

Rationale Gewirre

Tobias Christ, ETH Zürich

1 Einleitung

Wir begeben uns auf einen Nebenschauplatz der Knotentheorie und betrachten rationale Gewirre. Das sind die Objekte, die entstehen, wenn man die Enden von zwei Schnüren sukzessive miteinander verdreht. In diesem Artikel beweisen wir J. H. Conways Fundamentalsatz über rationale Gewirre: *Zwei rationale Gewirre sind genau dann äquivalent, wenn die ihnen zugeordneten Kettenbrüche als rationale Zahlen gleich sind.*¹ Im wesentlichen bedeutet er, dass sich rationale Gewirre komplett charakterisieren lassen. Für allgemeinere Gewirre, Knoten oder Verschlingungen gibt es viele interessante Ansätze, aber man ist von einer vollständigen Klärung der Sachlage in einer vergleichbaren Weise, wie sie für rationale Gewirre möglich ist, weit entfernt. Wir beweisen den Fundamentalsatz vollständig, indem wir uns so weit wie möglich elementarer Werkzeuge bedienen. Für den zweiten Teil des Artikels werden elementare Begriffe aus der Knotentheorie, namentlich *Reidemeisterbewegungen* als bekannt vorausgesetzt. Wir folgen im Wesentlichen dem Beweis von J. R. Goldman und L. H. Kauffman.² Damit hoffen wir, dieses interessante Stück Mathematik einem breiteren Publikum und insbesondere dem Mittelschulunterricht zugänglicher zu machen. Mathematisch strenge Definitionen werden nur angedeutet oder sogar ganz weggelassen, soweit es der Stoff zulässt. Dafür wird an die Vorstellungskraft des Lesers appelliert. Eine ausführlichere Version des Artikels mit Aufgaben und einer längeren Einführung ist auf EducETH³ verfügbar.

Zwei beliebig miteinander verwirrte Schnüre werden ein *Gewirr* genannt. Im Gegensatz zu Knoten, die aus einer in sich geschlossenen Schnur bestehen, bestehen Gewirre aus mindestens zwei Schnurstücken, und beide haben zwei Enden. Man stelle sich eine Schachtel mit vier Löchern vor. Die eine Schnur geht durch eines der Löcher in die Schachtel hinein und verlässt sie durch ein anderes Loch. Die zweite Schnur geht durch eines der beiden übriggebliebenen Löcher in die Schachtel und verlässt sie durch das letzte. Innerhalb der Schachtel sind die Schnüre auf beliebige Weise verknötet und verheddert. Möglicherweise be-

finden sich in der Schachtel auch noch zusätzliche Knoten, mit denen die beiden Schnüre verheddert sind. Im gleichen Geiste wie bei den Knoten bezeichnen wir zwei Gewirre als *äquivalent*, wenn man durch elastische Änderungen innerhalb der Schachtel von einem zum anderen übergehen kann. Wie bei den Knoten ist es dabei verboten, eine Schnur zu zerschneiden und dann wieder zusammensetzen. Zusätzlich verlangen wir jetzt aber, dass die Enden in den jeweiligen Löchern bleiben. Wir beschränken uns auf Gewirre mit genau vier Enden. Im folgenden denken wir uns die vier Eckpunkte immer in der xy -Ebene liegend mit den Koordinaten $\frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1)$ und $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1, -1)$, siehe Abb. 1. Entsprechend sprechen wir vom nordöstlichen, beziehungsweise südöstlichen, nordwestlichen oder südwestlichen Endpunkt. Die anderen Abbildungen, z.B. 2 und 6, zeigen jeweils das *Diagramm* des Gewirrs, also die Projektion auf die xy -Ebene.

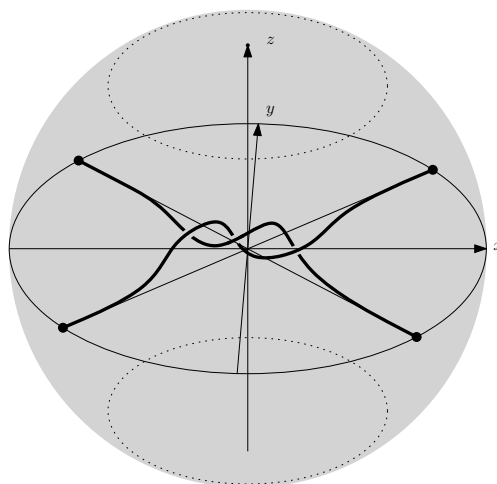


Abb. 1: Wie ein Gewirr im Raum liegt: Die Enden liegen fest auf dem Rand der Einheitssphäre in der xy -Ebene, das Gewirr liegt im Innern der Einheitskugel (in diesem Beispiel t_3).

