

# Les origines de notre enseignement de la géométrie analytique

Jean-Daniel Voelke, Gymnase Auguste Piccard, Lausanne

## 1<sup>ère</sup> partie<sup>1</sup>

### Introduction

La géométrie analytique prend naissance au 17<sup>e</sup> siècle avec *La Géométrie* de René Descartes [Descartes, 1637] et *l'Introduction aux lieux plans et solides* de Pierre de Fermat [Fermat, 1679]<sup>2</sup>. L'objectif principal de Descartes est de résoudre des problèmes géométriques. Sa méthode consiste à traduire en équations l'énoncé d'un problème, à résoudre ces équations et à chercher enfin une construction de la solution. Descartes résout en particulier le célèbre problème dit «de Pappus»<sup>3</sup> en utilisant une nouvelle technique consistant à repérer les points du plan par des coordonnées. Un lieu (i.e. une courbe) est alors représenté par une équation à deux inconnues. Cette technique rend possible l'étude des propriétés d'une courbe à partir de son équation; elle est considérée aujourd'hui comme la caractéristique constituante de la géométrie analytique, même s'il ne s'agit en fait pas de l'élément fondamental du mémoire de Descartes<sup>4</sup>. On retrouve cette caractéristique dans le mémoire de Fermat. Il introduit des coordonnées dans le plan et considère qu'une équation à deux inconnues représente un lieu. Il montre ensuite qu'une équation du 1<sup>er</sup> degré représente une droite et une équation du 2<sup>e</sup> degré un cercle ou une conique.

La géométrie analytique de Descartes et Fermat a peu de points communs avec celle que nous enseignons aujourd'hui au niveau gymnasial. Il n'y a qu'un axe de coordonnées sur lequel une origine est fixée. Les coordonnées sont des grandeurs au sens d'Euclide (segments) et non des nombres. La considération de coordonnées négatives n'est donc pas possible. Conformément à la tradition antique, les deux mathématiciens travaillent avec des expressions homogènes<sup>5</sup>, même si Descartes montre que cela n'est pas nécessaire si l'on introduit une unité de longueur. Les figures pour lesquelles Descartes donne une équation sont des coniques ou des courbes d'un degré supérieur. On ne trouve dans *La Géométrie* qu'une brève allusion au fait qu'une équation du 1<sup>er</sup> degré représente une droite. L'appellation «équation cartésienne de la droite» n'est donc pas justifiée et il serait plus correct de parler d'équation «fermatienne». Comme indiqué précédemment, Fermat commence en effet son mémoire en étudiant le lieu représenté par une équation du 1<sup>er</sup> degré.

<sup>1</sup> La seconde partie de cet article sera publiée dans le prochain numéro du *Bulletin*. L'intégralité de l'article est disponible dès maintenant à l'adresse [www.sspmp.ch/crm/article](http://www.sspmp.ch/crm/article).

<sup>2</sup> Le mémoire de Descartes fut publié en annexe au *Discours de la méthode*. Le texte de Fermat ne comporte qu'une douzaine de pages; il est en latin et fut rédigé vers 1636. Il fut ensuite diffusé parmi les mathématiciens parisiens mais publié seulement de manière posthume.

<sup>3</sup> Considérons quatre droites  $d_1, d_2, d_3$  et  $d_4$  et quatre angles  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  et  $\alpha_4$ . Soit  $P$  un point du plan. Notons  $e_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) la distance de  $P$  à la droite  $d_i$  mesurée selon l'angle  $\alpha_i$ . Le problème consiste à déterminer le lieu des points  $P$  tels que  $e_1 e_2 = e_3 e_4$ . Descartes donne l'équation de ce lieu et démontre qu'il s'agit d'une conique. Le problème peut se généraliser à un nombre quelconque de droites.

<sup>4</sup> Cf. [Bos, 2001, 227]

<sup>5</sup> Dans cette tradition, on ne peut additionner ou comparer que des grandeurs de même dimension. Une expression de la forme  $ax + b$  n'a donc pas de sens; cela reviendrait à additionner une aire et une ligne. Il faut écrire  $ax + b^2$ .

