# Aufenthaltswahrscheinlichkeit im freien Fall

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, lieberhm@mng.ch

## 1 Einleitung

Werfen wir einen Ball vertikal nach oben, so scheint er im Scheitel ein Weilchen stehen zu bleiben. Meine Schülerinnen und Schüler können das begründen, weil sie den Zeitanteil für die obere Hälfte der Fallstrecke bestimmen mussten. Die Rechnung lässt sich erweitern, indem man die Wahrscheinlichkeitsdichte berechnet, den Körper auf einer bestimmten Höhe anzutreffen. Wir werden uns auf den freien Fall ohne Anfangsgeschwindigkeit aus der Höhe $H$ konzentrieren; der Aufwärtswurf ist eine einfache Verallgemeinerung.

## 2 Theorie

Ein Massenpunkt falle ohne Anfangsgeschwindigkeit über die ganze Fallstrecke $H$. Dann gilt

$$h = \tfrac{1}{2}gt^2 \quad \text{für} \qquad 0 \leqslant h \leqslant H \quad \text{bzw.} \quad 0 \leqslant t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \leqslant T = \sqrt{\frac{2H}{g}}. \tag{1}$$

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, den Massenpunkt zwischen $h$ und $h + dh$ anzutreffen? Die Variable $N$ bezeichne die (ev. normierte) Anzahl Beobachtungen. Die Beobachtungen seien zeitlich gleichverteilt: $dN/dt =$ const. Da wir den Massenpunkt sicher während der Fallzeit $T$ beobachten, gilt:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{T} \tag{2}$$

Jetzt brauchen wir nur noch diese Gleichverteilung zu transformieren: $dN/dt \longrightarrow dN/dh$.

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{1}{T} \Rightarrow \tag{3}$$

$$\frac{dN}{dh} = \frac{1}{T}\frac{dt}{dh} = \frac{1}{T}\frac{d}{dh}\sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{4}$$

$$\frac{dN}{dh} = \frac{1}{T}\frac{1}{\sqrt{2gh}} = \frac{1}{2\sqrt{Hh}} \tag{5}$$

## 3 Simulation

Da ich ohnehin für einen Praktikumsversuch meine Excel™-Fähigkeiten erweitern wollte, simulierte ich den im vorangehenden Abschnitt dargestellten Vorgang numerisch. Ich gab zufällig gleichverteilte Zeiten im Intervall $0 < t < T$ vor und berechnete $N = 10\,000$ Mal die durchfallene Höhe $h$. Die Parameterwerte sind $H = 10\,\mathrm{m}$ und $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, woraus $T = \sqrt{2}\,\mathrm{s}$ folgt. Die Höhen habe ich als Histogramm (Häufigkeitsverteilung) dargestellt, siehe Abbildung 1. Die Theoriekurve habe ich dazu gezeichnet. Sie passt sehr gut. Zur Kontrolle stellte ich die simulierten Daten noch doppelt logarithmisch dar, siehe Abbildung 2. Falls die Theorie korrekt ist, sollten die Daten dann auf einer Geraden liegen. Eine Ausgleichs-Potenzfunktion hat auch wie erwartet den Exponenten -0.5. (Nicht genau -1/2, vor allem weil im ersten Intervall nahe $h = 0$ die Mittelung unsauber ist.)

# 4 Vergleich Theorie und Simulation

Die Daten der Excel-Simulation werden in Abbildung 1 und 2 mit der Theorie verglichen. Die Parameter der Simulation sind $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, $0 < h < 10\,\mathrm{m}$, Klassenbreite $\Delta h = 0.1\,\mathrm{m}$, $N = 10\,000$.