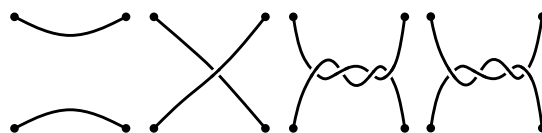


Abb. 2: Die ganzzahligen Gewirre t_0 , t_1 , t_4 und t_{-4} .

¹J. H. Conway. An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties. In *Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967)*, pages 329–358. Pergamon, Oxford, 1970.

²J. R. Goldman and L. H. Kauffman. Rational tangles. *Advances in Applied Mathematics*, 18(3):300 – 332, 1997.

³<http://www.educ.ethz.ch/>

2 Rationale Gewirre

Zwei horizontale parallele Schnüre nennen wir das Nullgewirr t_0 . (Siehe Abb. 2, links.) Analog definieren wir t_∞ als zwei parallele vertikale Schnüre. Wir definieren *rationale Gewirre* rekursiv:

1. Das Nullgewirr ist rational.
2. Verdreht man zwei benachbarte Enden eines rationalen Gewirrs, so entsteht wieder ein rationales Gewirr.

Das heisst, ein Gewirr ist rational, wenn es aus dem Nullgewirr durch sukzessives Verdrehen von jeweils benachbarten Enden gewonnen werden kann.

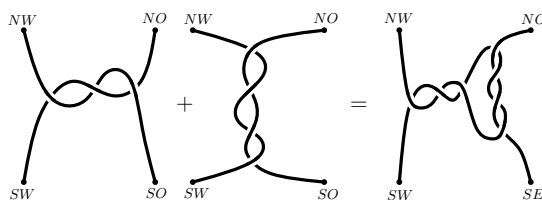


Abb. 3: Die Addition zweier Gewirre.

Aus zwei Gewirren A und B ergibt sich ein Gewirr $A + B$, indem der nordöstliche Endpunkt von A mit dem nordwestlichen von B und der südöstliche Endpunkt von A mit dem südwestlichen von B verbunden wird (siehe Abb. 3). Wir nennen das Gewirr $A + B$ die *Summe* der Gewirre A und B .

Sei a eine ganze Zahl. Das Gewirr t_a erhält man durch $|a|$ -maliges Verdrehen der beiden Schnüre des Nullgewirrs, falls a positiv ist, in die eine Richtung, falls a negativ ist, in die andere Richtung. Wir nennen t_a ein *ganzzahliges Gewirr*. In Abb. 2 sind die Gewirre t_0, t_1, t_4 und t_{-4} zu sehen.

Für das folgende Theorem erinnere man sich an die Definition von Gewirren: Gewirre liegen in der Einheitskugel, die Enden an einem festen Punkt am Rand, siehe Abb. 1. In den üblichen Bildern sieht man eigentlich die Projektion eines Gewirrs auf die xy -Ebene mit der zusätzlichen Information, welche der beiden Schnüre bei einer Kreuzung weiter oben und welche weiter unten liegt. Das Theorem ist entscheidend für das Verständnis von rationalen Gewirren. Es besagt, dass wenn man rationale Gewirre um die x - oder die y -Achse mit 180° dreht, ein äquivalentes Gewirr herauskommt. Diese Aussage ist ganz und gar nicht trivial, denn so eine Drehung ist keine Isotopie von Gewirren, da die Enden nicht fixiert bleiben. Bei einer Drehung um die x -Achse mit 180° werden zum Beispiel das nordwestliche und das südwestliche Ende sowie das nordöstliche und das südöstliche Ende vertauscht.

Theorem 1 *Ein rationales Gewirr ergibt unter einer Drehung um die x - oder y -Achse mit 180° ein äquivalentes Gewirr.*

Beweis. Wir verwenden die Tatsache, dass ein rationales Gewirr per definitionem aus einer Folge von Verdrehungen von jeweils zwei seiner Enden aus dem Nullgewirr t_0 hervorgegangen ist. Wir verwenden Induktion über der Anzahl solcher Verdrehungsschritte. Wir bezeichnen das Gewirr, das aus A durch eine 180° -Drehung um die x -Achse entsteht, mit A^x und das Gewirr, das aus einer 180° -Drehung um die y -Achse entsteht, mit A^y . Die Behauptung gilt offensichtlich für t_0 : Eine Drehung um die x - oder y -Achse überführt das Nullgewirr in sich. Ebenso lässt sich einfach nachprüfen, dass t_k für $k \in \mathbb{Z}$ durch solche Drehungen in sich überführt wird, also $t_k^x \equiv t_k \equiv t_k^y$.

