Ein Einblick ins EU-Projekt FIBONACCI: Die allgemeine arithmetische Folge k-ter Ordnung

Peter Gallin, Universität Zürich

Auf Einladung der Universität Bayreuth (Deutschland) hat die Schweiz die Gelegenheit, am EU-Projekt FIBONACCI teilzunehmen, welches von Anfang Januar 2010 bis Ende Februar 2013 dauert. Über die Adresse „http://www.fibonacci-project.eu" kann man sich weiter informieren. Das Projekt hat sich zum Ziel gesetzt, den Unterricht in Naturwissenschaft und Mathematik auf allen Schulstufen zu vertiefen, ohne die bestehenden Schulstrukturen in den einzelnen Ländern zu verändern. Der auf Englisch verfasste Auftrag lautet: „Large scale dissemination of inquiry-based science and mathematics education (IBSME)". Die Universität Zürich (insbesondere das Institut für Gymnasial- und Berufspädagogik), welche die Schweiz im Projekt vertritt, kann sich als sogenanntes „Twin Center 1" auf die Universität Augsburg als „Reference Center" beziehen und so von den Erfahrungen aus ähnlichen Projekten in Deutschland profitieren. Dabei haben sich beide Institutionen auf den Mathematikunterricht in der Primar- und Sekundarstufe beschränkt. In deutscher Übersetzung des Auftrags ist also unser Ziel die Verbreitung eines **forschungsorientierten Mathematikunterrichts** (so unsere Übersetzung von „inquiry-based mathematics education") in der Primar- und Sekundarschule sowie im Gymnasium.

The Fibonacci Project

DISSEMINATING INQUIRY-BASED SCIENCE AND MATHEMATICS EDUCATION IN EUROPE

SUPPORTED BY

EUROPEAN UNION

SEVENTH FRAMEWORK PROGRAMME

Als „Twin Center 1" beteiligt sich die Schweiz mit der Arbeit in rund 40 Schulklassen aus dem Umfeld von Zürich während der beiden Schuljahre 2010/11 und 2011/12. Die übrig bleibenden Randzeiten dienen der Vor- und Nachbereitung des Projekts. An einem ersten Informationstreffen im Sommer 2010 wurden die Grundzüge eines forschungsorientierten Mathematikunterrichts allen beteiligten Lehrpersonen dargelegt. Ohne weitere Theorien haben die Lehrkräfte mit kleinen Schritten erste Versuche gemacht und tauschen nun ihre Erfahrungen an verschiedenen stufen- oder schulgebundenen Treffen aus. Die Projektleitung berät sie auch, wenn sie weiteren Kolleginnen und Kollegen helfen wollen, deren Unterricht forschungsorientiert umzugestalten. Auf diese Weise soll sich die Verbreitung (Dissemination) — idealistisch gedacht — so rasant gestalten wie die Vermehrung der Kaninchen bei Fibonacci. Alle Aktivitäten sind eng an den täglichen Unterricht und den vorgegebenen Lehrplanstoff gebunden und unterstützen direkt die Unterrichtsvorbereitung wie auch die Unterrichtsevaluation, so dass der Gesamtaufwand für das Projekt nicht höher sein soll als das Unterrichten zusammen mit der üblichen beruflichen Weiterbildung.

Hier eine knappe Übersicht über die vier Hauptetappen eines forschungsorientierten Mathematikunterrichts als Gleichgewicht von Angebot der Lehrperson und Nutzung der Lernenden:

- Die Schülerinnen und Schüler erhalten Problemstellungen, die mit dem Lehrplanstoff eng verbunden sind und eigene Denkwege zulassen. (Erstes Angebot)
- Die Schülerinnen und Schüler protokollieren ihre Überlegungen, Versuche und Ergebnisse in einem Forschungsjournal. (Erste Nutzung)
- Die Lehrperson organisiert den Austausch unter den forschenden Lernenden und gibt gezielte Rückmeldungen zu beachtenswerten Einsichten. (Zweiters Angebot)
- Die Lehrperson stellt einerseits die interessanten und andererseits die weiterführenden Resultate für alle Lernenden zusammen. (Zweite Nutzung)

Dass bei solchem Vorgehen immer wieder Überraschendes auch für die Lehrperson auftaucht, möge das folgende Beispiel aus dem Unterricht von Bruno Lustenberger an der Kantonsschule Glattal in Dübendorf zeigen. In der Klasse MN5 (Schwerpunkt Mathematik und Physik) sind die arithmetischen und geometrischen Folgen bekannt. Schauen wir nun, wie sich die vier Etappen des forschungsorientierten Unterrichts im November 2011 konkret abgespielt haben.

Erstes Angebot: Der Forschungsauftrag

- Versuchen Sie, mindestens einen weiteren Typ von Folgen zu definieren, und untersuchen Sie die Folgen von diesem Typ.
- Geben Sie wenn möglich die rekursiven und expliziten Formeln an.
- Machen Sie auch einige Beispiele von solchen Folgen.

