Plädoyer für das harmonische Mittel

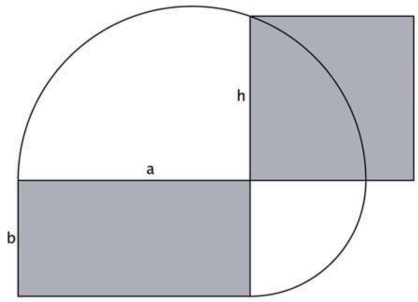
Beat Jaggi, beat.jaggi@phbern.ch

1 Einleitung

Das Bilden von Mittelwerten ist ein zentrales Konzept in der Mathematik (siehe z.B. [1], [2], [7] oder [8]). Im Mathematikunterricht wird vorwiegend das arithmetische, gelegentlich das geometrische Mittel thematisiert. Das ist verständlich, ist das arithmetische Mittel doch immerhin eines der wichtigen Lagemasse in der beschreibenden Statistik:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Mit dem geometrischen Mittel gelingt unter anderem die "Quadratur des Rechtecks": Soll ein gegebenes Rechteck in ein flächengleiches Quadrat verwandelt werden, dann ist die Seite des gesuchten Quadrates gleich dem geometrischen Mittel von Länge und Breite des vorgegebenen Rechtecks.



Höhensatz: $h^2 = a \cdot b \implies h = \sqrt{a \cdot b}$

2 Das harmonische Mittel

Im Folgenden soll das harmonische Mittel im Zentrum der Betrachtungen stehen. Es zeigt sich, dass dieser Mittelwert in überraschend vielen verschiedenen mathematischen und aussermathematischen Kontexten auftaucht.

Das harmonische Mittel von zwei Zahlen

Für zwei reelle Zahlen $a \neq 0$ und $b \neq 0$ mit $a + b \neq 0$ ist das harmonische Mittel $\mathcal{H}(a, b)$ definiert durch

$$\mathcal{H}(a,b) = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Beispiel: Das harmonische Mittel von 1 und 3 ist $\mathcal{H}(1,3) = \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{1+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Das harmonische Mittel hängt mit dem arithmetischen Mittel zusammen:

$$\frac{1}{\mathcal{H}(a,b)} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$$

Der Kehrwert des harmonischen Mittels zweier Zahlen a und b ist gleich dem arithmetischen Mittel der Kehrwerte von a und b.

Das harmonisches Mittel von n Zahlen

Sei $n \geq 2$. Für n positive reelle Zahlen $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n$ definieren wir

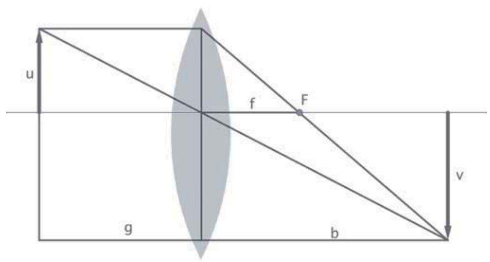
$$\mathcal{H}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

3 Das harmonische Mittel in aussermathematischen Kontexten

Es folgt eine (sicher nicht abschliessende) Liste von Themen, bei denen das harmonische Mittel vorkommt.

3.1 Die Linsengleichung

Eine Linse bildet einen Gegenstand der Länge u auf das Bild der Länge v ab.



Für die Brennweite f, die Gegenstandsweite g und die Bildweite b gilt die Linsengleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad \Longrightarrow \quad f = \frac{gb}{g+b} = \frac{1}{2}\mathcal{H}(g, b)$$

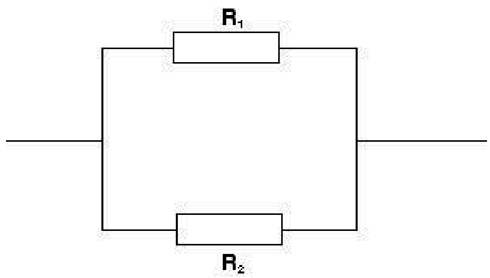
Die Brennweite f ist also gleich der Hälfte des harmonischen Mittels der Gegenstandsweite g und der Bildweite b. (siehe z.B. [6])

Begründung: Mit obigen Bezeichnungen und den Stahlensätzen gilt:
$\frac{g}{f} = \frac{u+v}{v} = \frac{g+b}{b} = \frac{g}{b} + 1.$

Aus $\frac{g}{f} = \frac{g}{b} + 1$ folgt sofort (Division mit g): $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$.