Sei nun A ein beliebiges rationales Gewirr. Wir betrachten zuerst den Fall, dass A aus einem rationalen Gewirr B und einer Verdrehung des nordöstlichen Endes NO und des südöstlichen Endes SO zustande gekommen ist. Das heisst, $A \equiv B + t_a$ für eine ganze Zahl a . Natürlich sei B derart, dass es durch weniger einzelne Verdrehungsschritte gebildet werden kann, so dass die Induktionshypothese auf B anwendbar ist.

Nun gilt $A^x \equiv (B + t_a)^x \equiv B^x + t_a^x \equiv B + t_a \equiv A$. Dabei haben wir neben der Induktionshypothese $B^x \equiv B$ die einfache Beobachtung verwendet, dass für beliebige Gewirre G_1 und G_2 die Gleichung $(G_1 + G_2)^x \equiv G_1^x + G_2^x$ gilt.

Die Äquivalenz unter einer Drehung um die y -Achse ergibt sich aus $A^y \equiv (B + t_a)^y \equiv t_a^y + B^y \equiv t_a + B \equiv B + t_a$, wobei sich die letzte Gleichung aus folgender Beobachtung ergibt: Um von $t_a + B$ zu $B + t_a$ zu gelangen, drehe man B genau $(-a)$ -mal um die x -Achse. Dadurch wird t_a auf der westlichen Seite entwunden und dafür auf der östlichen Seite gebildet; B bleibt unter Drehung um die x -Achse äquivalent. Da sich diese Drehung nun *innerhalb* des Gewirrs (genauer gesagt innerhalb der Einheitskugel) abspielt, die Enden aber fixiert bleiben, handelt es sich um eine Isotopie von Gewirren.

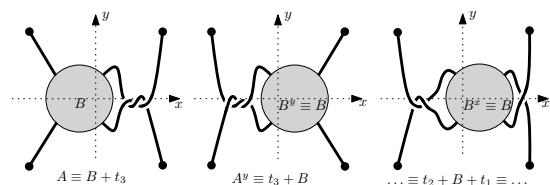


Abb. 4: Indem man B innerhalb des Gewirrs A^y um die x -Achse dreht, kann man das t_a in der Summe von „links nach rechts transportieren“.

Ebenso zeigen wir $(t_a + B)^x \equiv t_a + B$ und $(t_a + B)^y \equiv t_a + B$. Dies beweist die Behauptung für den Fall, dass der letzte Schritt in der Bildung von A ein Verdrehen der beiden westlichen Enden war.

Wir betrachten nun den Fall, dass A aus B und einer Verdrehung seiner beiden südlichen (oder

nördlichen) Enden SW und SO entstanden ist. Im wesentlichen lässt sich dieser Fall gleich wie der obige behandeln, aber nun fehlt uns leider die griffige Summennotation, die uns das Aufschreiben im ersten Fall erleichtert hat. Die Äquivalenz unter einer Drehung um die y -Achse folgt wieder direkt aus der Induktionshypothese für B und daraus, dass auch das vertikale Analagon von t_a von einer Drehung um die x - oder y -Achse in sich überführt wird. Für die Äquivalenz $A^x \equiv A$ siehe Abb. 5. \square

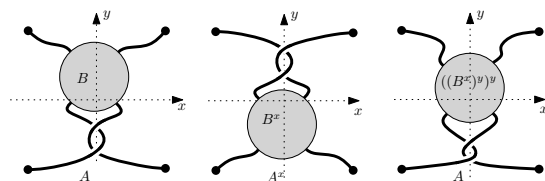


Abb. 5: Ein rationales Gewirr A , das aus einem einfacheren Gewirr B und einer Verdrehung der südlichen Enden entstanden ist, wird von einer Drehung um die x -Achse in sich überführt.

Korollar 2 Für ein beliebiges rationales Gewirr B gilt $t_a + B \equiv B + t_a$.

Theorem 3 Jedes rationale Gewirr kann aus dem Nullgewirr gebildet werden, indem man abwechselungsweise die beiden westlichen und die beiden südlichen Endpunkte verdrillt. Anders gesagt: Jedes rationale Gewirr lässt sich auf diese Art zum Nullgewirr auflösen.

