

Gefässe füllen - mathematisch betrachtet

Beat Jaggi, beat.jaggi@phbern.ch

1 Einleitung

In einen Becher oder in ein Sektglas wird 1 dl eines Getränkes eingefüllt, wie hoch steht dann die Flüssigkeit im Gefäss?



Es stellt sich heraus, dass diese Frage im allgemeinen gar nicht so einfach zu beantworten ist und auf das Lösen von kubischen Gleichungen hinausläuft.

„Gefässe füllen“ kommt in zahlreichen Schulbüchern vor, meistens mit dem Ziel, den Funktionsbegriff einzuführen.

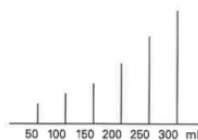


Gefässe füllen

- 1 A** Platziere einen Massstab stabil und senkrecht in einem Rundkolben. Giesse 50 ml Wasser in den Rundkolben. Lies die Füllhöhe ab und trage sie in eine Tabelle ein. Giesse weitere 50 ml Wasser nach, lies ab und trage ein. Fahre weiter, bis der Kolben gefüllt ist.

- B** Zeichne zu deiner Tabelle eine Grafik, wie das Beispiel unten zeigt.

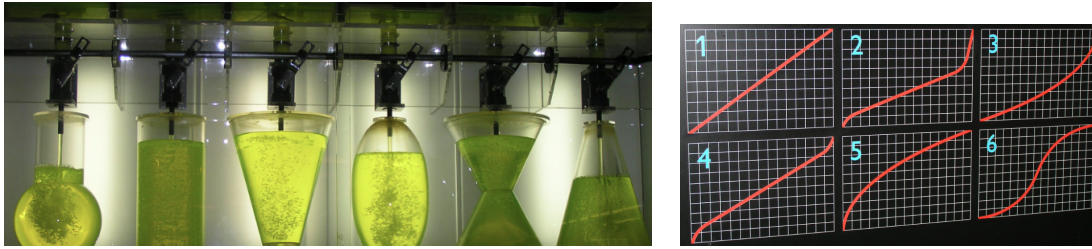
Volumen	0	50	100	150	ml
Füllhöhe	0						mm



- C** Stell dir vor, du hättest jeweils nur 25 ml nachgefüllt. Zeichne die Grafik.
D Du kannst deine Grafik überprüfen, wenn du den Rundkolben nochmals auf die neue Weise füllst.

Aus der Lernumgebung „Wasserstand“, mathbu.ch 7, siehe [1]

Auch im grössten populärwissenschaftlichen Museum Europas, in der "Cité des Sciences" in Paris werden Gefässe gefüllt.



Die Graphen rechts zeigen den Zusammenhang zwischen eingefüllter Flüssigkeitsmenge (x -Achse) und Flüssigkeitsstand (y -Achse): Welcher Graph gehört zu welchem Gefäss?

Im Folgenden soll das Problem streng mathematisch untersucht werden.

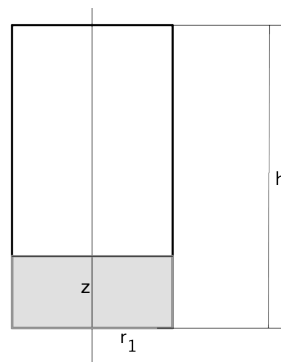
Hauptfrage: Eine vorgegebene Menge Flüssigkeit wird in ein Gefäss mit vorgegebenen Abmessungen eingefüllt. Wie hoch steht die Flüssigkeit im Gefäss? Dazu bestimmen wir die Füllhöhe als Funktion der eingefüllten Flüssigkeitsmenge.

2 Einfache Gefässe füllten

Meist ist es einfach, das Volumen v der eingefüllten Flüssigkeit als Funktion der Füllhöhe z anzugeben. Um die Hauptfrage zu beantworten, gilt es, die Umkehrfunktion zu bestimmen. Wir untersuchen zuerst einfache Gefässformen wie Zylinder, Kegel(stumpfe), Kugeln.