Also ist tatsächlich $f = \frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{g}} = \frac{gb}{g+b} = \frac{1}{2}\mathcal{H}(g, b)$. $\square$

3.2 Parallelschaltung von Widerständen in elektrischen Schaltkreisen



Bei der Parallelschaltung der Widerstände R_1 und R_2 in einem elektrischen Schaltkreis gilt: Der Gesamtwiderstand R ist die Hälfte des harmonischen Mittels der Widerstände R_1 und R_2 .

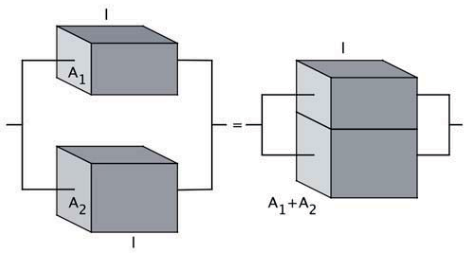
$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2}\mathcal{H}(R_1, R_2)$$

1. Begründung: Der Gesamtstrom I ergibt sich aus der Summe der Einzelströme, die durch die einzelnen Widerstände fliessen.

Dann folgt mit dem Ohm'schen Gesetz:

$$\frac{U}{R} = I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} \implies \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \implies R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}.$$

2. Begründung: Man veranschaulicht sich diesen Zusammenhang an der Parallelschaltung zweier Widerstände, die sich nur in ihrer Querschnittsfläche A unterscheiden. Dabei ist $\rho = \frac{R \cdot A}{l}$ der spezifische Widerstand, der vom Material der Widerstände abhängt.



$R = \frac{\rho l}{A_1 + A_2}$ und daher

$$\frac{1}{R} = \frac{A_1 + A_2}{\rho l} == \frac{A_1}{\rho l} + \frac{A_2}{\rho l} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

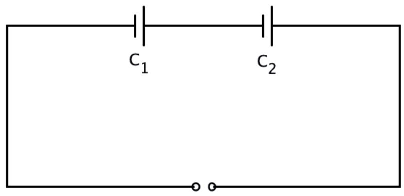
Also ist tatsächlich $R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2}\mathcal{H}(R_1, R_2)$ $\square$

(siehe z.B. [6])

Verallgemeinerung: Bei der Parallelschaltung der Widerstände $R_1, \ R_2, \ldots, \ R_n$ in einem elektrischen Schaltkreis gilt: Der Gesamtwiderstand R ist gleich $\frac{1}{n}$ mal das harmonische Mittel der Widerstände $R_1, \ R_2, \ldots, \ R_n$.

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}} = \frac{1}{n}\mathcal{H}(R_1, R_2, \ldots, R_n)$$

3.3 Serieschaltung von Kondensatoren in elektrischen Schaltkreisen



Bei der Serieschaltung von zwei Kondensatoren mit den Kapazitäten C_1 und C_2 in einem elektrischen Schaltkreis gilt: Die Gesamtkapazität C ist gleich der Hälfte des harmonischen Mittels der Kapazitäten C_1 und C_2. (siehe z.B. [6])

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{2}\mathcal{H}(C_1, C_2)$$

Begründung: Die Kapzität C ist gegeben durch $C = \frac{Q}{U}$, also ist $U = \frac{Q}{C}$.

Bei Serieschaltung ist die Gesamtspannung gleich der Summe der Teilspannungen an den beiden Kondensatoren; also wird:

$$\frac{Q}{C} = U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \implies \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad \square$$

Verallgemeinerung: Bei der Serieschaltung von n Kondensatoren mit den Kapazitäten $C_1, \ C_2, \ldots, \ C_n$ in einem elektrischen Schaltkreis gilt: Die Gesamtkapazität C ist gleich $\frac{1}{n}$ mal das harmonische Mittel der Kapazitäten $C_1, \ C_2, \ldots, \ C_n$.

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}} = \frac{1}{n}\mathcal{H}(C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

3.4 Durchschnittsgeschwindigkeit

Ein Zug fährt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit v_1 von A nach B und mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit v_2 zurück von B nach A.

