

Les origines de notre enseignement de la géométrie analytique

Jean-Daniel Voelke, Gymnase Auguste Piccard, Lausanne

2^{ème} partie¹

Le traité de Lacroix

Le texte de Monge est concis et traite essentiellement de géométrie analytique dans l'espace. Il appartiendra à ses élèves de diffuser sa méthode et de développer dans le même esprit la géométrie analytique plane en commençant par les figures les plus simples: la droite et le cercle. Sylvestre Lacroix est le premier à effectuer ce travail dans son *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'algèbre à la géométrie* [Lacroix, 1798]². Les deux premiers chapitres sont consacrés à la trigonométrie; l'application de l'algèbre à la géométrie fait l'objet du troisième chapitre. Ce dernier est loin d'être homogène. Lacroix mélange en effet des problèmes issus de la tradition cartésienne comme la construction des solutions d'une équation du 2^e degré avec des problèmes et des techniques de résolution dus à Lagrange et Monge. Il serait vain de vouloir présenter de manière exhaustive le contenu des 140 pages de ce chapitre et je me concentrerai sur les aspects les plus en rapport avec l'enseignement gymnasial actuel.

Lacroix commence par quelques considérations générales sur l'application de l'algèbre à la géométrie. Il insiste sur le mouvement de va-et-vient entre l'algèbre et la géométrie qui caractérise cette discipline: elle consiste d'une part à rechercher les «propriétés de l'étendue» au moyen des procédés algébriques et d'autre part à représenter une «expression algébrique quelconque» par ces propriétés. Lacroix montre ensuite que c'est l'introduction de coordonnées qui permet de caractériser une courbe par une équation algébrique. Il donne deux exemples: les points d'une droite passant par l'origine satisfont à une équation de la forme $y = ax$ et les points d'un cercle centré à l'origine à une équation de la forme $x^2 + y^2 = r^2$. Il est donc possible d'exprimer analytiquement les propriétés d'une courbe par une équation. Mais on peut procéder inversement:

« Réciproquement, une équation quelconque, considérée en elle-même, donne aussi naissance à une courbe dont elle fait connaître les propriétés. Ce dernier point de vue étant le plus général, et le plus fécond, c'est désormais de la considération des équations que nous déduirons les lignes.» [Lacroix, 1798, 74]

¹ La première partie de cet article a été publiée dans le précédent numéro du *Bulletin*. L'intégralité de l'article est disponible à l'adresse www.sspmp.ch/crm/article.

² Cet ouvrage a connu de nombreuses rééditions durant la première partie du 19^e siècle. Lacroix avait auparavant publié son *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* [Lacroix, 1797], ouvrage également régulièrement réédité et dont quelques pages sont déjà consacrées à l'équation de la droite dans le plan. C'est dans la préface de cet ouvrage qu'on rencontre probablement pour la première fois l'appellation «géométrie analytique». Lacroix écrit en effet: « En écartant avec soin toutes les constructions géométriques, j'ai voulu faire sentir au Lecteur qu'il existait une manière d'envisager la Géométrie, qu'on pourrait appeler *Géométrie analytique*, et qui consisterait à déduire les propriétés de l'étendue du plus petit nombre possible de principes, et par des méthodes purement analytiques, [...]» [Lacroix, 1797, xxv] C'est le point de vue déjà défendu par Lagrange dans son mémoire sur les pyramides triangulaires.

C'est le point de vue développé par Fermat au début de son mémoire. Lacroix l'applique immédiatement à l'équation la plus simple, $y = ax + b$, et démontre qu'elle représente une droite. Il calcule les coordonnées des points d'intersection de la droite avec les axes de coordonnées et discute du signe des coordonnées x et y suivant la position du point sur la droite. Il explique pourquoi les abscisses et les ordonnées négatives doivent être prises du côté opposé par rapport aux abscisses et ordonnées positives. L'attention accordée à la question des signes montre que celle-ci était peut-être encore problématique pour certains lecteurs. Remarquons à ce propos que Lacroix conserve l'habitude ancienne de noter $-x$ une abscisse négative.