2.1 Zylinder

Ein Kreiszyylinder (innen hohl) sei gegeben durch den Radius r_1 und die Höhe h . Der Zylinder stehe auf einer waagrechten Fläche. Wir zeichnen hier und auch weiter unten jeweils nur Aufrisse der Gefässe.



Das schraffierte Volumen beträgt

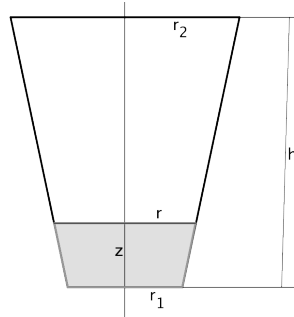
$$v = v(z) = r_1^2 \pi z$$

und somit ist die Füllfunktion gegeben durch

$$z = z(v) = \frac{v}{\pi r_1^2}$$

2.2 Kegel und Kegelstumpfe

Wir fassen Kegel und Kegelstumpf als Rotationskörper auf und berechnen das schraffierte Volumen mit der allseits bekannten Formel.



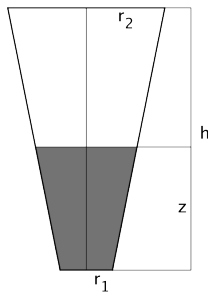
$$v = v(z) = \pi \int_0^z \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \cdot x + r_1 \right)^2 dx = \frac{\pi h}{3(r_2 - r_1)} \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \cdot x + r_1 \right)^3 \Big|_0^z$$

$$\text{also } v = \frac{\pi h}{3(r_2 - r_1)} \left[\left(\frac{r_2 - r_1}{h} \cdot z + r_1 \right)^3 - r_1^3 \right]$$

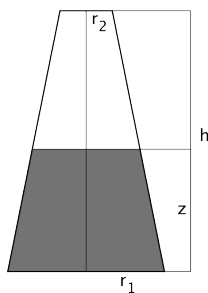
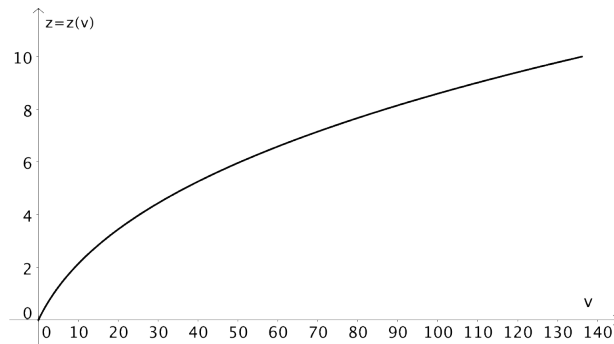
Diese kubische Gleichung lässt sich einfach nach z auflösen.

$$z = z(v) = \frac{h}{r_2 - r_1} \left(\sqrt[3]{\frac{3(r_2 - r_1)v}{\pi h} + r_1^3} - r_1 \right)$$

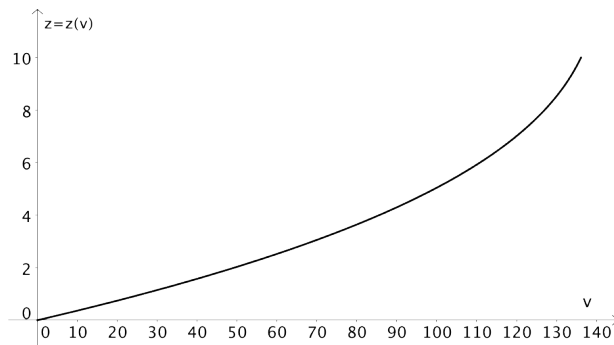
Beispiele:



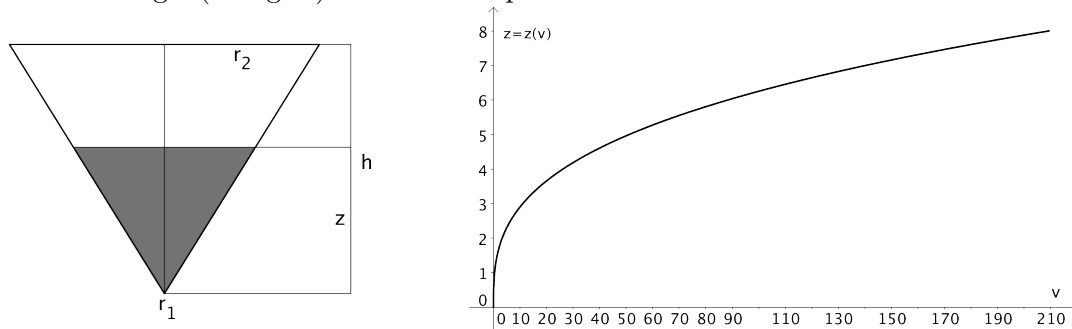
$$r_1 = 1, \quad r_2 = 3, \quad h = 10$$



$$r_1 = 3, \quad r_2 = 1, \quad h = 10$$



Für einen Kegel (Sektglas) sieht der Graph so aus:

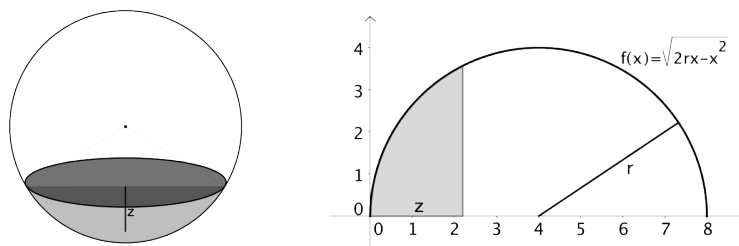


$$r_1 = 0, \quad r_2 = 5, \quad h = 8$$

Damit können wir die Eingangsfrage beantworten: Hat ein kegelstumpfförmiger Becher unten einen Durchmesser von 2 cm ($r_1 = 1$), einen oberen Durchmesser von 6 cm ($r_2 = 3$) und eine Höhe von 10 cm, dann steht 1 dl = 100cm³ Flüssigkeit im Gefäß $z(100) = 8.59$ cm hoch.

In einem Sektglas mit oberem Durchmesser 10 cm ($r_2 = 5$) und Höhe $h = 8$ cm steht 1 dl Flüssigkeit 6.25 cm hoch.

2.3 Kugeln



In eine (Hohl-)Kugel mit Radius r ist eine Flüssigkeit mit Volumen v eingefüllt. Die Füllhöhe ist z . Mit der Formel für das Volumen von Rotationskörpern (siehe Zeichnung rechts) gilt:

$$v = v(z) = \pi \cdot \int_0^z f^2(x) \, dx = \pi \cdot \int_0^z (2rx - x^2) \, dx = \pi \cdot \left(rz^2 - \frac{1}{3}z^3 \right)$$

Wie suchen die Füllhöhe z in Abhängigkeit vom Volumen v der eingefüllten Flüssigkeit:

$$v = \pi \cdot \left(rz^2 - \frac{1}{3}z^3 \right) \implies z^3 - 3rz^2 + \frac{3v}{\pi} = 0 \quad (1)$$

Nun gilt es, die kubische Gleichung nach z aufzulösen.

Wir folgen dem Vorgehen in [2]: Eine Lösung der Gleichung $y^3 + Py + Q = 0$ ist gegeben durch

$$y = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{Q}{2}\right)^2}} - \sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{Q}{2}\right)^2}}$$

Mit der Substitution $y = z - r$ wird $z^3 - 3rz^2 + \frac{3v}{\pi} = 0$ zu

$$y^3 - 3r^2y + \left(\frac{3v}{\pi} - 2r^3\right) = 0$$

Wir setzen also $P = -3r^2$ und $Q = \frac{3v}{\pi} - 2r^3$.

Eine kurze Rechnung zeigt:

$$D = \left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{Q}{2}\right)^2 = \frac{9v}{4\pi^2} \left(v - \frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

Wegen $v < \frac{4}{3}\pi r^3$ ist $D < 0$ und \sqrt{D} rein imaginär. In diesem Fall hat unsere Gleichung drei reelle Lösungen (siehe [2]).

