Histoire de trapèze isocèle

Jean Piquerez

Le problème suivant a été donné lors d'un concours d'entrée à Polytechnique : « Un trapèze isocèle, de périmètre 16, est inscrit dans un cercle de rayon 4. Calculer les côtés et le rayon du cercle inscrit ».

Ce problème sous-entend naturellement que le trapèze isocèle possède un cercle inscrit, ce qui n'est généralement pas le cas. J'ai voulu résoudre ce problème sur le plan littéral. Je l'ai donc reformulé ainsi :

« Un trapèze isocèle de périmètre $4p$ est inscrit dans un cercle de rayon R. Sachant qu'il est circonscriptible à un cercle de rayon r, calculer r et ses côtés. »

Figure 1

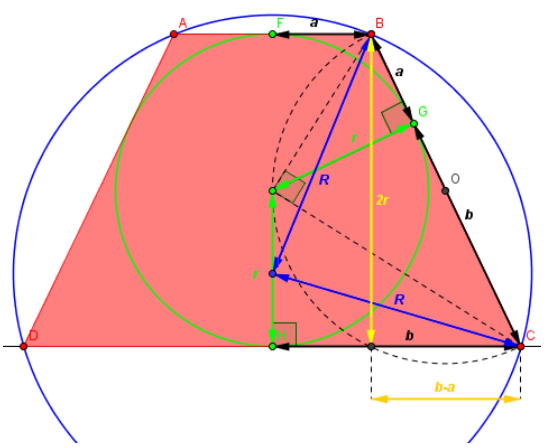
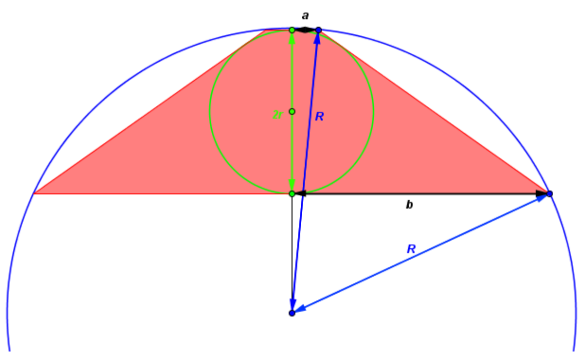


Figure 2



Posons $AB = 2a, CD = 2b$ et $BC = DA = c$.
Comme $BF = BG$ et $CG = CH$, il vient : $c = a + b$

Par Pythagore on a : $FH^2 = (2r)^2 = c^2 - (b-a)^2 = (b+a)^2 - (b-a)^2 = 4ab \Rightarrow r = \sqrt{ab}$ (1)

De plus, on a : $4p = 2(a+b+c) = 2(a+b+a+b) = 4(a+b) \Rightarrow p = a+b$ (2)

Toujours par Pythagore, on a : $\sqrt{R^2 - a^2} \pm \sqrt{R^2 - b^2} = 2r$ (3) selon les cas de figure.

D'où : $2R^2 - a^2 - b^2 \pm 2\sqrt{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)} = 4r^2 \Rightarrow (4ab + a^2 + b^2 - 2R^2)^2 = 4(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)$

$$\Rightarrow 14a^2b^2 + \underbrace{a^4 + b^4}_{(a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2} + \underbrace{8a^3b + 8ab^3}_{8ab(a^2+b^2)} - 16R^2ab = 0$$

$\Leftrightarrow 12a^2b^2+(p^2-2ab)^2+8ab(p^2-2ab-2R^2)=0 \Leftrightarrow p^4+4ab(p^2-4R^2)=0 \;\; (4)$

(2) dans (4) : $p^4+4a(p-a)(p^2-4R^2)=0 \Leftrightarrow 4(p^2-4R^2)a^2-4p(p^2-4R^2)a-p^4=0$ équation du second degré donnant la solution de *a* et de *b* puisque (4) est symétrique en *a*, *b*.
Comme $\Delta=4p^2(p^2-4R^2)^2+4p^4(p^2-4R^2)=8p^2(p^2-4R^2)(p^2-2R^2)$, il vient :

$$a=\frac{p}{2}\left[1-\sqrt{\frac{2(p^2-2R^2)}{p^2-4R^2}}\right] \text{ et } b=\frac{p}{2}\left[1+\sqrt{\frac{2(p^2-2R^2)}{p^2-4R^2}}\right] \Rightarrow r=\frac{p^2}{2\sqrt{4R^2-p^2}}$$