Lacroix donne ensuite l'équation d'une droite passant par deux points ainsi que la formule de la distance de deux points dans le plan. Il donne aussi le critère de perpendicularité de deux droites déjà énoncé par Monge. Reprenant la méthode de ce dernier, il établit la formule de la distance d'un point P à une droite d en calculant la distance de P à sa projection P' sur d . Il ne se préoccupe pas du signe de l'expression obtenue³. Cette formule lui permet de calculer l'angle de deux droites. Sa méthode est semblable à celle utilisée par Monge pour calculer l'angle de deux plans. Lacroix considère des parallèles aux deux droites passant par l'origine A . Les équations de ces droites sont $y = ax$ et $y = a'x$. Soit $M'(\alpha; \beta)$ un point sur la seconde droite. La distance de ce point à la première droite est $\frac{\beta - a\alpha}{\sqrt{1 + a^2}}$. Soient M la projection de

M' sur la première droite et r la longueur AM' . On a $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$ et $\beta = a'\alpha$. Lacroix en déduit l'égalité $\sin(MAM') = \frac{a' - a}{\sqrt{1 + a^2} \sqrt{1 + a'^2}}$, d'où $\cos(MAM') = \frac{1 + aa'}{\sqrt{1 + a^2} \sqrt{1 + a'^2}}$ et enfin

$\tan(MAM') = \frac{a' - a}{1 + aa'}$. Au terme de ces calculs, Lacroix remarque que la dernière égalité

aurait pu être déduite immédiatement de la formule $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$ établie au

début du manuel, dans le chapitre consacré à la trigonométrie. Il écrit à ce propos:

« Mais cette formule repose sur celles du n° 11, que nous avons obtenues par le moyen d'une construction, et nous nous sommes proposés de tirer des seules équations des lignes tout ce qui est nécessaire pour l'application de l'algèbre à la géométrie. » [Lacroix, 1798, 81]

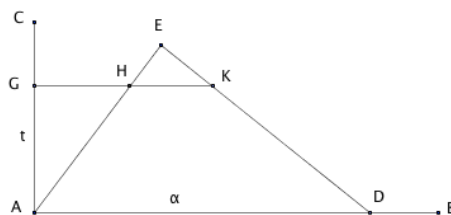
Les formules auxquelles Lacroix fait allusion sont celles donnant le sinus et le cosinus d'une somme ou d'une différence de deux angles. Afin d'établir celles-ci, Lacroix doit effectivement introduire des triangles rectangles et, par conséquent, tracer des droites et construire des perpendiculaires. Cette démarche n'est, selon lui, pas compatible avec l'idéal de pureté analytique revendiqué en particulier dans la préface de son *Traité du calcul différentiel et intégral* (cf. note 2).

Après avoir exposé ces différents résultats, Lacroix passe à des exemples. Voici le premier:

« Deux lignes droites, AE et DE , étant données par les angles qu'elles font avec une troisième AB , et par la partie AD qu'elles interceptent sur cette troisième, trouver sur une

³ Lagrange et Monge ne se préoccupaient pas non plus du signe en calculant la distance d'un point à un plan. Cette question est discutée plus loin lorsque Lacroix calcule le rayon du cercle inscrit à un triangle.

ligne AC , perpendiculaire à AB , un point G , par lequel, menant une droite GK , parallèle à AB , la partie HK , comprise entre AE et DE , soit d'une grandeur donnée.» [Lacroix, 1798, 84-85]



La droite AB est l'axe des abscisses et A est l'origine. Lacroix note α la longueur AD , a la tangente de l'angle EAD , a' la tangente de l'angle EDA et t la longueur AG . Les équations des droites AE et DE sont $y = ax$ et $y = -a'(x - \alpha)$. Comme les points H et K ont une ordonnée égale à t , l'abscisse de H est égale à $\frac{t}{a}$ et celle de K à $\frac{\alpha a' - t}{a'}$. Comme la

longueur HK doit être égale à une longueur m donnée, on a $t = \frac{(\alpha - m)aa'}{a + a'}$.