Mit $w = \frac{4}{3}\pi r^3$ für das Volumen der vorgegebenen Kugel bekommen wir

$$\sqrt{\left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{Q}{2}\right)^2} = \frac{3}{2\pi} \sqrt{v(w-v)}i \quad \text{und} \quad \frac{Q}{2} = \frac{3}{2\pi} \left(v - \frac{w}{2}\right)$$

Nun gilt es, die dritten Wurzeln der komplexen Zahl

$$\omega_{1,2} = \pm a + ib = \pm \frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{Q}{2}\right)^2} = \pm \frac{3}{2\pi} \left(v - \frac{w}{2}\right) + \frac{3}{2\pi} \sqrt{v(w-v)}i$$

zu bestimmen.

Wegen $w = \frac{4}{3}\pi r^3$ wird

$$a = \frac{3}{2\pi} \left(v - \frac{w}{2}\right) = 2r^3 \left(\frac{v}{w} - \frac{1}{2}\right)$$

und

$$b = \frac{3}{2\pi} \sqrt{v(w-v)} = 2r^3 \sqrt{\frac{v}{w} \left(1 - \frac{v}{w}\right)}$$

Damit ist jetzt $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = r^3$.

Wir können nun $\frac{a}{\rho} = 2\left(\frac{v}{w} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2v}{w} - 1 = \cos \varphi$ oder $\frac{b}{\rho} = 2\sqrt{\frac{v}{w} \left(1 - \frac{v}{w}\right)} = \sin \varphi$ setzen und so φ bestimmen.

Aus $\omega_1 = a + ib = r^3 (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ folgt dann $\sqrt[3]{\omega_1} = r \left(\cos \frac{\varphi+2k\pi}{3} + i \sin \frac{\varphi+2k\pi}{3}\right)$ mit $k = 0, 1, 2$.

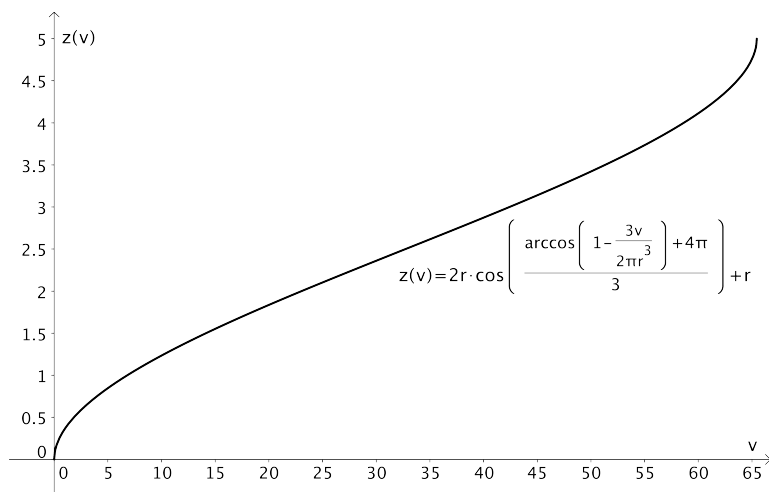
Versuche mit einem Computerprogramm wie *maple* zeigen, dass $\varphi = \arccos\left(-\frac{a}{\rho}\right) = \arccos\left(1 - \frac{2v}{w}\right)$ und $k = 2$ die vernünftige Lösung für y liefert.

Erinnern wir uns an die Substitution $y = z - r$ und setzen $w = \frac{4}{3}\pi r^3$, so ist schliesslich

$$z = z(v) = 2r \cdot \cos\left(\frac{\arccos\left(1 - \frac{3v}{2\pi r^3}\right) + 4\pi}{3}\right) + r$$

Die Imaginärteile fallen jeweils tatsächlich weg, die Gleichung hat ja, wie oben erwähnt, drei reelle Lösungen.

