Sangaku (I)

par
Mireille Schumacher
Gymnase d'Yverdon mireille.schumacher@gmail.com

Résumé : Les panneaux de mathématiques « sangaku » que l'on découvre accrochés sous les auvents des temples et des sanctuaires au Japon présentent un éventail d'applications géométriques qui peuvent servir les objectifs d'un enseignant de mathématique. Résoudre ou construire un sangaku, c'est inventer des démarches et des raisonnements efficaces, essentiellement soutenus par des résultats de géométrie classique. Cet article vous invite à découvrir quelques sangaku, en mesurer à la fois la beauté, la simplicité et la complexité, au travers de problèmes dont les données se veulent claires et concises.

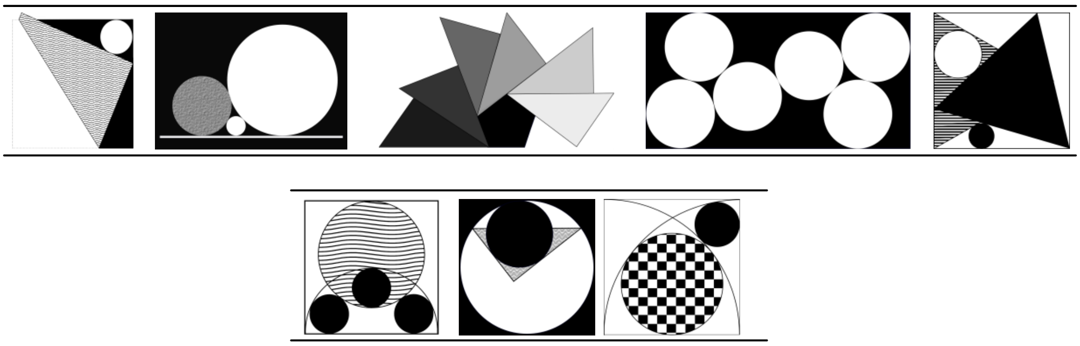


Figure 1.-Galerie de sangaku.

INTRODUCTION

Dans le Japon féodal, la mathématique était avant tout considérée comme une curiosité intellectuelle. De nombreux traités de mathématiques avaient été importés de Chine et les mathématiques japonaises s'inspiraient fortement de celles de la Chine. Au début du XVII$^{\text{ème}}$ siècle, plusieurs missionnaires européens, en particulier des Espagnols et des Portugais, se rendirent en Asie du sud-est. Ils furent chaleureusement accueillis au Japon jusqu'à ce que le Shogun, chef du gouvernement, informé de la conquête européenne de l'Amérique du Sud et du massacre des nations locales qui s'ensuivirent, décide d'interdire tout voyage de Japonais vers l'étranger et toute visite étrangère au Japon. Quelques exceptions furent mises en place, les Hollandais par exemple, eurent le droit de conserver un poste commercial à Nagasaki. Pendant les deux siècles suivants, le Japon fut isolé du reste du monde et les sciences japonaises évoluèrent indépendamment de leur équivalent européen. C'est l'époque d'Edo (ancien nom de la capitale japonaise Tokyo) qui s'étend de 1603 à 1868. La publication du *Jinkôki* (Traité inaltérable) de Yoshida Mitsuyoshi en 1627, donne le signal de l'envol du « wasan » ou de la « mathématique japonaise de l'ère Edo ». Le *Jinkôki* aborde une large palette de sujets d'arithmétique. On y trouve les règles de calcul à l'aide du boulier japonais, les méthodes de conversion des monnaies, des problèmes commerciaux, des estimations de superficies ou de capacités, des estimations de matériaux nécessaires à des travaux de construction, etc. Le *Jinkôki* répond si bien à l'attente du public, que l'intérêt pour la mathématique ne cesse de croître au XVII$^{\text{ème}}$ siècle. L'outil algébrique et l'analyse connaissent, eux, un grand bond en avant au tournant du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle avec le mathématicien Seki Takakazu (1642 – 1708) et son célèbre étudiant Takebe Katahiro (1664 – 1739). Ces progrès incitent les mathématiciens à explorer plus avant les problèmes mettant en jeu des compositions géométriques.

