Cours de formation continue de la CRM
Introduction à la logique et théorèmes de Gödel

Le cours a eu lieu à Leysin du mardi 15 au vendredi 18 septembre 2015 et était organisé par MM. Patrick Turtschy et Jean-Daniel Voelke. Il a réuni 45 participants. Onze exposés de 90 minutes chacun ont été donnés par 3 conférenciers.
L'enseignement du mardi comprenait trois modules et a été entièrement assuré par M. Jacques Duparc, professeur à la Faculté des HEC de l'Université de Lausanne et chargé de cours à l'EPFL. Les deux premiers modules ont permis de mettre en place les notions fondamentales de la logique du 1^er^ ordre. M. Duparc a commencé par traiter l'aspect syntaxique en définissant la notion de langage. Il a ensuite traité l'aspect sémantique en introduisant la notion de modèle d'un langage. Il a donné comme exemples différents modèles du langage de l'arithmétique. La notion d'évaluation d'une formule dans un modèle a été expliquée d'abord de manière classique puis à l'aide de la notion de jeu fini à deux joueurs et à information parfaite. M. Duparc a poursuivi en abordant la théorie de la démonstration à partir de la méthode de démonstration naturelle de Gentzen. Il a donné plusieurs exemples de démonstrations de formules et a mis en évidence la différence entre logique classique et logique intuitionniste. Il a conclu avec le théorème de complétude de la logique du 1^er^ ordre, dont il a expliqué la signification.
Le troisième module était indépendant des précédents et avait comme titre «Le Paradis de Cantor». M. Duparc a commencé par redémontrer deux résultats bien connus : il n'y a pas de bijection entre un ensemble A et l'ensemble de ses parties $P(A)$ et il n'y a pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. Les preuves sont fondées sur un raisonnement «diagonal». Il a ensuite établi le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein[1] en s'aidant d'une comparaison avec des spectateurs cherchant leur place dans un théâtre. La seconde partie du module était consacrée aux notions d'ensemble bien ordonné et d'ordinal. M. Duparc a en particulier montré comment définir une arithmétique des nombres ordinaux au moyen d'une récurrence transfinie. Il a aussi défini la notion de cardinal d'un ensemble et expliqué la signification de l'hypothèse du continu.
Le conférencier du mercredi (deux modules) était M. Amirouche Moktefi, historien de la logique et enseignant à la Tallinn University of technology. Le titre de son exposé était «La mathématisation de la logique». Après une introduction sur la méthode en histoire des sciences, il a rappelé les caractéristiques principales de la syllogistique. Il a ensuite montré comment Euler avait utilisé des diagrammes pour résoudre des problèmes faisant intervenir des syllogismes. Ces diagrammes sont ceux que nous utilisons encore aujourd'hui dans notre enseignement. Leur usage peut dans certains cas poser des difficultés. M. Moktefi a expliqué comment Boole avait au milieu du 19^e^ siècle développé une algèbre de la logique permettant de transcrire les propositions en équations. A la suite de Boole, d'autres mathématiciens ont développé des systèmes allant dans le même sens. Il a aussi été question de la représentation diagrammatique inventée par Venn ; celle-ci permet de résoudre des problèmes logiques plus simplement que celle d'Euler. M. Moktefi a conclu en montrant comment Peano a effectué à la fin du 19^e^ siècle une synthèse des différentes méthodes algébriques en logique.
La journée du jeudi comprenait quatre modules. Les deux premiers, intitulés «Machines de Turing et récursivité», ont été donnés par M. Jérémie Cabessa, enseignant chercheur à l'Université de Paris 2. Il a commencé par définir une machine de Turing. Quelques vidéos ont permis de mieux comprendre le fonctionnement d'une telle machine. Lorsqu'un input u est soumis à une machine de Turing M, trois situations peuvent se produire : M peut accepter u, le rejeter ou tourner en boucle. Ces différentes situations amènent à introduire les concepts de langage Turing-

[1] Ce théorème s'énonce comme suit : soient A et B deux ensembles ; s'il existe une injection de A dans B et une injection de B dans A, il existe alors une bijection de A dans B.

reconnaissable (récursivement énumérable) et de langage Turing-décidable (récursif). M. Cabessa a poursuivi en expliquant la différence entre machines déterministes et non-déterministes. Ces deux types de machines peuvent résoudre les mêmes problèmes, mais on ne sait actuellement toujours pas si les temps de résolution sont comparables ou non. Le reste de l'exposé était consacré au «problème de l'arrêt» : existe-t-il une machine de Turing H qui, étant donné le code d'une machine M de Turing et le code d'un input u, permette de décider si M s'arrête sur u ou non ? Ce problème est Turing-reconnaissable mais n'est pas Turing-décidable. Il est lié à un autre problème énoncé par Hilbert et Ackermann en 1928 et appelé «Entscheidungsproblem» : étant donné un ensemble d'hypothèses Γ et une formule φ de la logique du 1er ordre, existe-t-il une procédure effective permettant de déterminer en un temps fini si φ est prouvable à partir de Γ ? M. Cabessa a montré de manière détaillée comment ce problème peut être ramené à celui de l'arrêt et est par conséquent Turing-indécidable.

Les deux modules du jeudi après-midi étaient à nouveau confiés à M. Duparc. Le premier lui a permis de présenter plusieurs théorèmes importants de la logique du 1er ordre. Après avoir introduit la notion de théorie satisfaisable, M. Duparc a abordé le théorème de compacité de la logique. Il a donné deux démonstrations de ce résultat, l'une à partir du théorème de complétude et l'autre à partir de la notion d'ultra-produit et d'un autre théorème important, celui de Los. Il a aussi établi les deux théorèmes de Löwenheim-Skolem portant sur les cardinaux possibles pour les différents modèles d'une théorie. Le second module était principalement consacré à l'axiome du choix. M. Duparc a montré que celui-ci est équivalent au lemme de Zorn et au théorème de Zermelo. Il a présenté différentes variantes, plus ou moins fortes, de cet axiome et donné des exemples de résultats équivalents à chacune d'entre elles. Bon nombre de ces résultats font partie de la topologie. Il a enfin proposé deux utilisations amusantes de l'axiome du choix dans le cadre de jeux faisant intervenir une infinité dénombrable de joueurs.

Le cours s'est terminé le vendredi matin avec deux modules donnés par M. Duparc et consacrés aux théorèmes de limitation. Il s'agissait sans doute de la partie la plus fascinante et la plus complexe du cours. M. Duparc a d'abord introduit les notions de fonctions récursives et partielles récursives et fait le lien avec les machines de Turing. Il a ensuite défini le concept de fonction représentable et expliqué comment associer à tout terme, toute formule et toute preuve du langage de l'arithmétique un nombre entier appelé «nombre de Gödel». Une fois ces notions définies, M. Duparc a pu énoncer le premier théorème d'incomplétude de Gödel et mettre en lumière le point crucial de la preuve, fondée à nouveau sur un raisonnement diagonal. Il a terminé son exposé en expliquant les hypothèses et la signification du second théorème d'incomplétude de Gödel. Il a remis son cours de l'EPFL aux auditeurs souhaitant étudier les détails techniques des preuves.

Au terme de ce cours, les participants se sont déclarés très satisfaits. Ils ont pu comprendre la signification de plusieurs résultats fondamentaux de logique. Ils ont aussi apprécié l'excellente préparation et le talent pédagogique des différents intervenants.

J.D. Voelke
Membre de la CRM