L'intérêt de ce problème ne réside pas dans son énoncé mais dans la manière dont il est résolu. Le raisonnement n'est pas fondé sur la considération de triangles semblables mais est entièrement analytique. Lacroix écrit les équations des différentes droites et calcule les coordonnées des points d'intersection comme nous le faisons aujourd'hui. Il ne lui suffit cependant pas d'obtenir la valeur numérique de t . Il doit encore, conformément à la tradition cartésienne, construire la ligne AG à partir des lignes AE , DE , AD et HK . Après avoir donné la solution, Lacroix propose encore une autre résolution du problème, fondée sur la considération de triangles semblables. En dépit de ce qu'il a affirmé précédemment, Lacroix ne paraît pas entièrement satisfait par la méthode purement analytique. A côté de la nouvelle méthode, il se sent obligé de donner également l'ancienne.

Lacroix entreprend ensuite d'appliquer les formules trouvées pour la ligne droite à la recherche des principales propriétés des triangles. Il s'inspire de près des méthodes utilisées par Lagrange dans son mémoire sur les pyramides triangulaires. Lacroix considère un triangle AMM' dont le sommet A est l'origine. Les deux autres points sont $M(\alpha; \beta)$ et $M'(\alpha'; \beta')$.

Les équations des droites AM et AM' sont donc $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ et $y = \frac{\beta'}{\alpha'}x$. En utilisant la formule

du cosinus de l'angle de deux droites, il démontre que $\cos(MAM') = \frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2cc'}$ où c , c' et c'' sont les longueurs des côtés du triangle. En calculant la distance de A à la droite MM' , il

obtient la valeur de l'aire du triangle AMM' : $\frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{2}$. On reconnaît dans cette expression

un déterminant⁴. Lacroix calcule ensuite comme Lagrange les coordonnées du centre ainsi que le rayon du cercle circonscrit au triangle. Sa méthode repose uniquement sur la formule de la distance de deux points. Il calcule aussi le rayon du cercle inscrit.

⁴ Lacroix ne se préoccupe à nouveau pas du signe.

Examinons pour terminer comment Lacroix détermine les points d'intersection d'une droite et d'un cercle. C'est la partie la plus originale de son exposé. Il démontre d'abord que les coordonnées d'un point P quelconque de la droite d d'équation $y - \beta = a(x - \alpha)$ peuvent être

mises sous la forme $x = \alpha + \frac{z}{\sqrt{1+a^2}}$, $y = \beta + \frac{az}{\sqrt{1+a^2}}$ où z est la distance entre le point P et

le point $E(\alpha; \beta)$ de la droite⁵. Lacroix donne donc des équations paramétriques de d . Si l'on veut trouver les points d'intersection M et M' de la droite d avec le cercle $x^2 + y^2 = r^2$, il

faut résoudre l'équation $z^2 + \frac{2(\alpha + \beta a)}{\sqrt{1+a^2}}z + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$. Comme le produit des racines est

constant, le produit des segments EM et EM' ne dépend pas de la droite d passant par E ; c'est le théorème du produit constant. Lacroix suppose que le point E est sur l'axe des

abscisses. On a donc $\beta = 0$ et $MM' = EM' - EM = \frac{2\sqrt{r^2(1+a^2) - a^2\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}}$. Si $MM' = 0$, la droite

est tangente en un point N et $a = \frac{r}{\sqrt{\alpha^2 - r^2}}$. Lacroix obtient ainsi la tangente trigonométrique

de l'angle entre la tangente EN au cercle issue de E et l'axe des abscisses. Il a donc résolu algébriquement le problème suivant: mener par un point pris hors d'un cercle une tangente à ce cercle. Il montre ensuite comment déterminer une tangente en un point $N(\alpha; \beta)$ du cercle

$x^2 + y^2 = r^2$ centré à l'origine A . On a $\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$ et la longueur d'une sécante comprise dans le cercle est égale à $\frac{2(\alpha + \beta a)}{\sqrt{1+a^2}}$. Pour qu'elle soit tangente, il faut que $\alpha + \beta a = 0$ ou

