A propos du volume d'un segment sphérique

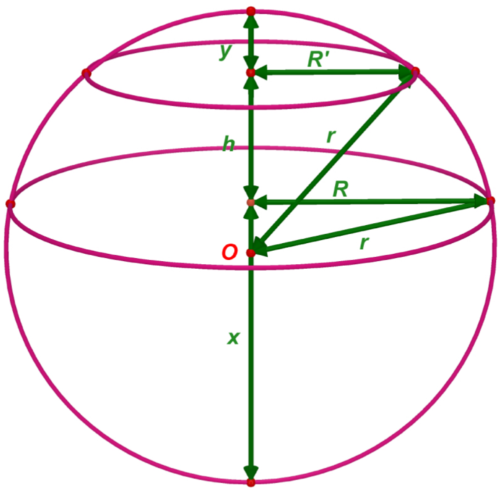
Jean Piquerez

Un de mes ex-collègues m'a récemment fait part de son embarras à démontrer la formule du volume d'un segment sphérique proposée par André Delessert à l'exercice 335, page 245, de son ouvrage intitulé « Introduction à la géométrie de l'espace » aux Editions Loisirs et Pédagogie ». Je me suis donc attelé à cette tâche, un peu délicate, mais loin d'être insurmontable.

Il s'agit de démontrer la formule $V = \dfrac{\pi}{6} h(3R^2 + 3R'^2 + h^2)$ où h représente la hauteur du segment, R et R' étant les rayons des deux bases circulaires.

Par intégration, on obtient : $V = \pi \displaystyle\int_{\sqrt{r^2 - R^2}}^{\sqrt{r^2 - R'^2}} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{3}\left(2r^2h + R'^2\sqrt{r^2 - R'^2} - R^2\sqrt{r^2 - R^2}\right)$ (1)

r étant le rayon de la sphère.



Or, on a les relations suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll} (2) & R^2 = x(2r - x) \\ (3) & R'^2 = y(2r - y) \\ (4) & x + y + h = 2r \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 - 2rx + R^2 = 0 \\ y^2 - 2ry + R'^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (5) = (2) - (3) \quad (x - y)(x + y - 2r) + R^2 - R'^2 = 0 \Rightarrow$$

$$(6) \quad (x - y)h = R^2 - R'^2 \Rightarrow x - y = \frac{R^2 - R'^2}{h}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (6) & x + y = 2r - h \\ (4) & x - y = \dfrac{R^2 - R'^2}{h} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} (7) & x = r - \dfrac{h}{2} + \dfrac{R^2 - R'^2}{2h} \\ (8) & y = r - \dfrac{h}{2} - \dfrac{R^2 - R'^2}{2h} \end{array}\right\}$$

En supposant $x \geq r$ et $y \leq r$, on peut écrire : (9) $x = r + \sqrt{r^2 - R^2}$ et (10) $y = r - \sqrt{r^2 - R'^2}$

(9) et (10) dans (1) : $V = \dfrac{\pi}{3}\left[2r^2h + R'^2(r - y) - R^2(x - r)\right] = \dfrac{\pi}{3}\left[2r^2h + r(R^2 + R'^2) - R^2x - R'^2y\right]$

En tenant compte de (7) et (8), il vient :

$$V = \frac{\pi}{3}\left[2r^2h + r(R^2 + R'^2) - R^2\left(r - \frac{h}{2} + \frac{R^2 - R'^2}{2h}\right) - R'^2\left(r - \frac{h}{2} - \frac{R^2 - R'^2}{2h}\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$(11)\quad V = \frac{\pi}{3}\left[2r^2h + \frac{(R^2 + R'^2)h}{2} - \frac{(R^2 - R'^2)^2}{2h}\right]$$

Or, si l'on s'est débarrassé des racines, il n'en subsiste pas moins r dans cette formule.

Cependant, on a : (12) $h = \sqrt{r^2 - R'^2} - \sqrt{r^2 - R^2} \Rightarrow h^2 = 2r^2 - (R^2 + R'^2) - 2\sqrt{r^2 - R'^2}\sqrt{r^2 - R^2} \Rightarrow$

$$\left[2r^2 - (R^2 + R'^2) - h^2\right]^2 = 4(r^2 - R^2)(r^2 - R'^2) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{4r^4} + (R^2 + R'^2)^2 + h^4 \cancel{- 4r^2(R^2 + R'^2)} - 4r^2h^2 + 2h^2(R^2 + R'^2) = \cancel{4r^4} \cancel{- 4r^2(R^2 + R'^2)} + 4R^2R'^2$$

$$(13)\quad \underbrace{(R^2 + R'^2)^2 - 4R^2R'^2}_{(R^2 - R'^2)^2} = -h^4 + 4r^2h^2 - 2h^2(R^2 + R'^2)$$

(13) dans (11) : $V = \frac{\pi}{3}\left[2r^2h + \frac{(R^2 + R'^2)h}{2} + \frac{h^3 - 4r^2h + 2h(R^2 + R'^2)}{2}\right] =$

$$\frac{\pi}{6}h\left[\cancel{4r^2} + (R^2 + R'^2) + h^2 \cancel{- 4r^2} + 2(R^2 + R'^2)\right] = \frac{\pi}{6}h\left(3R^2 + 3R'^2 + h^2\right)$$ Ouf !!

Remarques : 1) $x = r - \sqrt{r^2 - R^2}$*, on sépare le segment sphérique en deux segments, l'un, de bases* R', r *et de hauteur* h_1*, l'autre, de bases* R, r *et de hauteur* h_2*, de part et d'autre de l'équateur, et on additionne leurs volumes à l'aide de la formule précédente. On obtient alors :*

$$\frac{\pi}{6}h_1\left(3r^2 + 3R'^2 + h_1^2\right) + \frac{\pi}{6}h_2\left(3r^2 + 3R^2 + h_2^2\right) = \frac{\pi}{6}\left[3(h_1 + h_2)r^2 + 3(h_1R'^2 + h_2R^2) + (h_1^3 + h_2^3)\right] =$$

$$\frac{\pi}{6}\left\{3(h_1 + h_2)r^2 + 3h(R'^2 + R^2) - 3(h_2R'^2 + h_1R^2) + \underbrace{(h_1 + h_2)}_{h}\left[(h_1 + h_2)^2 - 3h_1h_2\right]\right\} =$$

$$\frac{\pi}{6}\left[3h_1(\underbrace{r^2 - R^2}_{h_2^2}) + 3h_2(\underbrace{r^2 - R'^2}_{h_1^2}) + 3h(R'^2 + R^2) + h^3 - 3(h_1 + h_2)h_1h_2\right] = \frac{\pi}{6}h(3R^2 + 3R'^2 + h^2)$$

2) La formule étant vraie en toute généralité, si l'on pose :

a) $R' = 0$*, il vient :* $\frac{\pi}{6}h\left(3R^2 + h^2\right)$ *volume d'une calotte sphérique de hauteur* h *et de rayon* R

b) $R = R' = 0 \Rightarrow h = 2r$*, il vient :* $\frac{\pi}{6}h^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$ *volume de la sphère de rayon* r.