Des mathématiques dans les lieux saints

La mathématique « wasan » se développe en écoles qui se réclament de grands maîtres et s'organisent selon le modèle des écoles d'arts martiaux. Les « sangaku » sont des tablettes de bois, sur lesquelles les maîtres de ces écoles peignent des problèmes. Ces panneaux de mathématiques sont exposés sous les auvents des temples et des sanctuaires, lieux de pèlerinages de masse. Ils présentent des énigmes très variées. On y trouve notamment des arrangements sophistiqués de formes géométriques simples, telles que cercles, carrés, triangles, ellipses ou sphères, imbriquées les

unes dans les autres. Le panneau indique l'énoncé du problème, sa solution, lorsque le problème n'est pas ouvert, ainsi que le ou les signataires de la composition.
Entre 800 et 900 sangaku ont été retrouvés, le plus ancien date de 1683. Certaines de ces tablettes sont considérées comme des œuvres d'art à part entière (Figure 1). La plupart des panneaux que l'on peut voir aujourd'hui sont récents. Certains sont des reproductions réalisées par des historiens, soucieux de conserver la mémoire de cette culture. L'exposition de tablettes votives dans les lieux sacrés était un moyen de diffusion. Elle permettait aux écoles de recruter leurs élèves dans un large périmètre et de stimuler la recherche, par le biais de la compétition que se livraient les maîtres des écoles les plus prestigieuses. Aujourd'hui, les mathématiciens japonais disposent de revues et de congrès pour échanger leurs idées et publier leurs découvertes, comme tous les mathématiciens du monde.

DES PROBLEMES EPURES

Réaliser un sangaku à partir d'un modèle donné, n'est pas toujours une tâche facile. L'observation de la figure géométrique peinte permet de déduire les informations principales concernant l'énoncé du problème posé, souvent réduit au minimum, voire parfois omis, de manière à ne pas nuire à l'esthétique du dessin. Pour certains sangaku, la résolution de l'énigme proposée relève de simples calculs, alors que la construction à la règle et au compas est d'un tout autre ordre de difficultés. La réciproque est aussi vraie. Pour se repérer dans la galerie de sangaku, plutôt que d'attribuer un numéro, on donnera un nom à chaque sangaku. L'exemple présenté ci-dessous, la construction du sangaku *Ogive gothique*, lie l'usage de la règle et du compas au processus calculatoire.

Construction du sangaku Ogive gothique

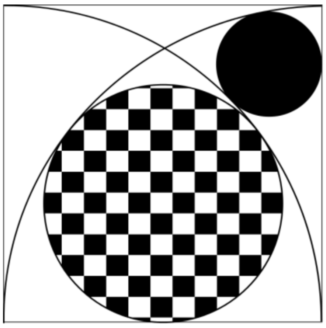


Figure 2.-Sangaku *Ogive gothique*.

Voici l'énigme du sangaku *Ogive gothique* (Figure 2) : « Dans un carré de côté de longueur $2c$, on trace deux arcs de cercle de même rayon $2c$. On crée ainsi une ogive gothique. On construit alors deux cercles inscrits aux triangles curvilignes. Calculer la longueur des rayons des deux cercles en fonction de celle du côté du carré ». Non daté, ce sangaku a été observé dans la préfecture de Miyagi et détruit.

i) *Construction du grand cercle* (Figure 3)

Le carré $ABCD$ est de côté $2c$; r' est le rayon du grand cercle et S' son centre; F est le projeté orthogonal du point S' sur le côté AB du carré.
Calcul de r' par le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle FBS' :

$$(2c-r')^2=(r')^2+c^2 \quad \Rightarrow \quad r'=\frac{3}{4}c.$$

Le centre S' du cercle est le point d'intersection de la médiatrice du côté AB du carré et du cercle centré en F, de rayon $\frac{3}{4}c$.

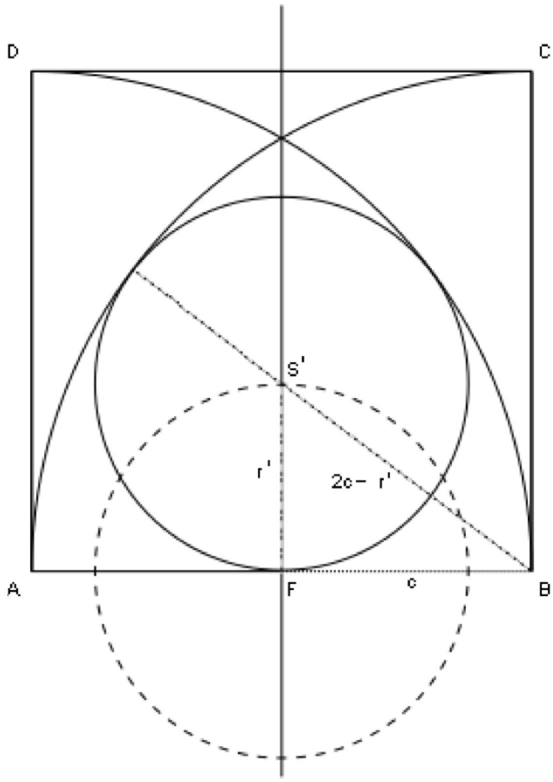
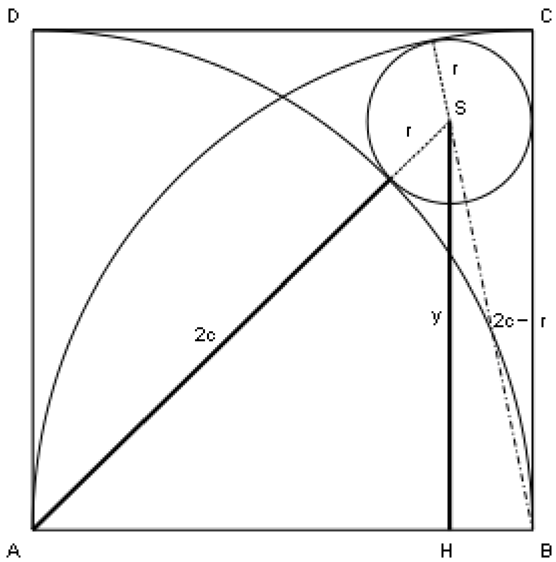