Dann ist die Durchschnittsgeschwindigkeit für beide Strecken gleich dem harmonischen Mittel von v_1 und v_2.

$$\overline{v} = \frac{2 v_1 v_2}{v_1 + v_2} = \mathcal{H}(v_1, v_2)$$

Begründung: Die Länge der Strecke von A nach B sei x. Dann braucht der Zug für die Hinfahrt $t_1 = \frac{x}{v_1}$, für die Rückfahrt $t_2 = \frac{x}{v_2}$.
Die Durchschnittsgeschwindigkeit für Hin- und Rückfahrt beträgt also

$$\overline{v} = \frac{s_{total}}{t_{total}} = \frac{2x}{\frac{x}{v_1} + \frac{x}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2 v_1 v_2}{v_1 + v_2} = \mathcal{H}(v_1, v_2) \qquad \square$$

Verallgemeinerung: Werden n gleich lange Strecken mit den Geschwindigkeiten $v_1, \ v_2, \ \ldots, \ v_n$ durchlaufen, dann ist die Durchschnittsgeschwindigkeit gleich dem harmonischen Mittel von $v_1, \ v_2, \ \ldots, \ v_n$.

$$\overline{v} = \frac{n}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \cdots + \frac{1}{v_n}} = \mathcal{H}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

3.5 Gefässe füllen

Rohr 1 fülle ein Gefäss in der Zeit t_1, Rohr 2 fülle das gleiche Gefäss in der Zeit t_2. Dann füllen die beiden Rohre das Gefäss zusammen in der Zeit

$$t = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2} = \frac{1}{2}\mathcal{H}(t_1, t_2)$$

Begründung: Ist V das Volumen des Gefässes, dann gilt:

$$\frac{V}{t_1} + \frac{V}{t_2} = \frac{V}{t} \quad \text{also} \quad t = \frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}} = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2} \qquad \square$$

Verallgemeinerung: Rohr 1 fülle ein Gefäss in der Zeit t_1, Rohr 2 in der Zeit t_2, ..., Rohr n in der Zeit t_n. Dann füllen alle Rohre zusammen das Gefäss in der Zeit

$$t = \frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}} = \frac{1}{n}\mathcal{H}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

3.6 Benzinverbrauch von Autos

Um den Benzinverbrauch von Autos zu messen oder zu vergleichen, werden normalerweise zwei Masse verwendet: In Europa Liter pro 100 Kilometer und in den USA Meilen pro Gallone. Die Einheiten der beiden Masse sind in gewisser Weise invers zueinander, einmal Volumen/Distanz und einmal Distanz/Volumen.

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Verbräuche in Liter pro 100 km und $y_1, y_2, \ldots y_n$ die entsprechenden Verbräuche in Meilen pro Gallone.
Dann gilt

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathcal{H}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$\mathcal{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathcal{A}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Rechnet man das arithmetische Mittel von Verbräuchen in Liter pro 100 km um, dann bekommt man gerade das harmonische Mittel der Verbräuche in Meilen pro Gallone. Rechnet man das harmonische Mittel von Verbräuchen in Liter pro 100 km um, dann bekommt man gerade das arithmetische Mittel der Verbräuche in Meilen pro Gallone.

Begründung: Mit den Umrechnungen 1 Gallone $\approx$ 3.78541178 Liter und 1 Meile $\approx$ 1.609344 Kilometer ist

$$\begin{aligned} x \text{ Liter auf 100 Kilometer} &= \frac{1.609344x}{100} \text{ Liter auf 1 Meile} \\ &= \frac{1.609344x}{100 \cdot 3.78541178} \text{ Gallonen auf 1 Meile} \\ &= \frac{100 \cdot 3.78541178}{1.609344x} \approx \frac{235.2}{x} \text{ Meilen pro Gallone.} \end{aligned}$$

Die Umrechnung von Litern pro 100 km in Meilen pro Gallone geschieht also mit einer Funktion der Form $f(x) = \frac{c}{x}$. Die Behauptung folgt nun mit den Überlegungen von Abschnitt 4.6. $\square$

3.7 Musik

Wenn zwei Saiten im Abstand einer Oktave klingen, muss bekanntlich die Frequenz der zweiten Saite doppelt so hoch, die schwingende Saite also halb so lang sein.

