Morley: „Kreisketten“ und komplexe Zahlen (2. Teil)

Peter Thurnheer, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, tpeter@math.ethz.ch

Nachdem wir im 1. Teil die geometrischen Resultate, von denen Morley ausging, und seine ersten Verallgemeinerungen formuliert haben, kommen wir im 2. Teil zu seiner in [1] entwickelten Methode, welche den Zusammenhang zwischen Geometrie und komplexen Zahlen herstellt.

Komplexe Kreiskoordinaten

Die Konjugiertkomplexe einer komplexen Zahl $z = a + ib$ bezeichen wir mit $\overline{z} = a - ib$.

Komplexe Zahlen vom Betrag 1 bezeichen wir im Folgenden mit $t, t^\star, t_0, t_1, \ldots$ etc. oder $\tau_0, \tau_1, \ldots$ und nennen sie, wie Morley, kurz Turns. Für diese und nur für diese gilt insbesondere

$$\overline{t} = \frac{1}{t}. \tag{2}$$

Die rationalen Kurven, um die es geht, werden nun nicht in reellen kartesischen Koordinaten x, y beschrieben, sondern in der komplexen Ebene $z = x + iy$ als Bilder des komplexen Einheitskreises $\mathbb{E}$ durch die entsprechenden Abbildungsgleichungen. Für Geraden geben wir schliesslich auch eine (Kreis-)Koordinatengleichung. Sprachlich identifizieren wir dabei die komplexen Zahlen mit den sie repräsentierenden Punkten in der komplexen Ebene.

Gerade

Bei gegebenem x_0 und für einen beliebigen festen Turn τ_0 beschreibt die Gleichung

$$z = z(t) = \frac{x_0 \tau_0}{\tau_0 - t} \tag{3}$$

eine Gerade in dem Sinn, dass z in der komplexen Ebene die Mittelnormale der Strecke zwischen 0 und x_0 durchläuft, wenn t auf dem Einheitskreis $\mathbb{E}$ variiert.
Dies folgt wegen $|z| \to \infty, t \to \tau_0$ daraus, dass — wie man sofort sieht — für jeden Turn $t \neq \tau_0$ gilt $|z| = |z - x_0|$. Man kann auch abbildungsgeometrisch argumentieren: Die zu diskutierende Kurve ist das Bild von $\mathbb{E}$ unter der komplexen Inversion $z(w) = \frac{x_0 \tau_0}{\tau_0 - w}$.
Eine solche bildet Möbiuskreise — hier $\mathbb{E}$ — auf Möbiuskreise — hier offensichtlich eine Gerade — ab. Dabei gehen zur Ausgangskurve inverse Punkte — wie hier 0 und ∞ — in zum Bild inverse Punkte über — hier sind dies dann x_0 und 0.

Ueber den Turn τ_0 können wir frei verfügen und wählen $\tau_0 = \frac{\overline{x}_0}{x_0}$.
Mit (2) lautet die zu (3) konjugierte Gleichung

$$\overline{z}(t) = \frac{\overline{x}_0 t}{t - \tau_0}.$$

Bei gegebenem x_0 liegt der Punkt z somit auf der Mittelnormalen der Strecke zwischen 0 und x_0 dann und nur dann, wenn gilt

$$\frac{z}{x_0} + \frac{\overline{z}}{\overline{x}_0} = 1. \tag{4}$$

In diesem Sinn ist (4) die Koordinatengleichung der Geraden. In der Form, in der wir dies später brauchen:
Bei gegebenem x_0 beschreibt die Gleichung

$$z\tau_0 + \overline{z} = x_0\tau_0 \qquad \textit{mit } \tau_0 = \frac{\overline{x}_0}{x_0}$$

eine Gerade. Wir bezeichnen diese ebenfalls mit x_0.

Im Folgenden bezeichnen wir die Geraden einer (n)–Konfiguration stets mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und die sie definierenden Turns mit $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$.

Kreis

Offensichtlich gilt
Bei gegebenen a und b, beschreibt die Gleichung

$$z = z(t) = a + bt, \quad t \in \mathbb{E},$$

den Kreis mit Zentrum a und Radius $|b|$.

Limaçon Kurve

Bei gegebenen a, b, c beschreibt die Gleichung

$$z = z(t) = a + bt + ct^2, \quad t \in \mathbb{E},$$

eine Limaçon Kurve.