Erste Nutzung: Einblick ins Journal von Abdullah, Ceren und Kevin

Stellvertretend für die zum Teil interessanten Vorschläge der Gruppen soll hier die Arbeit der drei Schüler Abdullah, Ceren und Kevin näher beleuchtet werden. Einleitend schreiben sie: „Bisher war es so, dass von Glied zu Glied entweder um einen festen Wert oder mit einem festen Faktor erhöht wurde. Idee: Wir nehmen das ‚fest' weg. Wenn wir dies machen, bildet die ‚Differenz' der Glieder selbst wieder eine [arithmetische] Folge.“ Nun betrachten sie die Folge $1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, \ldots$ deren Differenzenfolge die natürlichen Zahlen sind. Da sie die Formel für die Summe der natürlichen Zahlen kennen, folgern sie sofort, dass die explite Darstellung $a_n = a_1 + \frac{n(n-1)}{2}$ heissen muss. Nach einem nicht ganz geglückten zweiten Beispiel — nämlich der Folge der Quadratzahlen — und um nicht von Zufälligkeiten abgelenkt zu werden, wenden sie sich einer Folge zu, deren Glieder und Differenzen grössere Zahlen sind:

Folgenglieder	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	...
Werte	8	83	176	287	416	563	728	911	...
1. Differenzenfolge	75	93	111	129	147	165	183	...	
2. Differenzenfolge	18	18	18	18	18	18	...		

Geschickt untersuchen sie, wie sich $a_5 = 416$ aus a_1, der Startzahl 75 der 1. Differenzenfolge und der Startzahl 18 der 2. Differenzenfolge zusammensetzt:

$$a_5 = 416 = 8 + 75 + \overbrace{75 + 18}^{93} + \overbrace{75 + 18 + 18}^{111} + \overbrace{75 + 18 + 18 + 18}^{129}$$

Sie erkennen die Struktur $a_5 = 8 + 75 \cdot (5-1) + 18 \cdot \frac{(5-1)(5-2)}{2}$, führen die Parameter $d = 75$ und $e = 18$ ein und schreiben sofort die allgemeine Form hin:

$$a_n = a_1 + d \cdot (n-1) + e \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Beflügelt vom Erfolg wagen sie eine (vorerst noch falsche) Prognose für eine nächste Stufe, nämlich einer Folge, bei der erst die 3. Differenzenfolge konstant ist:

$$a_n = a_1 + d \cdot (n-1) + e \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} + f \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}$$

Als Beispiel wählen sie die folgende neue Folge:

Folgenglieder	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	...
Werte	87	93	113	155	227	337	...
1. Differenzenfolge	6	20	42	72	110	...	
2. Differenzenfolge	14	22	30	38	...		
3. Differenzenfolge	8	8	8	...			

Wieder wenden sie ihre Methode der Rückführung auf die ersten Folgenglieder an und untersuchen $a_5 = 227$:

$$a_5 = 227 = 87 + 6 + \overbrace{6 + 14}^{20} + \overbrace{6 + 14 + \overbrace{14 + 8}^{22}}^{42} + \overbrace{6 + 14 + \overbrace{14 + 8}^{22} + \overbrace{14 + 8 + 8}^{30}}^{72}$$

Nur bei der Anzahl Summanden 8 sind sie unsicher und schreiben:
$a_5 = 227 = 87+6(5-1)+14\cdot\frac{(5-1)(5-2)}{2}+8\cdot$Term, wobei sie sich für den Term eine Auswahl angeben: $T_1 = \frac{(n-1)(n-3)}{2}$; $T_2 = \frac{(n-1)(n-2)}{3}$; $T_3 = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3}$. So merken sie, dass T_3 der richtige ist, führen wiederum die Parameter $d = 6$, $e = 14$ und $f = 8$ ein und notieren die allgemeine und jetzt korrekte Formel

$$a_n = a_1 + d\cdot(n-1) + e\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{2} + f\cdot\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3}\ .$$

Nun kann sie nichts mehr bremsen. Eine arithmetische Folge 4. Ordnung — den Namen kennen sie natürlich noch nicht — testen sie erfolgreich mit der Formel

$$a_n = a_1 + d\cdot(n-1) + e\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{2} + f\cdot\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3} + g\cdot\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\cdot 3\cdot 4}\ .$$

Zweites Angebot: Fachliche Reflexion und Beweis des Lehrers

Beim Forschen zum Thema „selbstgefertigte Folgen“ haben die Schüler ein Bauprinzip für die allgemeine arithmetische Folge k-ter Ordnung gefunden, das vermutlich nicht sehr bekannt ist. Jedenfalls musste sich der Lehrer hinsetzen und die Behauptungen nachprüfen. Abdullah, Ceren und Kevin behaupten:

$$a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{i!}\prod_{j=1}^{i}(n-j)$$