Application numérique : $p=R=4$

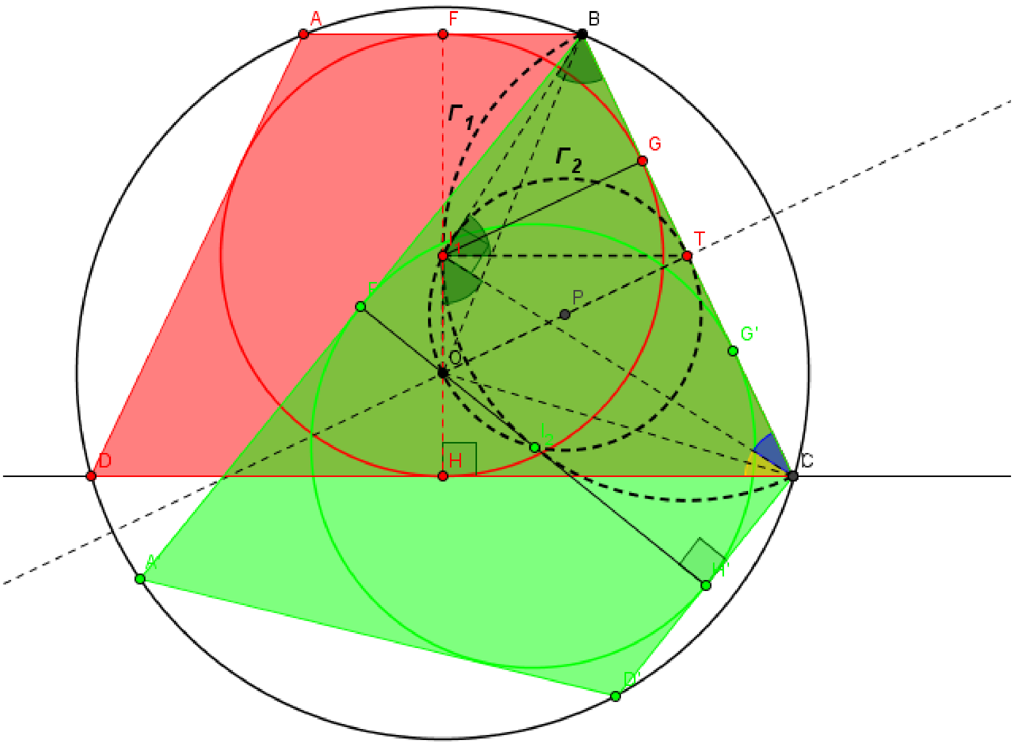
$$a=2\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cong 0{,}37,\; b=2\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cong 3{,}63 \text{ et } r=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cong 1{,}15$$

et l'on trouve les valeurs numériques demandées.

<u>Construction</u> : On construit une corde $[BC]$ de longueur $p=a+b$ dans un cercle de rayon *R* et de centre O. Le centre I du cercle inscrit de rayon $r=\sqrt{ab}$ est à l'intersection d'un demi-cercle Γ_1 de diamètre BC et d'un cercle Γ_2 de centre $P=\text{mil}(O;T)$ et de rayon PO. En effet, on a :

$$\left.\begin{array}{l}\triangle I_1TB \text{ isocèle en } T \Rightarrow \angle I_1BT=\angle TI_1B \\ \angle BCI_1=\angle I_1CH \Rightarrow \angle I_1BC=\angle HI_1C\end{array}\right\} \Rightarrow 90°=\angle CI_1B=\angle CI_1T+\angle TI_1B=\underbrace{\angle CI_1T+\angle HI_1C}_{\angle OI_1T}$$

On obtient ainsi les points I_1 et I_2 et deux solutions symétriques (en rouge) par rapport à la droite (OP).



Sur le même thème on peut imaginer le problème suivant : « Déterminer les côtés du trapèze isocèle simultanément inscriptible dans un cercle de rayon R et circonscriptible à un cercle de rayon r. »

On a donc à nouveau les relations (1) et (3). On en tire :

$$\left.\begin{array}{r} b=\dfrac{r^2}{a}\Rightarrow a^2b^2=r^4 \\ 12a^2b^2+(a^2+b^2)^2+8ab(a^2+b^2-2R^2)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 12r^4+\left(a^2+\frac{r^4}{a^2}\right)^2+8r^2\left(a^2+\frac{r^4}{a^2}-2R^2\right)=0$$

Posons $a^2=u$; il vient alors :

$$\underbrace{u^2+\frac{r^8}{u^2}}_{\left(u+\frac{r^4}{u}\right)^2-2r^4}+8r^2\left(u+\frac{r^4}{u}\right)+14r^4-16r^2R^2=0\Rightarrow x^2+8r^2x+12r^4-16r^2R^2=0$$ en posant $x=u+\dfrac{r^4}{u}$

On trouve : $x=2r\sqrt{r^2+4R^2}-4r^2$

Revenant à u, on a : $u^2-2r(\sqrt{r^2+4R^2}-2r)u+r^4=0\Rightarrow u=r(\sqrt{r^2+4R^2}-2r)\pm\sqrt{\Delta}$

avec $\Delta=r^2\left[\left(\sqrt{r^2+4R^2}-2r\right)^2-r^2\right]=4r^2\left[(r^2+R^2)-r\sqrt{r^2+4R^2}\right]$, d'où :

$u=r(\sqrt{r^2+4R^2}-2r)\pm 2r\sqrt{\left[r^2+R^2-r\sqrt{r^2+4R^2}\right]}$.

Par conséquent on a : $a=\sqrt{r(\sqrt{r^2+4R^2}-2r)\pm 2r\sqrt{\left[r^2+R^2-r\sqrt{r^2+4R^2}\right]}}$

Comme $a\le r$, on peut montrer qu'il faut choisir le signe « $-$ ». Il s'ensuit :

$a=\sqrt{r(\sqrt{r^2+4R^2}-2r)-2r\sqrt{\left[r^2+R^2-r\sqrt{r^2+4R^2}\right]}}$ et

$b=\sqrt{r(\sqrt{r^2+4R^2}-2r)+2r\sqrt{\left[r^2+R^2-r\sqrt{r^2+4R^2}\right]}}$

<u>Conditions d'existence d'une solution</u> :

$r^2+R^2-r\sqrt{r^2+4R^2}\ge 0\Leftrightarrow R\ge r\sqrt{2}$ et

$r(\sqrt{r^2+4R^2}-2r)-2r\sqrt{\left[r^2+R^2-r\sqrt{r^2+4R^2}\right]}\ge 0$ qui est toujours vrai.

Remarque : Comme la résolution de ce problème n'exige que des quadratures, la solution est, bien entendu, aussi constructible à la règle et au compas.