Figure 3.-Construction du grand cercle

ii) *Construction du petit cercle* (Figure 4)

Le carré $ABCD$ est de côté $2c$; r est le rayon du petit cercle et S son centre; H est le projeté orthogonal du point S sur le côté AB du carré ; $y = SH$ est l'ordonnée du point S.

Le théorème de Pythagore appliqué aux triangles rectangles AHS et BSH permet d'exprimer r et y en fonction de c :



$$\begin{cases}(2c-r)^2 + y^2 = (2c+r)^2 & \text{triangle } AHS \\ r^2 + y^2 = (2c-r)^2 & \text{triangle } BSH\end{cases}$$

Pour résoudre ce système, éliminer y^2 en soustrayant les deux équations :

$$(2c-r)^2 - r^2 = (2c+r)^2 - (2c-r)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left[(2c-r)+r\right]\left[(2c-r)-r\right] =$$

$$\left[(2c+r)+(2c-r)\right]\left[(2c+r)-(2c-r)\right] \Leftrightarrow$$

$$2c(2c-2r) = 4c\cdot 2r \Leftrightarrow c-r = 2r \Leftrightarrow c = 3r$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{c}{3}.$$

Figure 4.-Construction du petit cercle.

En substituant $c = 3r$ dans la deuxième équation du système, on obtient :

$r^2 + y^2 = (2\cdot 3r - r)^2 \Leftrightarrow r^2 + y^2 = 25r^2 \Leftrightarrow y^2 = 24r^2 \Leftrightarrow y = 2\sqrt{6}\cdot r = \frac{2\sqrt{6}\cdot c}{3}$. Les solutions positives du système sont $r = \frac{c}{3}$ et $y = \frac{2\sqrt{6}\cdot c}{3}$.

Construction du cercle de centre S et de rayon r (Figure 5)

1. *Lieu géométrique du point S*
   Soit M le point milieu du segment CD ; construire par le théorème de Thalès, le point U situé au tiers de CM, à partir de C ; puisque $r = \frac{c}{3} = \frac{CM}{3}$, le point S se trouvera sur la droite d perpendiculaire à CD passant par U.
2. *Construction de l'ordonnée y du point S*
   $y = \frac{2\sqrt{6}\cdot c}{3} = 2r\cdot\sqrt{6} = \delta\cdot\sqrt{6}$ où $\delta = 2r$ est le diamètre du cercle cherché. Il s'agit de construire à la règle et au compas un segment de longueur $\delta\cdot\sqrt{6}$. Par exemple, par la méthode du théorème de la hauteur. Pour ce faire, placer un point N sur la droite AB à distance δ de B (pour ne pas surcharger la figure, N extérieur au segment AB). Sur cette même droite, reporter de part et d'autre du point N deux segments de longueur 2δ et 3δ respectivement. On obtient deux points K et L. Tracer le cercle de Thalès du segment KL. La perpendiculaire à KL issue de N coupe l'arc supérieur de ce cercle de Thalès en un point Q. On obtient $NQ^2 = 2\delta\cdot 3\delta \Leftrightarrow NQ^2 = 6\delta^2 \Leftrightarrow NQ = \delta\cdot\sqrt{6} = y$, qui est l'ordonnée du centre S du cercle. La droite parallèle à AB passant par Q coupe le droite d en S.