Dabei ist der Koeffizient λ_i das erste Glied der i-ten Differenzenfolge. Nun ist aber

$$\frac{1}{i!}\prod_{j=1}^{i}(n-j) = \binom{n-1}{i}\ ,$$

wobei wir jene Binomialkoeffizienten als Null festlegen, bei denen die untere Zahl grösser ist als die obere. Setzen wir $a_1 = \lambda_0$, können wir die Behauptung der drei Schüler kompakt schreiben:

$$a_n = \sum_{i=0}^{k}\lambda_i\binom{n-1}{i}\ .$$

Bilden wir die 1. Differenzenfolge $d_n = a_{n+1} - a_n$, so ergibt sich

$$d_n = a_{n+1} - a_n = \sum_{i=0}^{k}\lambda_i\binom{n}{i} - \sum_{i=0}^{k}\lambda_i\binom{n-1}{i} = \sum_{i=0}^{k}\lambda_i\left(\binom{n}{i} - \binom{n-1}{i}\right) = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\binom{n-1}{i-1}\ .$$

Durch Umnummerieren mit dem Summationsindex $j = i - 1$ ergibt sich

$$d_n = a_{n+1} - a_n = \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_{j+1} \binom{n-1}{j} \ .$$

Das ist aber die behauptete Formel für eine arithmetische Folge $(k-1)$-ter Ordnung, womit per Induktion deren Richtigkeit gezeigt ist. Insbesondere ist die k-te Differenzenfolge die konstante Folge, welche nur aus λ_k besteht.

Natürlich hat der Lehrer im Unterricht den Beweis nicht in dieser Allgemeinheit geführt. Beim Präsentieren ausgewählter Ideen und Ergebnisse aus den Texten der Schülerinnen und Schüler konnte er aber problemlos auf den Kerngedanken der Binomialkoeffizienten und die Additionseigenschaft im Pascalschen Dreieck hinweisen, welche ja bereits in der Struktur der obigen Tabellen erkennbar ist.

Zweite Nutzung: Die Fortsetzung des Unterrichts nimmt einen nicht geplanten Verlauf

Mit der Einsicht von Abdullah, Ceren und Kevin können die Schülerinnen und Schüler selbständig ein Problem lösen, welches normalerweise vom Lehrer über aufwendige Rechnungen oder sogar mit einem Induktionsbeweis bearbeitet werden muss. Es geht um die Berechnung der Formel für die Summe der ersten n Quadratzahlen. Beim Verwenden der obigen Tabellenstruktur für Folgen und deren Differenzenfolgen wir klar, dass die Quadratzahlen eine arithmetischen Folge 2. Ordnung und demzufolge deren Teilsummenfolge eine arithmetische Folge 3. Ordnung bilden müssen. Das oben verwendete Tabellenschema sieht folgendermassen aus:

Folgenglieder	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	...
Werte	1	5	14	30	55	91	...
1. Differenzenfolge	4	9	16	25	36	...	
2. Differenzenfolge	5	7	9	11	...		
3. Differenzenfolge	2	2	2	...			

Also gilt hier $a_1 = 1$, $d = 4$, $e = 5$ und $f = 2$ und wir erhalten für das allgemeine Glied dieser arithmetischen Folge 3. Ordnung

$$a_n = 1 + 4 \cdot (n-1) + 5 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2 \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3} \ .$$

Eine direkte Termumformung liefert die bekannte Summenformel für die Quadratzahlen:

$$a_n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Nun ist Tür und Tor offen für Formeln, welche die Summe von höheren Potenzen natürlicher Zahlen angeben. Beispiel: Aus der entsprechenden Tabelle für die 1. Differenzenfolge $8, 27, 64, 125, \ldots$ entnimmt man

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1\binom{n-1}{0} + 8\binom{n-1}{1} + 19\binom{n-1}{2} + 18\binom{n-1}{3} + 6\binom{n-1}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Fazit: Der forschungsorientierte Mathematikunterricht nimmt oft ungeplante Wendungen, kann sich fachlich für alle Beteiligten interessant vertiefen und gibt den Lernenden Einblicke in die Denk- und Arbeitsweise ihrer Mitschülerinnen und Mitschüler.

Anmerkung: Auf der Seite „https://www.wias-berlin.de/people/stephan/folgen.htm“ kann man über den Link „Zahlenfolgen, pdf-File (412 kB)“ einen interessanten Artikel von Holger Stephan (Weierstraß–Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, Berlin) herunterladen. Im Kapitel 1.4 „Arithmetische Folgen und Pascalsches Dreieck“ wird die Einsicht der drei Schüler Abdullah, Ceren und Kevin behandelt.