Après Descartes et Fermat, la géométrie analytique va se développer durant la seconde moitié du 17<sup>e</sup> siècle puis tout au long du 18<sup>e</sup> siècle<sup>6</sup>. L'identification des coordonnées à des nombres et la considération de coordonnées négatives vont progressivement s'imposer et sont relativement bien établies au milieu du 18<sup>e</sup> siècle<sup>7</sup>. La géométrie analytique se développe aussi dans l'espace. Les figures étudiées par les géomètres restent cependant en premier lieu des courbes ou des surfaces et ce n'est qu'incidemment que l'on rencontre la droite, le cercle, le plan ou la sphère. Cette situation apparaît bien dans le second volume du traité de Leonhard Euler *Introductio in analysin infinitorum* [Euler, 1748], ouvrage présentant une synthèse des résultats obtenus en géométrie analytique à cette époque. Euler établit l'équation de la droite mais ne résout pas de problèmes faisant intervenir uniquement cette figure. Il affirme que la nature de la droite est «déjà assez connue par les éléments de géométrie»<sup>8</sup> et passe immédiatement à l'étude des courbes du 2<sup>e</sup> degré. La droite ou le plan sont des figures trop simples pour retenir l'attention des géomètres. Cette situation va cependant évoluer à la fin du 18<sup>e</sup> siècle avec tout d'abord la publication d'un important mémoire de Joseph-Louis Lagrange intitulé *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires* [Lagrange, 1773]. L'auteur calcule le volume d'un tétraèdre en fonction des coordonnées de ses sommets. Il calcule aussi les coordonnées du centre ainsi que le rayon des sphères inscrite et circonscrite au tétraèdre. Il détermine également les coordonnées de son centre de gravité. Dans son mémoire, Lagrange revendique des «solutions purement analytiques qui peuvent même être entendues sans figures.»<sup>9</sup> Il introduit une série de notations dans lesquelles le lecteur moderne reconnaît le produit scalaire et le produit vectoriel de deux vecteurs ainsi que le produit mixte ou déterminant de trois vecteurs<sup>10</sup>. Lagrange utilise systématiquement la formule donnant la distance de deux points dans l'espace, formule rarement utilisée jusque-là. Il établit et utilise aussi la formule donnant la distance d'un point à un plan. A la même époque, Gaspard Monge est amené à résoudre des problèmes analogues. Dans un mémoire sur les développées rédigé en 1771 mais publié seulement en 1785, il doit d'abord résoudre les deux problèmes de géométrie analytique suivants: 1<sup>o</sup> trouver l'équation d'un plan passant par un point donné et perpendiculaire à une droite donnée par ses deux équations et 2<sup>o</sup> trouver les équations d'une droite menée d'un point donné perpendiculairement à une droite donnée. Ces problèmes n'avaient pas été traités jusque-là<sup>11</sup>. En 1794, Monge participe à la création de l'Ecole Polytechnique. Il y enseigne en 1795 la géométrie descriptive et l'application de l'analyse à la géométrie. Ses cours exerceront une influence déterminante sur une génération de mathématiciens et donneront en particulier naissance à une série de manuels de géométrie analytique publiés en France au début du 19<sup>e</sup> siècle. Ils peuvent être considérés comme les premiers manuels modernes. Avant de les examiner, il convient de présenter plus en détail les résultats présentés à ses élèves par Monge.

<sup>6</sup> Le terme généralement utilisé à cette époque est «application de l'analyse à la géométrie». L'appellation «géométrie analytique» n'apparaît qu'au début du 19<sup>e</sup> siècle (cf. 2<sup>e</sup> partie de l'article).

<sup>7</sup> Cf. [Boyer, 1956, chapitre VII]

<sup>8</sup> [Euler, 1748-1797, 39]

<sup>9</sup> [Lagrange, 1773-1869, 661]

<sup>10</sup> Lagrange établit en particulier l'identité qui porte aujourd'hui son nom. Dans le langage vectoriel, elle s'exprime sous la forme  $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2$ .

<sup>11</sup> Ces renseignements sont tirés de [Taton, 1951, 115].

## L'enseignement de Monge

Dans le cadre de son cours d'application de l'analyse à la géométrie de 1795, Monge rédige ses *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie* [Monge, 1795]. Il s'agit d'un résumé de ses leçons. Ces feuilles connaîtront une deuxième édition en 1801<sup>12</sup>. Les quatorze premières pages constituent le premier exposé systématique de la géométrie analytique de la droite et du plan. Le premier paragraphe est consacré à l'équation de la droite dans le plan. Monge écrit sans préambule:

« En nommant  $x$  et  $z$  les coordonnées rectangulaires, l'équation d'une droite considérée sur un plan est  $x = az + b$ , dans laquelle  $b$  est la valeur de l'ordonnée  $x$  qui correspond à l'origine, et  $a$  est la tangente de l'angle que la droite fait avec l'axe des  $z$ . » [Monge, 1801, no1]