Beweis. Ein rationales Gewirr ist nach Definition aus einer Folge von Verdrehung von benachbarten Enden gebildet. Nach Korollar 2 kann jede Verdrehung der östlichen Enden auch als Verdrehung der westlichen Enden aufgefasst werden. Weiter gilt für die Verdrehung der nördlichen oder südlichen Enden eine Aussage analog zu Korollar 2: Eine Verdrehung der nördlichen Enden kann durch Drehen des inneren Teils des Gewirrs (als durch eine Isotopie von Gewirren) auf die südliche Seite transportiert werden, siehe Abb. 5, rechter Teil. \square

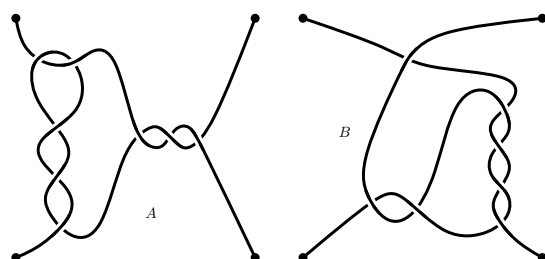


Abb. 6: Zwei rationale Gewirre

Zu einem rationalen Gewirr A definieren wir das *negative Gewirr* $-A$ als das Spiegelbild von A bei

einer Spiegelung an der xy -Ebene. Aus einem Diagramm von A erhalten wir also ein Diagramm von $-A$, indem wir alle Überkreuzungen in Unterkreuzungen verwandeln und umgekehrt, siehe Abb. 7. Für zwei rationale Gewirre A und B schreiben wir kurz $A - B := A + (-B)$.

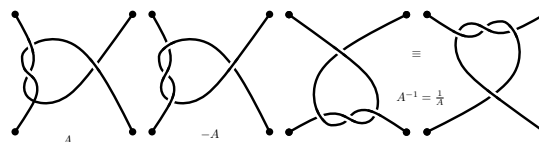


Abb. 7: Das Negative und das Inverse eines rationalen Gewirrs A . Zur Bildung von A^{-1} kann sowohl im Uhrzeigersinn als auch im Gegenuhrzeigersinn gedreht werden: Die beiden resultierenden Gewirre sind äquivalent.

Zu einem Gewirr A definiert man das *inverse Gewirr* A^{-1} oder $1/A$, indem man das Gewirr an der xy -Ebene spiegelt (das heisst $-A$ bildet) und dann mit 90° im Gegenuhrzeigersinn um die z -Achse dreht. Wir bemerken, dass es nach Theorem 1 keine Rolle spielt, ob man obiger Definition des inversen Gewirrs im Uhrzeigersinn oder gegen den Uhrzeigersinn um die z -Achse dreht: Das eine unterscheidet sich vom anderen in einer 180° -Drehung um die x - verknüpft mit einer 180° -Drehung um die y -Achse. Gemäss Theorem 1 ergibt sich also ein äquivalentes Gewirr. Siehe Abb. 7. Im folgenden werden wir, je nach dem was für uns gerade günstiger ist, beim Invertieren eines Gewirrs manchmal im Uhrzeigersinn und manchmal im Gegenuhrzeigersinn drehen.

An dieser Stelle liegt die Versuchung nahe zu glauben, man könne mit rationalen Gewirren rechnen wie mit rationalen Zahlen. Aber man beachte, dass es keine natürliche Art gibt, eine Multiplikation auf den rationalen Gewirren einzuführen, so dass A^{-1} das multiplikative Inverse von A ist. Ausserdem ist die Summe zweier rationaler Gewirre im allgemeinen nicht rational. Nur für die ganzzahligen Gewirre $\{\dots, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \dots\}$ gilt, dass die Addition und Negation von Gewirren der Addition und Negation der entsprechenden ganzen Zahlen entspricht.

2.1 Kettenbrüche

Kettenbrüche spielen in der klassischen Mathematik eine grosse Rolle. So verwendete zum Beispiel Johann Heinrich Lambert Kettenbrüche um zu beweisen, dass die Kreiszahl π irrational ist.⁴

⁴J. H. Lambert. Mémoires sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes, circulaires et logarithmiques. *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Berlin*, pages 265–322, 1768.

Grundsätzlich nennt man jeden Ausdruck der Form

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{\dots}}}$$

Kettenbruch, wobei $a_0, b_1, a_1, b_2, a_2, b_3, \dots$ ganze Zahlen sind. Ein Kettenbruch heisst *regulär*, wenn jeder Zähler gleich 1 ist und bis auf die allererste Zahl nur positive Zahlen vorkommen. Das heisst, $b_1 = b_2 = b_3 = \dots = 1$ und $a_1, a_2, a_3, \dots > 0$.

Lemma 4 Jedes $x \in \mathbb{Q}$ lässt sich eindeutig als endlicher regulärer Kettenbruch schreiben.