Beweis.
Sei $t = t_0\widetilde{t}$ mit einem allgemeinen Turn $\widetilde{t}$ und dem festen Turn t_0, für den gilt

$$\arg t_0 = \arg b - \arg c.$$

Dann ist $\frac{b}{ct_0} = k$ reell, und die zu diskutierende Gleichung lautet

$$z(\widetilde{t}) = a + ct_0^2(k\widetilde{t} + \widetilde{t}^2), \quad \widetilde{t} \in \mathbb{E}, k \in \mathbb{R}.$$

Eine Variation der Konstanten a, respektive ct_0^2 unterwirft die Kurve einer Translation, respektive einer Drehstreckung. Es genügt eine Gleichung folgender Form zu studieren:

$$z(t) - 1 = kt + t^2, \quad t \in \mathbb{E}, k \in \mathbb{R}.$$

Mit $t = \cos\varphi + i\sin\varphi$ wird

$$\begin{aligned} z(t) - 1 &= k\cos\varphi + ik\sin\varphi + \cos^2\varphi + 2i\sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi, \\ z(t) &= k\cos\varphi + 2\cos^2\varphi + i(k\sin\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi). \end{aligned}$$

Im (x, y)–Koordinatensystem, $x = \mathrm{Re}(z), y = \mathrm{Im}(z)$, erhält man für die Kurve damit eine Parameterdarstellung der Form (1), (s. Teil 1). $\square$

Schnittpunkt

Der Schnittpunkt der Geraden x_1, x_2:

$$z\tau_1 - \overline{z} = x_1\tau_1$$
$$z\tau_2 - \overline{z} = x_2\tau_2$$

ist der Punkt

$$z_{1,2} = \frac{x_1\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} + \frac{x_2\tau_2}{\tau_2 - \tau_1}. \tag{5}$$

Man sieht dies sofort, indem man $\overline{z}$ aus den Geradengleichungen eliminiert.

Notation

Für Folgen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ werden wir kurz schreiben

$$\frac{x_1\tau_1^\alpha}{(\tau_1-\tau_2)(\tau_1-\tau_3)\cdots(\tau_1-\tau_n)} + \frac{x_2\tau_2^\alpha}{(\tau_2-\tau_3)(\tau_2-\tau_4)\cdots(\tau_2-\tau_1)} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{x_n\tau_n^\alpha}{(\tau_n-\tau_1)(\tau_n-\tau_2)\cdots(\tau_n-\tau_{n-1})} = \sum\nolimits^\star \frac{x_1\tau_1^\alpha}{(\tau_1-\tau_2)\cdots(\tau_1-\tau_n)}.$$

Charakteristische Konstanten

Definition. *Die charakteristischen Konstanten einer (n)–Konfiguration sind die Grössen*

$$a_m = a_{n,m} = \sum\nolimits^\star \frac{x_1\tau_1^{n-m}}{(\tau_1-\tau_2)\cdots(\tau_1-\tau_n)}, \qquad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Den ersten Index schreiben wir nur, wenn dies wirklich nötig scheint.

Die folgenden Eigenschaften (7), (8) und (9) sind fundamental für den Beweis der Sätze! Auf ihnen beruhen die Sätze überhaupt.

Mit $s_k = \tau_1\tau_2\cdots\tau_k$ gilt

$$\overline{a}_{k,m} = (-1)^{k-1} s_k a_{k,k+1-m}, \qquad m = 1, 2, \ldots, k, \tag{7}$$

und damit

$$|a_{k,m}| = |a_{k,k+1-m}|, \qquad m = 1, 2, \ldots, k. \tag{8}$$

Beweis.
Mit (2) und (6) ist, wenn man noch beachtet, dass gilt $\overline{x}_j = x_j\tau_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$:

$$\overline{a}_{k,m} = \sum\nolimits^\star \frac{\overline{x}_1\tau_1^{m-k}}{\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right)\cdots\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_k}\right)} = \sum\nolimits^\star \frac{\overline{x}_1\tau_1^{m-k}}{\frac{\tau_2-\tau_1}{\tau_1\tau_2}\cdots\frac{\tau_k-\tau_1}{\tau_1\tau_k}}$$
$$= (-1)^{k-1}\tau_1\tau_2\cdots\tau_k \sum\nolimits^\star \frac{x_1\tau_1\tau_1^{k-2}\tau_1^{m-k}}{(\tau_1-\tau_2)\cdots(\tau_1-\tau_k)} = (-1)^{k-1} s_k a_{k,k+1-m}.$$

