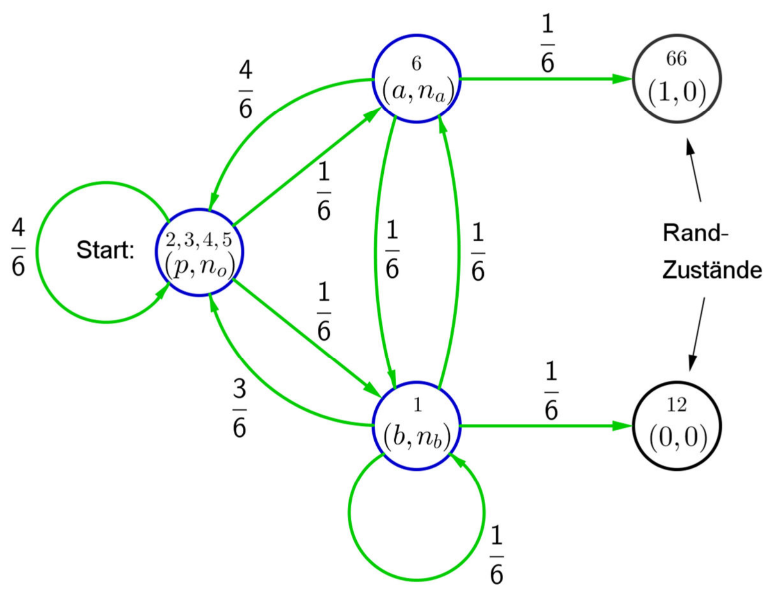
Markow–Ketten

Hans Ulrich Keller, MNG Zürich

Werden Zufallsversuche mit unendlich vielen Ausfällen betrachtet, reicht die statische Untersuchung mit Bäumen und Pfadregeln meist nicht mehr aus. Stattdessen können dynamische Zufallsprozesse untersucht werden, in welchen Zustände und ihre Wahrscheinlichkeiten sowie Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen diesen Zuständen eine wichtige Rolle spielen: Die Markow–Ketten.
Die ausführliche Darstellung der Theorie dazu kann hier nicht das Thema sein: Diese findet sich z. B. im genialen Buch von Arthur Engel: "Wahrscheinlichkeit und Statistik", Band 2, ISBN 3–12–983170–3, Ernst Klett Verlag, Stuttgart.
Hier sollen – ohne Beweise – die beiden Mittelwertsregeln kurz erklärt und an einem einfachen Beispiel angewendet werden. Dieses Beispiel kann dann für eine Vielzahl von anderen Situationen angepasst werden.

Die Aufgabe
Bei einem Spiel soll so lange mit einem Würfel gewürfelt werden, bis zum ersten Mal unmittelbar nacheinander entweder zwei Sechser oder zuerst eine Eins und unmittelbar danach eine Zwei gewürfelt wird. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dieser beiden Ereignisse, und wie oft muss im Mittel gewürfelt werden, bis eines dieser Ereignisse eingetreten ist? Diese Zahlen sollen kurz abgeschätzt werden, bevor die Lösung angeschaut wird!



In der nebenstehenden Figur bezeichnen die drei linksseitigen Kreise innere, die beiden Kreise auf der rechten Seite Rand–Zustände (oder "absorbierende Zustände").

Die Zahlen bei den Pfeilen geben die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen zwei Zuständen an.

Die erste Zahl in den Klammern gibt jeweils die Wahrscheinlichkeit an, dass – ausgehend von diesem Zustand – der Zustand "66" erreicht wird. Die zweite Zahl gibt den Erwartungswert der Anzahl Versuche an, die – ausgehend von diesem Zustand – nötig sind, bis ein Randzustand erreicht ist.

1. Mittelwertsregel:
Die Wahrscheinlichkeit eines inneren Zustandes ist gleich dem gewichteten Mittel der Wahrscheinlichkeiten seiner Nachfolger.

Wenden wir die 1. Mittelwertsregel auf den Startzustand, den Zustand "6" und den Zustand "1" an, ergibt sich folgendes System:

$$\left| \begin{aligned} p &= \frac{4}{6}p + \frac{1}{6}b + \frac{1}{6}a \\ a &= \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}b + \frac{4}{6}p \\ b &= \frac{1}{6}a + \frac{1}{6}b + \frac{3}{6}p + \frac{1}{6}\cdot 0 \end{aligned} \right|$$

Dieses System hat die Lösung $p = \frac{6}{13}, a = \frac{7}{13}, b = \frac{5}{13}$. Die Wahrscheinlichkeit, ab dem Start den Zustand "66" zu erreichen, ist also $\frac{6}{13}$, die Gegenwahrscheinlichkeit für das Erreichen des Zustandes "12" folglich mit $\frac{7}{13}$ etwas grösser! Dies erscheint zwar paradox, lässt sich aber mit folgender Überlegung plausibel machen: Ist der Zustand "6" erreicht, besteht eine grössere Wahrscheinlichkeit als beim Erreichen des Zustandes "1", wieder auf den Start zurück geworfen zu werden.

2. Mittelwertsregel:
Der Erwartungswert der Anzahl Versuche bis zum Erreichen des Randes ist bei einem inneren Zustand gleich dem um 1 vergrösserten gewichteten Mittel der Erwartungswerte seiner Nachfolger. Bei Randzuständen ist dieser Erwartungswert natürlich 0.

Wenden wir die 2. Mittelwertsregel wiederum auf die gleichen drei Zustände an, ergibt sich das System

$$\left| \begin{aligned} n_o &= 1 + \frac{4}{6}n_o + \frac{1}{6}n_a + \frac{1}{6}n_b \\ n_a &= 1 + \frac{1}{6}n_b + \frac{4}{6}n_o + \frac{1}{6}\cdot 0 \\ n_b &= 1 + \frac{1}{6}n_b + \frac{1}{6}n_a + \frac{3}{6}n_o + \frac{1}{6}\cdot 0 \end{aligned} \right|$$

Dieses System hat die Lösung $n_o = \frac{252}{13} \approx 19.38;\ n_a = \frac{216}{13} \approx 16.62;\ n_b = \frac{210}{13} \approx 16.15$.

Das bedeutet, dass in diesem Spiel im Mittel etwa 19.38 Mal gewürfelt werden muss, bis ein Randzustand erreicht wird. Ist weiter z. B. der Zustand "1" erreicht, muss – ausgehend von diesem Zustand – im Mittel noch weitere 16.15 Mal gewürfelt werden, bis ein Randzustand erreicht wird. Eine Simulation von 130'000 solcher Spiele mit *Mathematica*, unter Verwendung von gleichverteilten ganzen Pseudozufallszahlen von 1 bis 6, ergab beispielsweise beim ersten Durchlauf 70018 Mal den Endzustand "12" und 59982 Mal den Endzustand "66", bei einer mittleren Spieldauer von 19.3015 Würfen: Alle diese Zahlen stehen in bester Übereinstimmung mit den oben angegebenen korrekten Werten.