Beweis. Hinter dem Beweis steckt der Euklidische Algorithmus, also sukzessives Teilen mit Rest. Zuerst schreiben wir x (auf eindeutige Weise) als gemischten Bruch, also $x = a_0 + \frac{p}{q}$, wobei $p < q$ und p, q positive und teilerfremde ganze Zahlen sind. Weiter sei $q = a_1 p + r_1$, wobei $a > 0$ und $r_1 \geq 0$ ganze Zahlen sind und $r_1 < p$. Dann schreiben wir

$$x = a_0 + \frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{p}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_1}{p}}.$$

Nun können wir wiederum p “mit Rest durch r_1 teilen” und erhalten $p = a_2 r_1 + r_2$, also

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{p}{r_1}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}}}.$$

Auf diese Weise fahren wir dem Euklidischen Algorithmus folgend fort, der, wie wir wissen, nach endlich vielen Schritten abbricht. \square

2.2 Kettenbrüche aus Gewirren

Mit der Definition von inversen Gewirren lässt sich Theorem 3 so formulieren: Jedes rationale Gewirr kann als Kettenbruch von Gewirren der Form t_a geschrieben werden. Denn eine Verdrehung der westlichen Enden von B lässt sich als $t_a + B$ schreiben für ein geeignetes $a \in \mathbb{Z}$ und eine Verdrehung der südlichen Enden von B als

$$(t_a + B^{-1})^{-1} = \frac{1}{t_a + \frac{1}{B}}$$

für ein geeignetes $a \in \mathbb{Z}$, siehe Abb. 8.

Aus diesen Regeln und Theorem 3 erhalten wir für jedes rationale Gewirr einen “Kettenbruch von ganzzahligen Gewirren”. Zum Beispiel gilt für das Gewirr A in Abb. 6

$$A \equiv t_{-3} + \frac{1}{t_3 + \frac{1}{t_2}}$$

und für das andere Gewirr

$$B \equiv \frac{1}{t_1 + \frac{1}{t_{-2} + \frac{1}{t_{-4}}}}.$$

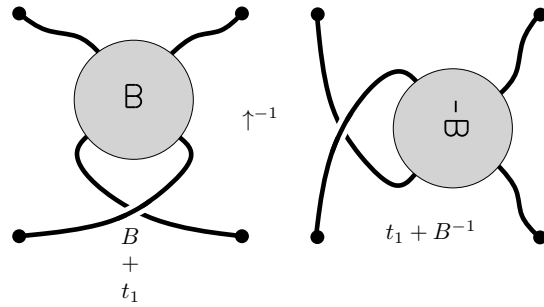


Abb. 8: Mit der Inversion lässt sich eine “vertikale” in eine “horizontale” Summe umschreiben.

Wenn wir nun diesen Kettenbruch als Zahl lesen, das heisst, jedes ganzzahlige Gewirr t_a durch die Zahl a ersetzen, dann erhalten wir für jedes rationale Gewirr G eine Zahl $F(G)$. Zum Beispiel wird dem Gewirr A die Zahl

$$F(A) = -3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}} = -\frac{19}{7}$$

zugeordnet und dem Gewirr B

$$F(B) = \frac{1}{1 + \frac{1}{-2 + \frac{1}{4}}} = -\frac{4}{5}.$$

Formal definieren wir $F(A)$, indem wir einem rationalen Gewirr A rekursiv eine Zahl $F(A)$ zuordnen:

- Es gelte $F(t_0) = 0$.
- Falls $A = t_a + B$, so gelte $F(A) = a + F(B)$.
- Falls $A = B^{-1}$ und $F(B) \neq 0$, so gelte $F(A) = 1/F(B)$; falls $A = B^{-1}$ und $F(B) = 0$, so gelte $F(A) = \infty$.

In Theorem 3 war nicht von Eindeutigkeit der Folge von Verdrehungen die Rede. Im Moment ist also formal gesehen F noch keine wohldefinierte Abbildung von den Äquivalenzklasse der rationalen Gewirre in die rationalen Zahlen mit ∞ , sondern es wird lediglich jedem rationalen Gewirr A eine Zahl zugeordnet, die von der Folge von Verdrehungen abhängt, als die A gegeben ist. (Und falls A nicht als so eine Folge gegeben ist, sondern zum Beispiel einfach als Diagramm, so ist unklar, wie sich $F(A)$ berechnen liesse.) Wir werden erst im nächsten Abschnitt beweisen, dass für äquivalente rationale Gewirre A und B die Brüche $F(A)$ und $F(B)$ gleich sind. Aber wir sind nun soweit, die erste Richtung von Conways Hauptsatz beweisen zu können:

Theorem 5 Wenn zwei rationale Gewirre A und B die gleiche rationale Zahl $F(A) = F(B)$ ergeben, so sind sie äquivalent.