Ces premières lignes témoignent de la concision qui caractérise l'exposé de Monge. La définition des coordonnées et la question de leur signe ne font l'objet d'aucune discussion. Ces notions sont claires. Monge ne juge non plus pas nécessaire d'expliquer pourquoi l'équation d'une droite est du 1<sup>er</sup> degré et démontre immédiatement que si deux droites d'équation  $x = az + b$  et  $x = a'z + b'$  sont perpendiculaires, on a  $aa' + 1 = 0$ . Sa justification revient à dire que les angles directeurs  $\alpha$  et  $\alpha'$  diffèrent de  $\frac{\pi}{2}$  et que l'on a alors  $a' = \tan(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\cot(\alpha) = -\frac{1}{a}$ .

Monge ne poursuit pas davantage l'étude de la géométrie analytique dans le plan et passe à l'espace. Ses raisonnements ne comportent pas de figures et font à plusieurs reprises appel au point de vue de la géométrie descriptive. Dans son livre *Géométrie descriptive* [Monge, 1799], il relève à ce propos que la géométrie descriptive et l'algèbre «ont les rapports les plus intimes et qu'il n'y a aucune construction de géométrie descriptive qui ne puisse être traduite en analyse.» Il ajoute que ces deux sciences devraient être «cultivées ensemble.»<sup>13</sup>

Monge considère qu'une droite de l'espace est déterminée par ses deux projections sur les plans de coordonnées verticaux. Ses équations peuvent donc être mises sous la forme  $\begin{cases} x = az + b \\ y = a'z + b' \end{cases}$ . Les

équations d'une droite passant par le point  $(x', y', z')$  seront alors  $\begin{cases} x - x' = a(z - z') \\ y - y' = a'(z - z') \end{cases}$ . On constate,

en utilisant une terminologie moderne, que le vecteur  $\vec{d} = \begin{pmatrix} a \\ a' \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de la

droite. En procédant par élimination, Monge montre que les équations de la droite passant par les points  $(x', y', z')$  et  $(x'', y'', z'')$  sont  $\begin{cases} x(z' - z'') = z(x' - x'') + x''z' - x'z'' \\ y(z' - z'') = z(y' - y'') + z'y'' - z''y' \end{cases}$ . Il termine le paragraphe

consacré à la droite dans l'espace en donnant la formule permettant de calculer la distance de deux points.

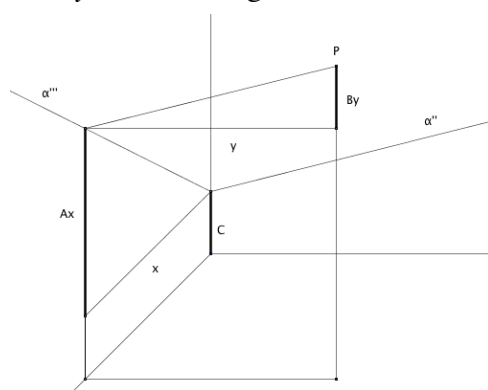
Monge établit ensuite l'équation du plan dans l'espace. Voici comment il raisonne:

<sup>12</sup> C'est sur cette édition que je me fonderai, la première étant pratiquement introuvable. Taton affirme qu'il n'y a quasiment pas de différences entre les deux éditions.

<sup>13</sup> [Monge, 1799, 16]; cet ouvrage est issu de leçons données à l'École Normale de l'an III.

« Supposons que le plan donné soit connu, 1°. par son ordonnée verticale à l'origine, ordonnée que nous représentons par  $C$  ; 2°. par les angles que ses deux traces sur les plans verticaux forment avec l'horizon; et que les tangentes de ces angles soient  $A$  pour celui qui est dans le plan des  $x, z$ , et  $B$  pour celui qui est dans le plan des  $y, z$ .

Le plan pouvant être considéré comme engendré par le mouvement d'une des traces parallèles à elle-même le long de l'autre, pour un point pris sur le plan, et correspondant aux ordonnées  $x, y$ , la verticale  $z$  sera composée de trois parties: 1°, de l'ordonnée verticale  $C$  à l'origine; 2°, de la quantité  $Ax$ , dont la trace mobile s'élève le long de l'autre, pour se transporter sur le point; 3°, de la quantité  $By$ , dont il faut s'élever sur la trace mobile pour aller de la trace fixe au point. Ainsi l'équation d'un plan est  $z = Ax + By + C$ . » [Monge, 1801, no1]



On retrouve ici la méthode de la géométrie descriptive: un plan est représenté par ses traces. L'idée de considérer une surface comme engendrée par le mouvement d'une ligne (droite ou courbe) est une autre caractéristique de la méthode de Monge<sup>14</sup>.