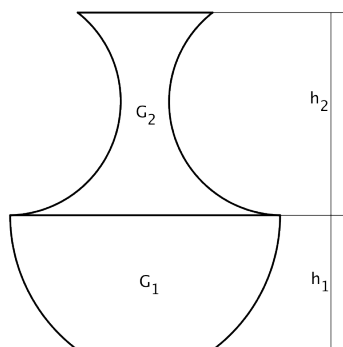
Für $r = 2.5$ ergibt sich der folgende Graph:



Ist der Kugelradius $r = 2.5$ cm, dann steht $0.5 \text{ dl} = 50\text{cm}^3$ Flüssigkeit $z(50) \approx 3.42$ cm hoch.

3 Übergänge zwischen verschiedenen Gefäßformen

Viele Gefäße sind aus einfachen Formen zusammengesetzt.

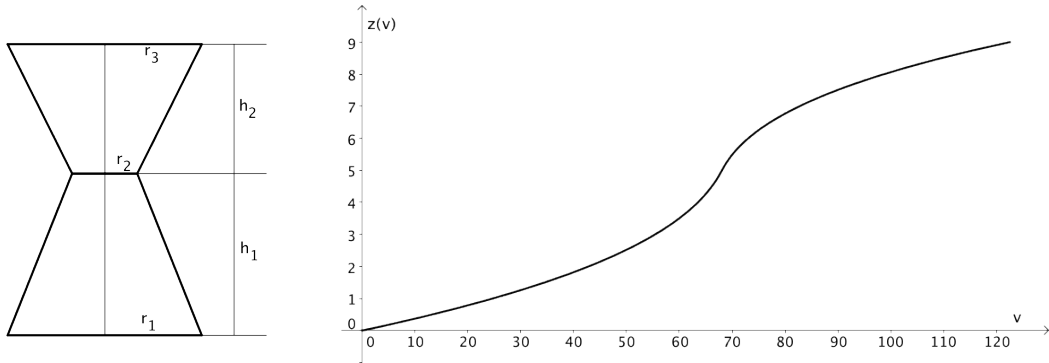


Sind zwei Gefäßformen G_1 und G_2 mit Volumen V_1 resp. V_2 gegeben, so ist die Füllfunktion $z(v)$ des ganzen Gefäßes gleich

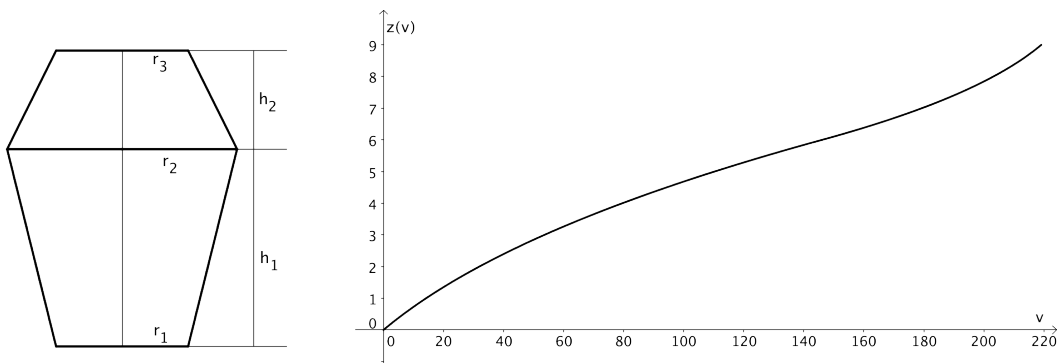
$$z(v) = \begin{cases} z_1(v) & ; 0 \leq v \leq V_1 \\ z_2(v - V_1) + h_1 & ; V_1 \leq v \leq V_1 + V_2 \end{cases}$$

wo $z_1(v)$ und $z_2(v)$ die Füllfunktionen der einzelnen Gefäße sind.