Beweis. Es sei A ein rationales Gewirr. Gemäss Theorem 3 können wir A als Kettenbruch von ganzzahligen Gewirren schreiben. Dieser Kettenbruch

von Gewirren entspricht aber nicht unbedingt einem regulären Kettenbruch, da einige der a_i in den t_{a_i} negativ sein können. Wir zeigen nun, dass A äquivalent ist zu einem rationalen Gewirr A' , in dessen Kettenbruchentwicklung alle Zahlen positiv sind. Ein allgemeiner Kettenbruch lässt sich mit

$$a - \frac{1}{b} = a - 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{b-1}}$$

in einen regulären verwandeln. Ebenso gilt für rationale Gewirre A und B

$$A - \frac{1}{B} \equiv A - t_1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{B-t_1}},$$

wie in Abb. 9 bewiesen wird. Ausserdem gilt $1/(-B) \equiv -1/B$ und $1/(1/B) \equiv B$. Mit Hilfe dieser Regeln sowie der Rechenregeln für ganzzahlige Gewirre (sie verhalten sich wie ganze Zahlen) können wir alle negativen Koeffizienten der ganzzahligen Gewirre eliminieren bis auf ein allfälliges negatives Vorzeichen vor dem ersten ganzzahligen Gewirr in der Kettenbruchentwicklung. Mit der Eindeutigkeit der regulären Kettenbruchentwicklung folgt, dass jeder Knoten A mit $F(A) = p/q$ zum gleichen Knoten A' äquivalent ist. \square

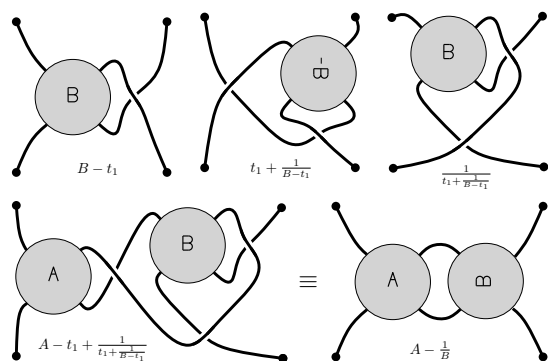


Abb. 9: Die analoge Rechenregel für Gewirre.

3 Eine Invariante für Gewirre

In diesem Abschnitt definieren wir eine Invariante für allgemeine Gewirre, die so genannte *Leitfähigkeit* mit Hilfe des *Klammerpolynoms*. Es stellt sich heraus, dass diese Invariante für rationale Gewirre A mit dem Bruch $F(A)$ übereinstimmt, was die andere Richtung des Hauptsatzes impliziert.

3.1 Das Klammerpolynom

Das Klammerpolynom (auf Englisch *bracket polynomial* oder *Kauffman bracket*) spielt in der Knotentheorie eine wichtige Rolle. Dort wird es als Zwischenschritt zur Definition des *Jones Polynoms* und

anderer Knoteninvarianten verwendet. Das Klammerpolynom selber ist aber keine Knoteninvariante, vielmehr wird es für Diagramme von Knoten oder allgemeiner Verschlingungen definiert. Es ist nicht wohldefiniert für Knoten, sondern es hängt von der Art und Weise ab, wie der Knoten gezeichnet ist.

Zu einem Diagramm D eines Knotens oder eines Gewirrs definieren wir das *Klammerpolynom* $\langle D \rangle$ durch die folgenden *Klammerregeln*:

1. $\langle t_1 \rangle = x \langle t_\infty \rangle + x^{-1} \langle t_0 \rangle$,
2. $\langle t_{-1} \rangle = x^{-1} \langle t_\infty \rangle + x \langle t_0 \rangle$,
3. $\langle O \sqcup D \rangle = (-x^{-2} - x^2) \langle D \rangle$,
4. $\langle O \rangle = 1$,

wobei O für das Diagramm des trivialen Knotens steht und $O \sqcup D$ für die disjunkte Vereinigung von O und D . Die ersten zwei Regeln sind so zu verstehen, dass sie auch angewendet werden dürfen, wenn t_1 bzw. t_{-1} innerhalb eines komplizierteren Diagramms vorkommen, siehe Abb. 10.

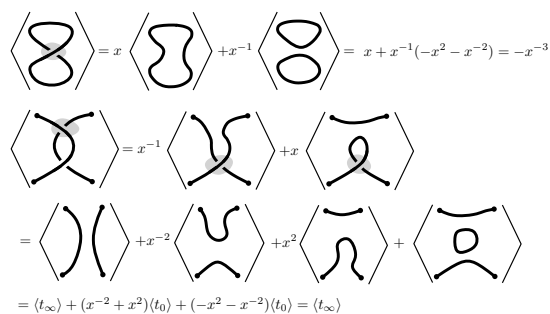


Abb. 10: Das Klammerpolynom eines Knoten und die Auflösung eines Gewirrs bis auf $\langle t_\infty \rangle$ und $\langle t_0 \rangle$.