L'équation d'un plan passant par un point  $(x', y', z')$  est  $z - z' = A(x - x') + B(y - y')$ . Monge note que l'équation d'un plan peut être mise sous la forme générale  $Ax + By + Cz + D = 0$ . Il détermine ensuite l'équation du plan passant par trois points  $(x, y, z)$ ,  $(x', y', z')$  et  $(x'', y'', z'')$ . En procédant par élimination, il obtient les valeurs des coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  en fonction des coordonnées des trois points.

Après avoir établi les équations de la droite et du plan dans l'espace, Monge résout un certain nombre de problèmes. Il calcule d'abord les angles formés par un plan avec les plans de coordonnées puis établit un critère pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan. Son raisonnement est à nouveau issu de la géométrie descriptive. Monge utilise le fait que si une droite est perpendiculaire à un plan, les projections de cette droite sur les plans de coordonnées sont perpendiculaires aux traces du plan. Il en déduit que si les équations du plan et de la droite sont

$Ax + By + Cz + D = 0$  et  $\begin{cases} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{cases}$ , on a les égalités  $A = aC$  et  $B = bC$ . Cela revient à dire, en

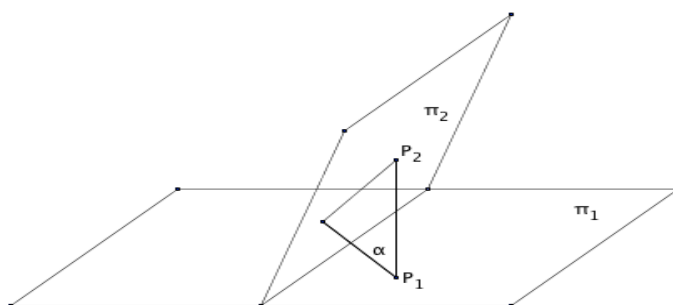
utilisant le langage vectoriel, que le vecteur directeur  $\vec{d} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$  de la droite est colinéaire au

<sup>14</sup> Cette idée est longuement développée au début de la *Géométrie descriptive* [Monge, 1799, 18-20].

vecteur  $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$  normal au plan. Ce critère lui permet d'établir les équations d'une droite  $d$

passant par un point  $P$  donné et perpendiculaire à un plan  $\pi$  donné; il peut alors calculer les coordonnées du point d'intersection  $P'$  de  $d$  et  $\pi$  et la longueur du segment  $PP'$ ; il obtient ainsi la formule connue donnant la distance d'un point à un plan. Ce critère lui permet aussi d'établir l'équation d'un plan  $\pi$  passant par un point donné  $P$  et perpendiculaire à une droite donnée  $d$ ; il peut alors calculer les coordonnées du point d'intersection  $P'$  de  $d$  et  $\pi$  et la longueur du segment  $PP'$ ; il obtient de cette manière la formule donnant la distance d'un point à une droite. Monge établit aussi un critère pour que deux droites soient concourantes et un critère pour qu'elles soient orthogonales. Grâce à ces deux critères, il obtient les équations de la droite  $p$  passant par un point donné  $P$  et perpendiculaire à une droite donnée  $d$ . Monge calcule également l'angle de deux plans. Expliquons sa méthode. Soient  $Ax + By + Cz + D = 0$  et  $A'x + B'y + C'z + D' = 0$  les équations des deux plans. Monge remarque d'abord qu'il suffit de calculer l'angle entre les plans parallèles à ces plans et passant par l'origine. Il poursuit:

« Par un point pris à volonté sur le second plan, concevons une perpendiculaire abaissée sur le premier, et du pied de cette perpendiculaire concevons-en une autre abaissée sur le second plan. Il est évident que le quotient de la seconde perpendiculaire divisée par la première, est le cosinus de l'angle formé par les deux plans. Il ne reste donc plus qu'à trouver les grandeurs des perpendiculaires.» [Monge, 1801, no2]



En utilisant la formule donnant la distance d'un point à un plan, Monge obtient la valeur du cosinus

de l'angle entre les deux plans:  $\cos(\alpha) = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$ . Il remarque que l'égalité

$AA' + BB' + CC' = 0$  exprime la condition pour que les deux plans soient perpendiculaires, résultat que nous interprétons aujourd'hui de manière vectorielle.