Das harmonische Mittel von 1 und $\frac{1}{2}$ ist $\frac{2\cdot 1\cdot \frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$; diese Seitenlänge erzeugt die Quinte. Dass dieses Intervall harmonisch zwischen Grundton und Oktave liegt, das war schon Pythagoras bekannt.

Das harmonische Mittel von 1 und $\frac{2}{3}$ ist $\frac{2\cdot 1\cdot \frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{5}$; diese Seitenlänge erzeugt die grosse Terz. Siehe z.B. [4]

3.8 Weitere Beispiele

1. F_1 ist in der Statistik ein Mass für die Zuverlässigkeit eines Testes. Dabei ist p (Präzision) die Zahl der korrekten Resultate geteilt durch die Zahl aller erhaltenen Resultate und r ist die Zahl der korrekten Resultate geteilt duch die Zahl der Resultate, die man eigentlich hätte erhalten sollen.

$$\text{Es ist} \quad F_1 = \frac{2pr}{p+r} = \mathcal{H}(p,r)$$

2. In der Festkörperphysik wird für die Netzung von organischen Flüssigkeiten und Wasser auf polymeren Werkstücken die Grenzflächenenergie mit dem harmonischen Mittel berechnet.

3. Zum Schluss noch eine Anwendung im Baseball, ohne Übersetzung und ohne Kommentar:

   "In sabermetrics, the Power-speed number of a player is the harmonic mean of his home run and stolen base totals."

Quellen (Abruf: Mai 2012):

1. `http://de.wikipedia.org/wiki/Beurteilung_eines_Klassifikators`

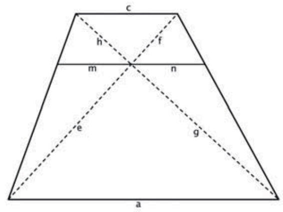
2. `http://www.unimeter.net/interim/Oberflaechenspannung/ZurOberflaechenspannung1.htm`

3. `http://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_mean`

4 Das harmonische Mittel in innermathematischen Kontexten

4.1 Perspektivische Ansicht eines Rechtecks

Schaut man sich im Fernsehen ein Tennisspiel an, dann sieht man das rechteckige Spielfeld als Trapez. Das Netz teilt den Tennisplatz in zwei gleiche Hälften. Die Netzunterkante geht dabei durch den Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Trapezes (resp. des Rechtecks).



Behauptung: Wird ein Trapez mit den parallelen Seiten a und c so geteilt, dass die "Mittellinie" durch den Diagonalenschnittpunkt geht, dann ist die Länge der "Trennlinie" gleich dem harmonischen Mittel von a und c .

Beweis: Mit den Bezeichnungen von oben und den Strahlensätzen gilt:

$$\frac{c}{m} = \frac{e+f}{e} = 1 + \frac{f}{e} = 1 + \frac{c}{a} \quad \text{und} \quad \frac{c}{n} = \frac{g+h}{g} = 1 + \frac{h}{g} = 1 + \frac{c}{a}$$

Also ist $\frac{c}{m} = \frac{c}{n}$ und folglich $m = n$.

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\frac{c}{m} = 1 + \frac{c}{a} = \frac{a+c}{a} \implies ac = m(a+c) \implies m = \frac{ac}{a+c}$$

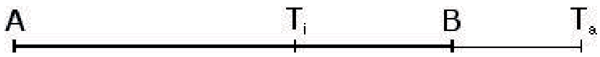
Die gesuchte Länge hängt also nur von a und c ab und beträgt

$$m + n = \frac{2ac}{a+c} = \mathcal{H}(a,c) \qquad \square$$

4.2 Harmonische Teilung

Eine Strecke AB wird duch die Punkte T_i (zwischen A und B) und T_a (ausserhalb von $\overline{AB}$) harmonisch geteilt, wenn gilt:

$$\frac{\overline{AT_i}}{\overline{BT_i}} = \frac{\overline{AT_a}}{\overline{BT_a}}$$



Behauptung: Ist die Strecke AB durch T_i und T_a harmonisch geteilt, dann ist die Strecke T_iT_a das harmonische Mittel der Strecken AT_a und BT_a.

$$\overline{T_iT_a} = \frac{2\overline{AT_a} \cdot \overline{BT_a}}{\overline{AT_a} + \overline{BT_a}} = \mathcal{H}(\overline{AT_a}, \overline{BT_a})$$

Beweis: Neben $\frac{\overline{AT_i}}{\overline{BT_i}} = \frac{\overline{AT_a}}{\overline{BT_a}}$ gilt auch $\overline{AT_i} = \overline{AT_a} - \overline{T_iT_a}$ und $\overline{BT_i} = \overline{T_iT_a} - \overline{BT_a}$.