Mit diesen Regeln lassen sich nun Diagramme von Knoten vollständig in ein Laurentpolynom in $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ verwandeln, und Gewirre lassen sich bis auf $\langle t_\infty \rangle$ und $\langle t_0 \rangle$ auflösen.

Leider ist das Klammerpolynom keine Invariante von Knoten, wie wir der ersten Zeile von Abb. 10 ansehen. Dort löst sich ein spezielles Diagramm D des Unknotens zu $-x^{-3}$ auf, aber für das gewöhnliche Diagramm O des Unknotens gilt nach den Klammerregeln $\langle O \rangle = 1$. Ganz allgemein stellen wir fest, dass eine Reidemeisterbewegung vom Typ I, je nachdem es sich um eine t_1 - oder eine t_{-1} -Kreuzung handelt, die durch die Reidemeisterbewegung verschwindet, einen zusätzlichen Faktor $-x^{-3}$ bzw. $-x^3$ bewirkt. Aber unter Reidemeisterbewegungen vom Typ II und III ist das Klammerpolynom tatsächlich invariant. Den Nachweis überlassen wir dem motivierten Leser als Übung.

Beobachtung 6 *Es seien D und D' Diagramme, so dass sich D durch Reidemeisterbewegungen in*

D' überführen lässt. Dann gilt $\langle D \rangle = (-x)^{3k} \langle D' \rangle$ für eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$.

3.2 Die Leitfähigkeit

Sei D das Diagramm eines Gewirrs und $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[x, x^{-1}]$, so dass $\langle D \rangle = \alpha(x)\langle t_\infty \rangle + \beta(x)\langle t_0 \rangle$. Wir definieren die gebrochenrationale Funktion $R_D(x) := \alpha(x)/\beta(x)$.

Theorem 7 $R_D(x)$ ist invariant unter Reidemeisterbewegungen im Diagramm D .

Beweis. Es seien D und D' Diagramme von äquivalenten Gewirren, $\langle D \rangle = \alpha(x)\langle t_\infty \rangle + \beta(x)\langle t_0 \rangle$ und $\langle D' \rangle = \alpha'(x)\langle t_\infty \rangle + \beta'(x)\langle t_0 \rangle$. Es gilt $\langle D \rangle = (-x)^{3k} \langle D' \rangle$ für eine ganze Zahl k , also

$$\begin{aligned} \alpha(x)\langle t_\infty \rangle + \beta(x)\langle t_0 \rangle &= (-x)^{3k} \alpha'(x)\langle t_\infty \rangle + (-x)^{3k} \beta'(x)\langle t_0 \rangle. \end{aligned}$$

Daraus schliessen wir

$$R_D(x) = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{(-x)^{3k} \alpha'(x)}{(-x)^{3k} \beta'(x)} = \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)} = R_{D'}(x),$$

was zeigt, dass R_D nicht von der Wahl des Diagramms D abhängt, sondern für alle Diagramme, die ein äquivalentes Gewirr darstellen, gleich ist. \square

Wir definieren für (allgemeine) Gewirre G die rationale Funktion $R_G(x) := R_D(x)$, wobei D irgendein Diagramm von G ist. Nach obigem Theorem ist die Definition unabhängig von der Wahl von D und damit R_G eine Invariante von allgemeinen Gewirren. Der letzte Schritt ist nun, x durch eine Zahl zu ersetzen. Ganz gleich, welche Zahl wir wählen, wird immer eine Invariante von Gewirren resultieren. Es stellt sich heraus, dass wenn wir x durch \sqrt{i} substituieren und das ganze zusätzlich mit $-i$ multiplizieren, für rationale Gewirre A genau die wohl bekannte Zahl $F(A)$ herauskommt. (i bezeichnet hier wie gewöhnliche die imaginäre Einheit, es gilt also $i^2 = -1$.) Zu einem Gewirr G definieren wir die *Leitfähigkeit* $C(G) := -iR_G(\sqrt{i})$.

Theorem 8 Für rationale G gilt $C(G) = F(G)$.

Beweis. Man prüfe nach, dass $F(t_0) = 0 = C(t_0)$, $F(t_\infty) = \infty = C(t_\infty)$, $F(t_1) = 1 = C(t_1)$ und $F(t_{-1}) = -1 = C(t_{-1})$. Nach Theorem 3 und den nachfolgenden Überlegungen lässt sich jedes rationale Gewirr mit Hilfe dieser ganzzahligen Gewirre und der Addition und Inversenbildung von Gewirren schreiben. Es genügt also zu zeigen, dass für rationale Gewirre A und B die folgenden Beziehungen gelten: $C(A^{-1}) = 1/C(A)$ und $C(A+B) = C(A) + C(B)$.