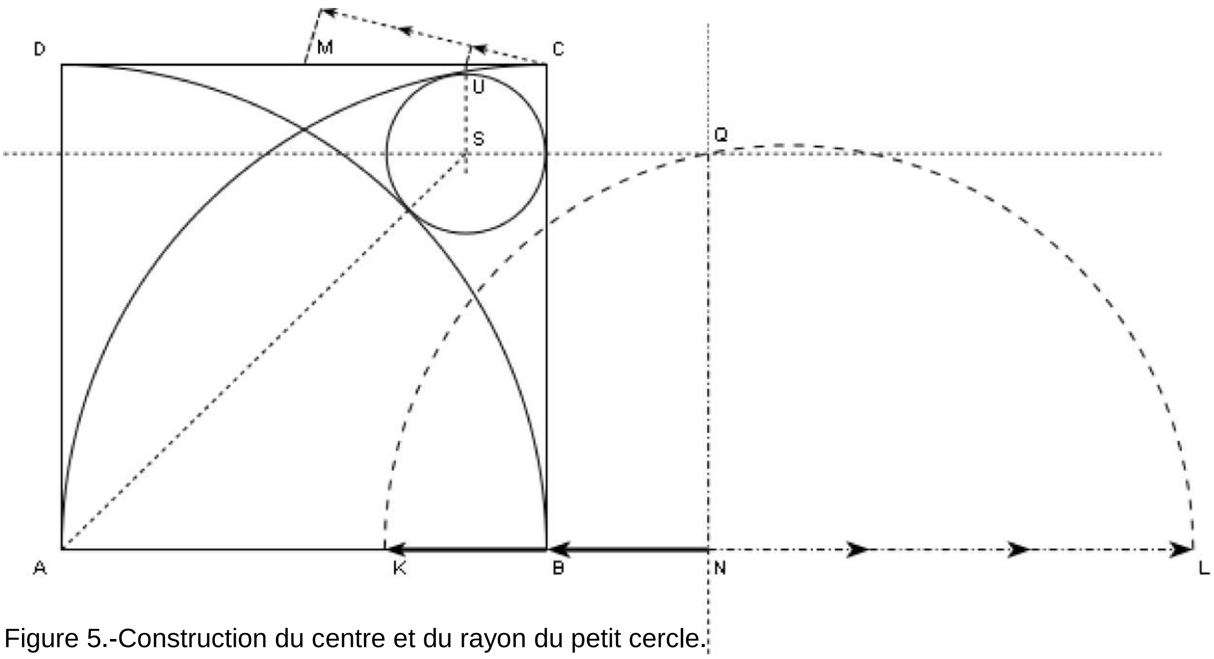


Figure 5.-Construction du centre et du rayon du petit cercle.

EN S'INSPIRANT DES SANGAKU HISTORIQUES

Le Partage de San Gaku est une énigme rencontrée dans un jeu mathématique (CHAMPIONNAT DE MATHEMATIQUES, 2006)

San Gaku a partagé sa propriété entre ses quatre enfants (Figure 6). C'est un hexagone dont la somme des longueurs de deux côtés consécutifs est toujours égale à 149 mètres. La part de chaque enfant est un terrain triangulaire, comprenant une maison circulaire tangente à chaque côté. Les sommets de la figure hexagonale sont situés sur une route circulaire dont le rayon est égal à la somme des rayons des maisons.
Quelle est la plus grande longueur d'un côté de l'hexagone arrondie au mètre le plus proche ?

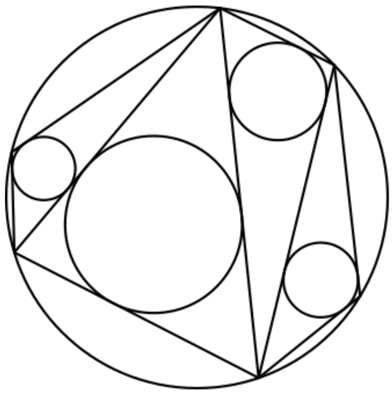


Figure 6.-Illustration du *Partage de San Gaku*.

POUR ALLER PLUS LOIN

Dans un prochain article, d'autres sangaku seront proposés, pour explorer de belles mathématiques.

BIBLIOGRAPHIE

CHAMPIONNAT DE MATHEMATIQUES, 2006. http://homepage.hispeed.ch/FSJM/ Enoncés, archives, 20ème Finale régionale du 20 mai.
DELERUE N., 2008. *Mathématiques japonaises*. Tangente 125 : 44-46.
HUVENT G., 2008. *Sangaku. Le mystère des énigmes géométriques japonaises*. Dunod, Paris.
HUVENT G., 2013. http://gery.huvent.pagesperso-orange.fr/index_explorer.htm Rubrique math-art
INTERACTIVE MATHEMATICS MISCELLANY AND PUZZLES, 1997-2013. http://www.cut-the-knot.org/ Rubrique sangaku : Thoughts&Problems.