Also ist

$$\frac{\overline{AT_a} - \overline{T_iT_a}}{\overline{T_iT_a} - \overline{BT_a}} = \frac{\overline{AT_a}}{\overline{BT_a}}$$

Daraus ergibt sich

$$\overline{T_iT_a} = \frac{2\overline{AT_a} \cdot \overline{BT_a}}{\overline{AT_a} + \overline{BT_a}} = \mathcal{H}(\overline{AT_a}, \overline{BT_a}) \qquad \square$$

4.3 Approximation von Quadratwurzeln

Für das Berechnen oder Approximieren von Quadratwurzeln gibt es einen wohlbekannten Algorithmus, der oft *Heron* zugeschrieben wird:

$\sqrt{a}$ sei eine irrationale Zahl und α_1 sei eine erste grobe Näherung. Dann ist auch $\beta_1 = \frac{a}{\alpha_1}$ eine Näherung von $\sqrt{a}$, weil ja $\alpha_1 \cdot \beta_1 = a = \sqrt{a}\sqrt{a}$ gilt.

Es ist bekannt, dass dann $\alpha_2 = \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$ und auch $\beta_2 = \frac{a}{\alpha_2}$ bessere Näherungen von $\sqrt{a}$ sind. Zudem wird

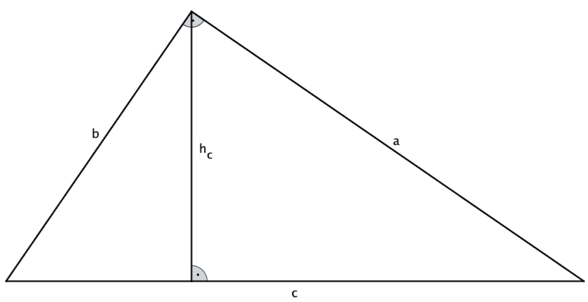
$$\beta_2 = \frac{a}{\alpha_2} = \frac{a}{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}} = \frac{\alpha_1\beta_1}{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}} = \frac{2\alpha_1\beta_1}{\alpha_1+\beta_1} = \mathcal{H}(\alpha_1, \beta_1)$$

So ist also die Näherung α_2 das arithmetische Mittel der beiden Näherungen α_1 und β_1 und β_2 ist das harmonische Mittel von α_1 und β_1.

Anders ausgedrückt: Aus einer vorgegebenen Einschachtelung $\beta_1 \le \sqrt{a} \le \alpha_1$ bekommt man mit $\mathcal{H}(\alpha_1, \beta_1) \le \sqrt{a} \le \mathcal{A}(\alpha_1, \beta_1)$ eine bessere Einschachtelung. Wiederholen des Prozesses liefert eine Intervallschachtelung für $\sqrt{a}$, die sehr schnell konvergiert.
(siehe z.B. [3])

4.4 Die Höhe in einem rechtwinkligen Dreieck

Behauptung: In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Höhe auf der Hypotenuse gleich der Hälfte des harmonischen Mittels der Kathetenquadrate.



$$h_c^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2+b^2} = \frac{1}{2}\mathcal{H}(a^2, b^2)$$

Beweis: Die Fläche F des rechtwinkigen Dreiecks lässt sich auf zwei veschiedene Arten berechnen:

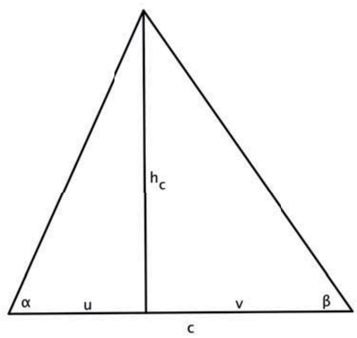
$$\begin{aligned} F = \frac{1}{2} c \cdot h_c &= \frac{1}{2} a \cdot b \\ c \cdot h_c &= a \cdot b \\ c^2 \cdot h_c^2 &= a^2 \cdot b^2 \\ h_c^2 &= \frac{a^2 \cdot b^2}{c^2} = \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}\mathcal{H}(a^2, b^2) \end{aligned} \qquad \square$$