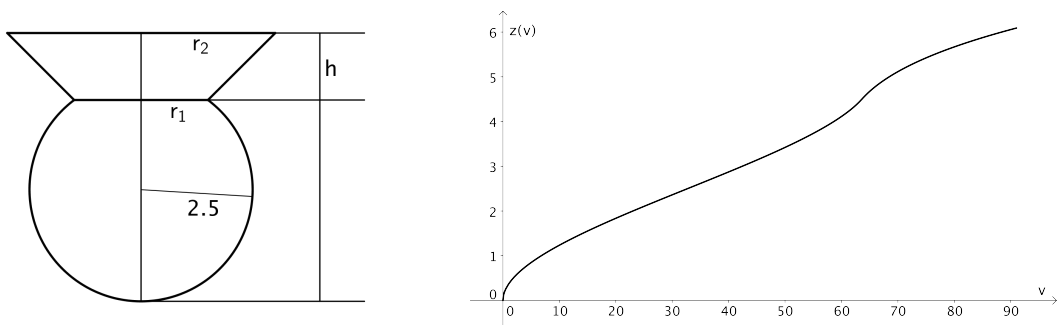
Wir betrachten Beispiele:



$$r_1 = 3, \quad r_2 = 1, \quad r_3 = 3, \quad h_1 = 5, \quad h_2 = 4.$$



$$r_1 = 2, \quad r_2 = 3.5, \quad r_3 = 2, \quad h_1 = 6, \quad h_2 = 3.$$



$$r_1 = 1.5, \quad r_2 = 3, \quad h = 1.5.$$

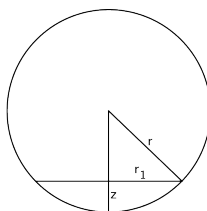
Festzuhalten ist, dass die Graphen glatt sind, also auch beim Übergang von der einen Form zur zweiten keine Knicke aufweisen. Um dieses Phänomen allgemein zu verstehen, betrachten wir die Volumenfunktionen, die ja die Umkehrfunktionen der Füllfunktionen sind.

Zylinder: $v(z) = r_1^2 \pi z \implies v'(z) = \pi r_1^2$. v' ist konstant.

Kegelstumpf: $v(z) = \frac{\pi h}{3(r_2 - r_1)} \left[\left(\frac{r_2 - r_1}{h} \cdot z + r_1 \right)^3 - r_1^3 \right]$
 $\implies v'(z) = \frac{\pi h}{3(r_2 - r_1)} \left[3 \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \cdot z + r_1 \right)^2 \cdot \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right) \right] = \pi \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \cdot z + r_1 \right)^2$

Insbesondere ist $v'(0) = \pi r_1^2$ und $v'(h) = \pi r_2^2$

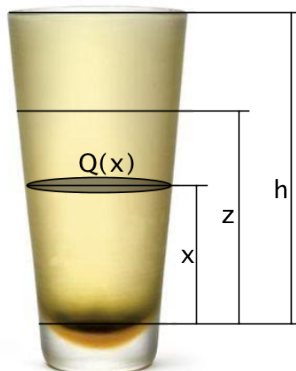
Kugel: $v(z) = \pi \cdot \left(rz^2 - \frac{1}{3}z^3 \right) \implies v'(z) = \pi (2rz - z^2)$



Ein Blick auf die obige Zeichnung zeigt, dass $r_1^2 + (r - z)^2 = r^2 \implies 2rz - z^2 = r_1^2$, also auch hier $v'(z) = \pi r_1^2$ gilt.

Fazit: Die Ableitung der Volumenfunktion ist stets gleich der Querschnittflächenfunktion!

Das gilt allgemein:



Ist bei einem Gefäß die Querschnittfläche als Funktion $Q(x)$ gegeben, dann ist das Volumen der bis zur Höhe z eingefüllten Flüssigkeit gleich

$$v(z) = \int_0^z Q(x) \, dx = \tilde{Q}(z) - \tilde{Q}(0)$$

wo \tilde{Q} eine Stammfunktion von Q ist.

Damit ist aber $v'(z) = Q(z)$.

Literatur

- [1] Affolter, W. et al., *mathbu.ch* 7, Lernumgebung 2, "Wasserstand", Klett & blmv, 2003
- [2] Lüneburg, H. , *Von Zahlen und Grössen*, Band 1, Birkhäuser, 2008