Wegen $|s_k| = 1$ folgt daraus unmittelbar (8). □

Entfernt man aus einer (n)–Konfiguration eine Gerade x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, so erhält man eine $(n-1)$–Konfiguration mit den charakteristischen Konstanten

$$a_{n-1,m} = a_{n,m} - a_{n,m+1}\tau_j, \quad m = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{9}$$

Beweis.
Es ist offensichtlich, dass es genügt die Beziehungen für $j = 1$ und $m = 1$ zu zeigen.

$$\begin{aligned} a_{n,1} - a_{n,2}\tau_1 = & \frac{x_1\tau_1^{n-1}}{(\tau_1-\tau_2)(\tau_1-\tau_3)\cdots(\tau_1-\tau_n)} \\ & \quad + \frac{x_2\tau_2^{n-1}}{(\tau_2-\tau_3)(\tau_2-\tau_4)\cdots(\tau_2-\tau_1)} + \cdots + \frac{x_n\tau_n^{n-1}}{(\tau_n-\tau_1)(\tau_n-\tau_2)\cdots(\tau_n-\tau_{n-1})} \\ & - \frac{x_1\tau_1\tau_1^{n-2}}{(\tau_1-\tau_2)(\tau_1-\tau_3)\cdots(\tau_1-\tau_n)} \\ & \quad - \frac{x_2\tau_1\tau_2^{n-2}}{(\tau_2-\tau_3)(\tau_2-\tau_4)\cdots(\tau_2-\tau_1)} - \cdots - \frac{x_n\tau_1\tau_n^{n-2}}{(\tau_n-\tau_1)(\tau_n-\tau_2)\cdots(\tau_n-\tau_{n-1})} \\ = 0 + & \frac{x_2\tau_2^{n-2}\cancel{(\tau_2-\tau_1)}}{(\tau_2-\tau_3)(\tau_2-\tau_4)\cdots\cancel{(\tau_2-\tau_1)}} + \cdots + \frac{x_n\tau_n^{n-2}\cancel{(\tau_n-\tau_1)}}{\cancel{(\tau_n-\tau_1)}(\tau_n-\tau_2)\cdots(\tau_n-\tau_{n-1})}, \end{aligned}$$

die erste charakteristische Konstante $a_{n-1,1}$ der $(n-1)$–Konfiguration, welche x_1 nicht mehr enthält. □

Umkreis

Der Umkreis des durch die Geraden einer (3)–Konfiguration definierten Dreiecks ist der Kreis

$$z = z(t) = a_{3,1} - a_{3,2}t, \quad t \in \mathbb{E}, \tag{10}$$

mit Mittelpunkt $a_{3,1}$ und Radius $|a_{3,2}|$.

Schreibt man nämlich die Kreisgleichung mit Hilfe der Definition (6) der charakteristischen Konstanten um, so erhält sie die Form

$$z(t) = \frac{x_1\tau_1(\tau_1-t)}{(\tau_1-\tau_2)(\tau_1-\tau_3)} + \frac{x_2\tau_2(\tau_2-t)}{(\tau_2-\tau_3)(\tau_2-\tau_1)} + \frac{x_3\tau_3(\tau_3-t)}{(\tau_3-\tau_1)(\tau_3-\tau_2)}, \quad t \in \mathbb{E}.$$

Dabei sieht man unmittelbar, dass man für $t = \tau_1, \tau_2, \tau_3$ aufgrund von (5) als Kreispunkte die Schnittpunkte von je zwei der drei Geraden erhält.

Beweis der Sätze

Wichtig: Wir werden nun immer mit den charakteristischen Konstanten $a_1, a_2, \ldots$ der Konfiguration von der wir ausgehen rechnen. Entfernen wir aus dieser eine Gerade, so drücken wir die charakteristischen Konstanten der entstehenden, reduzierten Konfiguration mit Hilfe von (9) durch diejenigen der Ausgangskonfiguration aus.

Beweis Satz 1

Wir beweisen den Satz und beschreiben die Zentrumskreise, indem wir zeigen:

Der Zentrumskreis einer (k)–Konfiguration, $k \geq 3$, ist der Kreis

$$z = z(t) = a_1 - a_2 t, \quad t \in \mathbb{E}. \tag{11}$$

Beweis.
Mit *vollständiger Induktion* über die Anzahl k der Geraden in der Konfiguration.