4.5 Die Höhe in einem Dreieck

Behauptung: In einem beliebigen Dreieck ist das Verhältnis einer Höhe h zur Seite, auf der h senkrecht steht, gleich der Hälfte des harmonischen Mittels der Tangenswerte der an die Seite angrenzenden Winkel.

$$\frac{h_c}{c} = \frac{\tan\alpha \cdot \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta} = \frac{1}{2}\mathcal{H}(\tan\alpha, \tan\beta)$$

Beweis:



Es gilt: $\frac{h_c}{u} = \tan\alpha$ und $\frac{h_c}{v} = \tan\beta$, also

$c = u + v = \frac{h_c}{\tan\alpha} + \frac{h_c}{\tan\beta} = h_c \cdot \left(\frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta}\right)$ und daraus

$\frac{h_c}{c} = \frac{1}{\frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta}} = \frac{\tan\alpha \cdot \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta} = \frac{1}{2}\mathcal{H}(\tan\alpha, \tan\beta)$ $\square$

4.6 Die Funktion $f(x) = \frac{c}{x}$

Behauptungen: Die Funktion $f(x) = \frac{c}{x}$ ordnet dem arithmetischen Mittel von Argumenten das harmonische Mittel der entsprechenden Funktionswerte zu und dem harmonischen Mittel von Argumenten das arithmetische Mittel der entsprechenden Funktionswerte.

Beweise:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) &= \frac{c}{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}} = \frac{nc}{x_1+x_2+\cdots+x_n} = \frac{n}{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{c}} \\ &= \frac{n}{\frac{x_1}{c}+\frac{x_2}{c}+\cdots+\frac{x_n}{c}} = \frac{n}{\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}+\cdots+\frac{1}{f(x_n)}} \\ &= \mathcal{H}(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)) \end{aligned}$$

Analog rechnet man $f\left(\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\right) = \mathcal{A}(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))$ nach.

4.7 Die mittlere Krümmung einer regulären Fläche im Raum

Zum Abschluss noch ein Beispiel aus der höheren Mathematik: Sind k_1 und k_2 die Hauptkrümmungen in einem Punkt P einer regulären Fläche F in $\mathbf{R}^3$, so wird $h = \frac{k_1+k_2}{2}$ als mittlere Krümmung bezeichnet.
Sind nun r_1 und r_2 die Radien, die den Hauptkrümmungen entsprechen (also $r_1 = \frac{1}{k_1}$ resp. $r_2 = \frac{1}{k_2}$), so wird $h = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right) \implies \frac{1}{h} = \mathcal{H}(r_1, r_2)$

5 Fazit

Das harmonische Mittel braucht sich wahrlich nicht hinter dem arithmetischen oder dem geometrischen Mittel zu verstecken! Durch den wohlbekannten Zusammenhang zwischen Mittelwerten und Zahlenfolgen lohnt sich auch eine nähere Betrachtung von harmonischen Zahlenfolgen (siehe [5]).

Literatur

[1] Hirscher, Horst, *Viertausend Jahre Mittelwertbildung*, Uni Saarbrücken, 2003

[2] Hirscher, Horst, *Mittenbildung als fundamentale Idee*, Der Mathematikunterricht 5/2004, Seiten 4-13

[3] Hirscher, Horst, *Mittelwertfolgen - oder: Mitten inmitten von Mitten*, Der Mathematikunterricht 5/2004, Seiten 42-54

[4] Hirscher-Buhrmester, M., *Mittelwerte und Mitten in der Musik*, Der Mathematikunterricht 5/2004, Seiten 14-17

[5] Jaggi, Beat, *Mittelwerte und Zahlenfolgen*, erscheint 2012

[6] Lambert, A. und Peters, U., *Mittelwerte und Mitten in Geometrie und Physik*, Der Mathematikunterricht 5/2004, Seiten 30-41

[7] Winter, H., *Mittelwerte - eine grundlegende mathematische Idee*, aus dem Themenheft Mittelwerte in mathematik lehren, 1985, Heft 8

[8] Winter, H. (Hrsg.), *Themenheft Mittelwerte*, aus mathematik lehren, 1985, Heft 8