$a = -\frac{\alpha}{\beta}$. La droite est alors perpendiculaire au rayon AN . Ce résultat conclut la partie

consacrée aux problèmes d'intersection d'un cercle et d'une droite. La suite du chapitre est consacrée à la construction de diverses expressions algébriques et en particulier à la construction des solutions d'une équation du 2^e degré; ce type de problèmes a joué un rôle important dans la tradition cartésienne mais a disparu depuis longtemps de nos manuels. La présence de ces problèmes montre encore une fois que Lacroix se situe au carrefour entre deux traditions. Relevons enfin que la fin du chapitre est consacrée aux courbes du 2^e degré. Il s'agit de l'un des principaux sujets traités dans les ouvrages de géométrie analytique dès la naissance de cette discipline. Je ne l'aborderai cependant pas ici car il n'occupe actuellement plus qu'une place restreinte dans notre enseignement.

Les disciples de Monge et Lacroix

Après les leçons de Monge, l'ouvrage de Lacroix donne une nouvelle impulsion à l'enseignement de la géométrie analytique. Il sera rapidement suivi par plusieurs manuels

⁵ Lacroix ne relève pas que la distance z doit être munie d'un signe.

rédigés dans le même esprit. Ceux-ci traitent de la droite et du cercle puis des courbes du 2^e degré. Certains d'entre eux traitent aussi de géométrie analytique dans l'espace. Mentionnons tout d'abord le *Traité analytique des courbes et des surfaces du second degré* de Jean-Baptiste Biot [Biot, 1802]. Comme celui de Lacroix, ce manuel a été régulièrement réédité et traduit⁶. Le contenu est directement inspiré de Lacroix pour le plan et de Monge pour l'espace. Citons ensuite *l'Essai sur la ligne droite et les courbes du second degré* de Frédéric Louis Lefrançois [Lefrançois, 1801]⁷. Ce traité est succinct et se limite à la géométrie plane. A la différence de Lacroix, l'influence cartésienne y est pratiquement absente. Lefrançois présente pour la première fois plusieurs résultats figurant en bonne place dans nos manuels. Il établit ainsi les équations des bissectrices de deux droites d'équation $y = ax$ et $y = a'x$. Sa méthode repose sur le fait que les bissectrices divisent en deux les angles formés par ces deux droites. En utilisant la formule donnant la tangente de l'angle de deux droites, il montre ainsi que les équations des deux bissectrices sont de la forme $y = Ax$ où A est solution de l'équation $A^2 - 2 \frac{aa' - 1}{a + a'} A - 1 = 0$. Lefrançois démontre aussi analytiquement que les médianes et les médiatrices d'un triangle sont concourantes. Dans la seconde édition de son livre, il démontre qu'il en est de même pour les hauteurs et que le point de concours des médianes, celui des hauteurs et celui des médiatrices sont alignés. Il établit aussi analytiquement plusieurs résultats faisant intervenir des cercles. Il détermine en particulier l'équation de la droite d'intersection de deux cercles et démontre que si trois cercles se coupent deux à deux, les trois droites d'intersection sont concourantes⁸. Un autre ouvrage significatif et contemporain est le *Recueil de diverses propositions de géométrie résolues ou démontrées par l'analyse algébrique, suivant les principes de Monge et Lacroix* de Louis Puissant [Puissant, 1801]. Il ne s'agit pas d'un manuel mais, comme le titre l'indique, d'un recueil de problèmes résolus par la méthode analytique. Un grand nombre de ces problèmes font intervenir des droites et des cercles. Il est important de noter que Lefrançois et Puissant insistent sur la nouveauté de la méthode utilisée pour résoudre ces problèmes. Lefrançois écrit ainsi qu'il s'agit de «traiter les questions proposées par les seuls moyens que fournit l'Analyse, en ne tirant de la Géométrie que ce qui est absolument indispensable pour l'expression des conditions de chaque problème.»⁹ Parmi les autres ouvrages rédigés dans le même esprit, mentionnons encore les *Eléments de géométrie analytique* de Jean-Guillaume Garnier [Garnier, 1808]. Garnier établit en particulier un critère général pour que trois droites soient concourantes et donne pour la première fois une démonstration analytique du théorème des bissectrices d'un triangle.