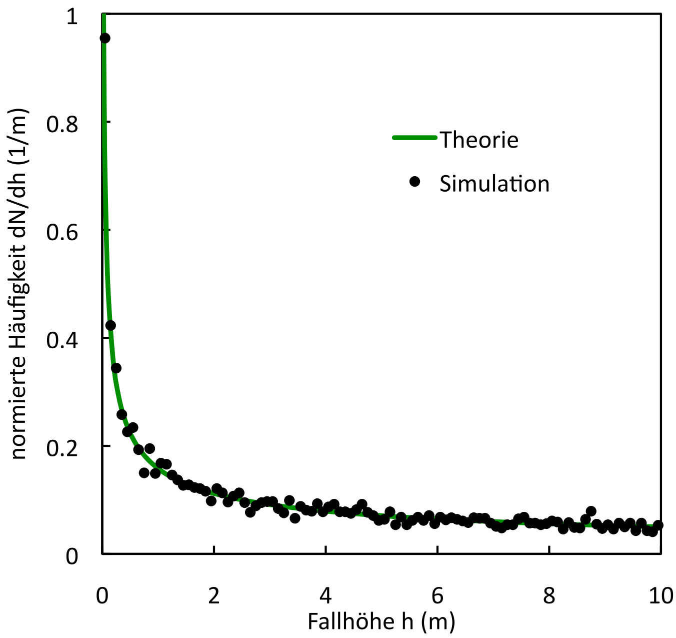


*Abbildung 1: Histogramm der simulierten Fallstrecken mit der Theoriefunktion nach Gleichung (5). Die Beobachtungszeiten sind gleichverteilt, die beobachteten Fallstrecken sind es nicht: Die Verteilung divergiert für $h \to 0$. Positionen in der Nähe des Startpunktes werden viel wahrscheinlicher beobachtet als solche weiter unten.*

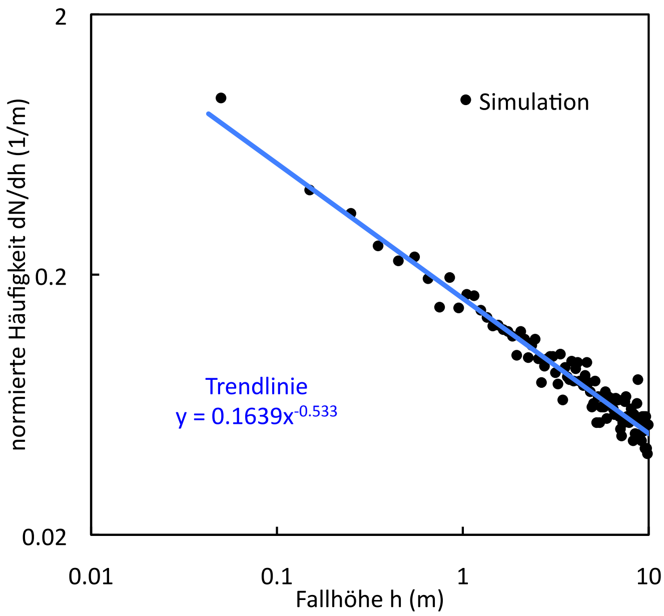


*Abbildung 2: Die doppelt logarithmische Darstellung der simulierten Daten zeigt, dass sie gut durch eine Potenzfunktion dargestellt werden können. Die Ausgleichsfunktion ("Trendlinie", $y \mathrel{\hat{=}} dN/dh$, $x \mathrel{\hat{=}} h$) legt $dN/dh \propto 1/\sqrt{h}$ nahe. Der Vorfaktor müsste nach Theorie $1/\sqrt{4 \cdot 10} = 0.158$ sein. Der erste Datenpunkt aus der Simulation liegt daneben, weil das Intervall $0 < h < 0.1\,\mathrm{m}$ zu nahe am Pol der Verteilung liegt. Bei grösseren Fallstrecken liegen weniger Datenpunkte in den Intervallen und die Werte streuen deshalb stärker.*

Mit der Wahrscheinlichkeitsdichte lassen sich verschiedene Kennzahlen ausrechnen: Erwartungswert $E(h) = \frac{1}{3}H$, $E(h^2) = \frac{1}{5}H^2$, Varianz $\frac{4}{45}H^2$, Median $\frac{1}{4}H$ etc., die alle per Simulation kontrolliert werden können.

Eine analoge Aufgabe wäre, die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines bestimmten Ausschlags des harmonischen Oszillators zu berechnen. Sie hat eine gewisse Bedeutung als Limes der quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsdichte des harmonischen Oszillators für hohe Quantenzahlen.

24. März 2016 , Lie.