Monge aborde ensuite un autre problème: deux plans étant donnés, trouver les équations des projections sur les plans de coordonnées de la droite d'intersection de ces plans. Il obtient ainsi une nouvelle manière de représenter analytiquement une droite. Voici quelques détails. Soient  $Ax + By + Cz + D = 0$  et  $A'x + B'y + C'z + D' = 0$  les équations des deux plans. Si l'on élimine  $z$ , on obtient  $(AC' - A'C)x + (BC' - B'C)y + (DC' - D'C) = 0$ . C'est l'équation de la projection de la droite sur le plan  $Oxy$ . On obtient de la même manière les équations des projections de cette droite sur les plans  $Oyz$  et  $Oxz$ . Monge introduit les notations suivantes:  $BC' - B'C = l$ ,  $CA' - C'A = m$ ,  $AB' - A'B = n$ ,  $DA' - D'A = \lambda$ ,  $DB' - D'B = \mu$  et  $DC' - D'C = \nu$ . Les équations des projections de

la droite sur les différents plans de coordonnées prennent la forme suivante:  $ly - mx + v = 0$ ,  $mz - ny + \lambda = 0$  et  $nx - lz + \mu = 0$ . Les six constantes  $l$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $v$  sont déterminées à proportionnalité près et satisfont à la relation  $l\lambda + m\mu + nv = 0$ <sup>15</sup>. Seules quatre d'entre elles sont donc nécessaires. Monge juge que c'est «sous cette forme générale qu'il est le plus avantageux de mettre les équations d'une ligne donnée dans l'espace.»<sup>16</sup>

Le critère de perpendicularité entre un plan et une droite montre que le plan passant par l'origine et perpendiculaire à la droite a comme équation  $lx + my + nz = 0$ . L'angle de deux droites étant égal à l'angle formé par deux plans passant par l'origine et perpendiculaires à ces droites, le cosinus de cet

angle est égal à  $\frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}}$ ; les deux droites sont donc orthogonales si et

seulement si  $ll' + mm' + nn' = 0$ . Monge calcule de la même manière l'angle d'une droite et d'un plan. Il termine son exposé en calculant la plus courte distance de deux droites et en établissant l'équation de la perpendiculaire commune à deux droites. Expliquons brièvement sa méthode. Il fait passer par les deux droites deux plans parallèles. Il calcule ensuite la distance de l'origine à chacun de ces plans. La différence de ces distances est égale à la distance des deux droites. Elle s'exprime à partir des six coefficients de chaque droite. La recherche de la perpendiculaire commune aux deux droites s'effectue en résolvant un système de cinq équations à six inconnues. La première est l'équation  $l\lambda + m\mu + nv = 0$  liant les coefficients de la droite inconnue. Les quatre autres équations expriment que cette droite est orthogonale aux deux droites données et en même temps sécante.

<sup>15</sup> On vérifie facilement que  $l$ ,  $m$  et  $n$  sont les composantes d'un vecteur directeur de la droite.

<sup>16</sup> [Monge, 1801, no2]

**Bibliographie**

Bos Henk

2001 *Redefining Geometrical Exactness, Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*, Springer

Boyer Carl

1956 *History of analytic geometry*; réédition, Dover, New-York, 2004

Descartes René

1637 *La Géométrie; Œuvres de Descartes*, vol.6, 367-485, Vrin, Paris, 1996

Euler Leonhard

1748 *Introductio in Analysin infinitorum*, Lausanne; traduction française, Barrois, Paris, 1797

Fermat Pierre de

1679 *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge; Œuvres de Fermat*, vol.1, 91-103, Gauthier-Villars, Paris, 1891

Lagrange Joseph-Louis

1773 Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires, *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres*, Berlin, 149-176; *Oeuvres*, vol.3, 662-692, Paris, 1869

Monge Gaspard

1795 *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie*; 2<sup>e</sup> édition, Baudoin, Paris, 18011799 *Géométrie descriptive, Leçons données aux Ecoles Normales, l'an 3 de la République*, Baudoin, Paris; réédition, Jacques Gabay, 1989

Taton René

1952 *L'œuvre scientifique de Monge*, Presses universitaires de France, Paris