Ces différents exemples montrent que la matière enseignée aujourd'hui au niveau gymnasial apparaît pour l'essentiel dans les manuels et recueils de problèmes rédigés par les disciples de

⁶ Dès sa 2^e édition de 1805, il portera le titre *Essai de géométrie analytique appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre*.

⁷ Une seconde édition revue et augmentée sera publiée en 1804 sous le titre *Essais de géométrie analytique*. Comme dans le cas de Biot, le changement de titre montre que l'appellation «géométrie analytique», suggérée par Lacroix, tend à remplacer l'appellation «application de l'algèbre à la géométrie».

⁸ On reconnaît ici le théorème énonçant que les axes radicaux de trois cercles pris deux à deux sont concourants. Les notions d'axe radical et de centre radical seront étudiées quelques années plus tard de manière systématique par Louis Gaultier de Tours [Gaultier de Tours, 1812].

⁹ [Lefrançois, 1804, v]

Monge et Lacroix entre 1800 et 1810. Certains raisonnements seront simplifiés par leurs successeurs¹⁰, mais la principale différence entre les manuels de cette époque et les nôtres est l'utilisation du langage vectoriel. Le calcul vectoriel ne sera cependant formalisé qu'à la fin du 19^e siècle. Il sera d'abord utilisé principalement en physique et son introduction dans l'enseignement de la géométrie analytique au niveau gymnasial n'aura lieu qu'au début des années 1950¹¹. Mais il s'agit là d'une autre histoire.

Bibliographie

Biot Jean-Baptiste

1802 *Traité analytique des courbes et des surfaces du second degré*, Duprat, Paris; 2^e édition sous le titre *Essai de géométrie analytique appliqué aux courbes et aux surfaces du second ordre*, Paris, 1805

Garnier Jean-Guillaume

1808 *Elémens de Géométrie analytique*, Courcier, Paris

Gaultier de Tours Louis

1812 Mémoire sur les Moyens généraux de construire graphiquement un Cercle déterminé par trois conditions, et une Sphère déterminée par quatre conditions, *Journal de l'Ecole polytechnique*, 16^e cahier, 124-214

Grimm G. und Rueff M.

1952 *Analytische Geometrie*, Orell Füssli, Zürich

Lacroix Sylvestre

1797 *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, Duprat, Paris

1798 *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'algèbre à la géométrie*, Duprat, Paris

Lefrançois Frédéric Louis

1801 *Essais sur la ligne droite et les courbes du second degré*, Duprat, Paris; 2^e édition sous le titre *Essais de géométrie analytique*, Courcier, Paris, 1804

Plücker Julius

1828 *Analytisch-geometrische Entwicklungen*, erster Band, Baedeker, Essen

Puissant Louis

1801 *Recueil de diverses propositions de géométrie, résolues ou démontrées par l'analyse algébrique, suivant les principes de Monge et Lacroix*, Duprat, Paris

¹⁰ Le cas des bissectrices offre un intéressant exemple de simplification. Dans le premier tome de son livre *Analytisch-geometrische Entwicklungen* [Plücker, 1828], ouvrage offrant une synthèse des résultats établis par Lacroix et ses successeurs, Plücker établit les équations des bissectrices de deux droites en utilisant, comme nous le faisons aujourd'hui, la formule de la distance d'un point à une droite. Il en déduit alors immédiatement le théorème des bissectrices dans un triangle. Garnier avait pour sa part consacré cinq pages de calcul à ce problème en écrivant d'abord les équations des bissectrices selon la méthode de Lefrançois puis en calculant les coordonnées des points d'intersection de ces droites deux à deux.

¹¹ L'ouvrage *Analytische Geometrie* [Grimm et Rueff, 1951] publié par la *Société suisse des maîtres de mathématiques* est à cet égard particulièrement intéressant. La préface témoigne des discussions qui ont lieu à cette époque pour savoir s'il convient d'adopter une approche exclusivement vectorielle ou non. Les auteurs proposent une solution intermédiaire consistant à présenter simultanément le traitement analytique traditionnel et le traitement vectoriel.