weitere Rechnung bestätigt – sukzessive der Zahl $0.8632093666\cdots$ nähern, streuen sie für $x = 2$ “chaotisch” über einen weiten Bereich.

Was geht hier vor? Das Verhalten an der Stelle $x = 4$ überrascht niemanden, wohingegen das Verhalten an der Stelle $x = 2$ wohl jedermann verblüfft. Man kann sich leicht vorstellen, dass ein derartiges chaotisches Verhalten bei Anwendungen zu echten Problemen führen kann. Kann denn die Mathematik in ähnlich gelagerten Fällen einen solchen unerwünschten Effekt ausschliessen? Und auf welche Weise? Wie ist zum Beispiel zu rechtfertigen, dass man bei der Berechnung des Kreisumfanges oder der Kreisfläche für die irrationale Zahl π mit einem Näherungswert 3.14 oder 3.14159 rechnen darf, um eine Approximation des “richtigen” Wertes für den Umfang und die Fläche zu erhalten? Hat man in diesem Fall tatsächlich immer ein Verhalten vor sich, das dem Verhalten der Funktion f bei $x = 4$ entspricht und nicht dem Verhalten bei $x = 2$? Und weshalb ist dies so?

Die mathematische Erklärung des Phänomens führt auf den wichtigen Begriff der *Stetigkeit* von Funktionen. Die Funktionen, die bei der Berechnung des Kreisumfangs und der Kreisfläche auftreten, sind stetig. Stetig ist auch die obige Funktion f an der Stelle $x = 4$, während sie an der Stelle $x = 2$ kompliziertere Eigenschaften besitzt. In der Tat macht die Formel für f an der Stelle $x = 2$ keinen Sinn: man müsste “durch Null dividieren”. (Das haben natürlich einige bereits am Anfang bemerkt.) Um zu einer überall definierten Funktion zu gelangen, muss der Wert von f an der Stelle $x = 2$ noch gesondert vorgegeben werden. Dies kann hier auf verschiedene Art geschehen, denn *jeder* Wert für $f(2)$ liefert eine Funktion, die f vervollständigt. Aber jede dieser denkbaren, vervollständigten Funktionen ist an der Stelle $x = 2$ *nicht* stetig.

Die *Stetigkeit* einer Funktion f an einer Stelle x ist mathematisch dadurch definiert, dass der Funktionswert $f(x)$ für *jede* gegen x konvergierende Folge $\{x_n\}$ mit dem Grenzwert der Folge $\{f(x_n)\}$ übereinstimmt. Man schliesst aus der obigen Diskussion, dass *erst die Stetigkeit einer Funktion an der Stelle x es erlaubt, den Funktionswert mit Hilfe von Approximationen des Argumentes x zu berechnen.* Dies hat eine wichtige Konsequenz für Anwendungen. Wenn es zum Beispiel darum geht, einen mathematischen Zusammenhang zwischen physikalischen Messgrössen herzustellen, so ist dies im allgemeinen nur dann sinnvoll, wenn die involvierten Funktionen für alle in Frage kommenden Werte stetig sind. Denn die Messwerte, die in die zugehörigen Berechnungen eingehen, sind immer nur Approximationen der “eigentlich richtigen” Werte. In der historischen Entwicklung der Mathematik war dies dann natürlich einer der Gründe dafür, sich vorwiegend, ja fast ausschliesslich, nur mit *stetigen* Funktionen zu beschäftigen. So sind denn auch die *üblichen* Funktionen, die im gymnasialen Mathematikunterricht behandelt werden, für alle Werte, an denen sie definiert sind, stetig.