Wir zeigen zuerst, dass $C(A+B) = C(A) + C(B)$ gilt. (Für den Beweis brauchen wir übrigens gar nie die Rationalität von A und B ; tatsächlich gilt

die Beziehung auch für allgemeine Gewirre.) Es gelte $\langle D_A \rangle = \alpha(x)\langle t_\infty \rangle + \beta(x)\langle t_0 \rangle$ und $\langle D_B \rangle = \gamma(x)\langle t_\infty \rangle + \delta(x)\langle t_0 \rangle$, wobei D_A ein Diagramm von A , D_B ein Diagramm von B und D_{A+B} ein entsprechendes Diagramm von $A+B$ sei. Damit gilt (siehe Abb. 11):

$$\begin{aligned} \langle D_{A+B} \rangle &= \alpha(x)\gamma(x)(-x^2 - x^{-2})\langle t_\infty \rangle \\ &\quad + (\alpha(x)\delta(x) + \beta(x)\gamma(x))\langle t_\infty \rangle \\ &\quad + \beta(x)\delta(x)\langle t_0 \rangle. \end{aligned}$$

Nun berechnet sich die Leitfähigkeit von $A+B$ unter Verwendung der Regel $i^{-1} = -i$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} C(A+B) &= -iR_{A+B}(\sqrt{i}) \\ &= -i \frac{\alpha(\sqrt{i})\gamma(\sqrt{i})(-i-i^{-1}) + (\alpha(\sqrt{i})\delta(\sqrt{i}) + \beta(\sqrt{i})\gamma(\sqrt{i}))}{\beta(\sqrt{i})\delta(\sqrt{i})} \\ &= -i \frac{\alpha(\sqrt{i})}{\beta(\sqrt{i})} - i \frac{\gamma(\sqrt{i})}{\delta(\sqrt{i})} \\ &= -iR_A(\sqrt{i}) - iR_B(\sqrt{i}) = C(A) + C(B). \end{aligned}$$

Als zweites zeigen wir, dass für allgemeine Gewirre $C(A^{-1}) = 1/C(A)$ gilt, wobei \bar{z} die komplex Konjugierte einer komplexen Zahl z bezeichne. Da für rationale Gewirre A die Leitfähigkeit $C(A)$ reell ist, gilt für rationale Gewirre $C(A^{-1}) = 1/C(A)$. Sei D ein Diagramm von A , $\langle D \rangle = \alpha(x)\langle t_\infty \rangle + \beta(x)\langle t_0 \rangle$. Nun sei D' das entsprechende Diagramm von A^{-1} : Das Drehen bei der Inversenbildung bewirkt ein Vertauschen von t_0 und t_∞ in D , das Spiegeln an der xy -Ebenen (Ober- werden zu Unterkreuzungen und umgekehrt) bewirkt eine Substitution $x \mapsto x^{-1}$, also erhalten wir

$$\langle D' \rangle = \alpha(x^{-1})\langle t_0 \rangle + \beta(x^{-1})\langle t_\infty \rangle.$$

Da $(\sqrt{i})^{-1} = \overline{\sqrt{i}}$ gilt nun

$$\begin{aligned} C(A^{-1}) &= -iR_{A^{-1}}(\sqrt{i}) = -i \frac{\beta(\overline{\sqrt{i}})}{\alpha(\overline{\sqrt{i}})} \\ &= \frac{i \frac{\beta(\overline{\sqrt{i}})}{\alpha(\overline{\sqrt{i}})}}{\left(-i \frac{\alpha(\overline{\sqrt{i}})}{\beta(\overline{\sqrt{i}})}\right)^{-1}} = \frac{1}{C(A)^{-1}}. \quad \square \end{aligned}$$

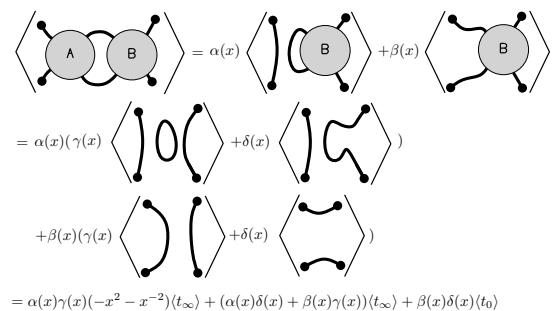


Abb. 11: Das Klammerpolynom einer Summe.

Wir haben gezeigt, dass $C(G)$ für allgemeine Gewirre eine Invariante ist, also ist insbesondere $F(G) = C(G)$ eine Invariante für rationale Gewirre.