Verankerung: Nach (10) ist der Umkreis einer (3)–Konfiguration von der Form (11).

$$\text{Der Umkreis einer (3)–Konfiguration ist der Zentrumskreis der Konfiguration.} \tag{12}$$

Induktionsvoraussetzung: Aussage (11) gilt für $k = n - 1$.

Entfernt man eine Gerade x_j aus einer (n)–Konfiguration, so erhält man eine $(n-1)$–Konfiguration. Deren Zentrumskreis ist nach Induktionsvoraussetzung, wenn man (9) beachtet, der Kreis

$$z_j(t) = a_1 - a_2(t + \tau_j) + a_3 t \tau_j, \quad t \in \mathbb{E}, \tag{13}$$

mit Zentrum $a_1 - a_2\tau_j$.

Die Zentren dieser Kreise liegen damit offensichtlich für alle $j = 1, 2, \ldots, n$ auf dem Kreis

$$z(t) = a_1 - a_2 t, \quad t \in \mathbb{E}. \tag{14}$$

Dieser Kreis ist der Zentrumskreis der (n)–Konfiguration, was zu zeigen war. □

Beweis Satz 2

Wir beweisen den Satz und beschreiben den Zentrumspunkt w, indem wir zeigen:

Die Zentrumskreise der n $(n-1)$–Konfigurationen einer (n)–Konfiguration gehen durch den Punkt

$$w = a_1 - \frac{a_2 \overline{a}_3}{\overline{a}_2}.$$

Beweis.
Zuerst zeigen wir:

$$\text{Der Quotient } t_0 = \frac{a_2}{\overline{a}_2} \cdot \frac{\overline{a}_2 \tau_j - \overline{a}_3}{a_3 \tau_j - a_2} \text{ ist ein Turn.} \tag{15}$$

Dies folgt daraus, dass mit (2) gilt $\overline{t}_0 = \frac{1}{t_0}$.

Der Zentrumskreis der $(n-1)$–Konfiguration, die man durch entfernen einer Gerade x_j aus einer (n)–Konfiguration erhält, ist nach (13) der Kreis

$$z(t) = a_1 - a_2(t + \tau_j) + a_3 t \tau_j. \tag{16}$$

Wählt man $t = t_0$, so erhält man nach (15) einen Kreispunkt. Dieser ist aber für alle $j = 1, 2, \ldots, n$ gleich dem Punkt w. Das war zu zeigen. □

Wir beenden den Beweis von Satz 2, indem wir zeigen:

Die Limaçon Kurve

$$z(t) = a_1 - 2a_2 t + a_3 t^2, \quad t \in \mathbb{E},$$

ist die Hüllkurve der Kreisschar (16).

Erstens stellt man fest, indem man in der Kreis– respektive Limaçon–Kurvengleichung $t = \tau_j$ wählt, dass der Punkt $a_1 - 2a_2\tau_j + a_3\tau_j^2$ ein gemeinsamer Punkt der Kurven ist.
Zweitens ist

$$\left.\frac{dz_{\text{Kreis}}(t)}{dt}\right|_{t=\tau_j} = -a_2 + a_3\tau_j; \qquad \left.\frac{dz_{\text{Limaçon}}(t)}{dt}\right|_{t=\tau_j} = -2a_2 + 2a_3\tau_j.$$

Die Tangenten an beide Kurven haben im gemeinsamen Punkt dieselbe Richtung. Die Kurven berühren sich dort.
Dass der allen Kreisen gemeinsame Punkt $w = a_1 - \frac{a_2\overline{a}_3}{\overline{a}_2}$ der Knoten der Limaçon Kurve ist, folgt daraus, dass für $z = w$ gilt

$$\frac{a_3}{a_2}t^2 - 2t + \frac{\overline{a}_3}{\overline{a}_2} = 0.$$

Nach Vietà ist somit das Produkt der Lösungen dieser Gleichung ein Turn, sodass es zwei Turns gibt, welche die Gleichung erfüllen. Der Punkt w ist ein Doppelpunkt der Limaçon Kurve. (Kurz: Die Gleichung ist selbstkonjugiert (siehe 3. Teil), ihre Lösungen sind Turns.)

Literatur

[1] F. Morley. On the metric geometry of the plane n-line. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1(2):97–115, 1900.