

Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 2B

Urs Kirchgraber, kirchgra@math.ethz.ch

Dies ist die Fortsetzung des Artikels *Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 2A*, erschienen im VSMP-Bulletin 131, p. 61-69. Abschnitte und Gleichungen aus Teil 2A werden in dieser Fortsetzung mit der entsprechenden Nummer, ergänzt durch den Zusatz “2A”, zitiert.

Zur Erinnerung: Ziel dieser Artikel-Reihe ist, etwas über die folgende nach G. Duffing benannte gewöhnliche Differenzialgleichung 2. Ordnung¹ zu erfahren:

$$\ddot{y} + y = \epsilon [2\nu y - 2\delta \dot{y} + \gamma y^3 + 2 \cos(t)] \quad (32), 2A$$

beziehungsweise, wenn man sie als System 1. Ordnung schreibt:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -y_1 + \epsilon [2\nu y_1 - 2\delta y_2 + \gamma y_1^3 + 2 \cos(t)] \end{cases} \quad (33), 2A$$

Die sogenannte *Mittelwert-Methode* (engl. *Method of Averaging*) erlaubt es, das Verhalten der Lösungen des Dgl-Systems (33), 2A – jedenfalls in gewissem Ausmass und für *hinreichend kleine, positive Werte* des Störungsparameters ϵ (mehr dazu in Abschnitt 7, 2A) – anhand des sogenannten “*gemittelten Systems*” zu untersuchen. Dieses lautet:

$$\begin{cases} \bar{x}_1' &= -\delta \bar{x}_1 + \nu \bar{x}_2 - \kappa (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) \bar{x}_2 \\ \bar{x}_2' &= -\nu \bar{x}_1 - \delta \bar{x}_2 + \kappa (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) \bar{x}_1 - 1 \end{cases} \quad (30), 2A$$

Die Herleitung findet sich in den Abschnitten 5, 2A und 6, 2A. Wie schon dort bedeutet $'$ die Ableitung nach τ , wobei τ und die Zeit t durch $\tau = \epsilon t$ miteinander verknüpft sind, und κ und γ durch $\kappa = -(3/8)\gamma$.

Dieser Teil III, 2B ist hauptsächlich der Diskussion des Systems (30), 2A gewidmet. Diese Diskussion ist interessant, auch unabhängig von ihrem Bezug zur Duffing-Gleichung (32), 2A, (33), 2A: Die Diskussion ist charakteristisch für die Untersuchung von sogenannten *ebenen autonomen* Dgl-Systemen. Im Zentrum stehen die Bestimmung der Gleichgewichtslösungen (in Abhängigkeit der Parameter δ, κ, ν) und des Verhaltens der Lösungskurven in deren Nähe, sowie die globalen Eigenschaften des Systems. Dazu werden “analytische” Überlegungen und Numerische Verfahren, insbesondere die Nutzung eines numerischen ODE-Solvers kombiniert.

¹Mechanisch interpretiert handelt es sich um einen nichtlinearen, gedämpften Schwinger mit einer äusseren periodischen Anregung. Dabei ist γ ein Mass für die Stärke des nichtlinearen Anteils in der Rückstellkraft (pro Masseneinheit): $(1 - \epsilon 2\nu)y - \epsilon \gamma y^3$. Für die Bedeutung von ν siehe Abschnitt 3 unten. $\delta > 0$ ist ein Mass für die Stärke der Dämpfungskraft (pro Masseneinheit): $\epsilon 2\delta \dot{y}$. Die 2π -periodische Anregung ist mit $\epsilon 2 \cos(t)$ angesetzt. Der sogenannte Störparameter ϵ wird als klein und positiv gedacht. Er sorgt dafür, dass Nichtlinearität, Dämpfung und die Amplitude der äusseren Anregung *klein* sind, sodass die Duffing-Gleichung (in dieser Form) als eine “*Störung*” des einfachen *harmonischen Oszillators* $\ddot{y} + y = 0$ aufgefasst werden kann. Das ermöglicht die Anwendung von *Methoden der Störungsrechnung*.

1

Beginnen wir mit der Beantwortung der Frage (B) aus Abschnitt 6, 2A, also der Frage nach dem Vorteil des gemittelten Systems im Vergleich zum Ausgangssystem, also (29), 2A versus (27), 2A (oder auch (38), 2A versus (36), 2A) beziehungsweise für den Fall der Duffing-Gleichung: (30), 2A versus (32), 2A oder (33), 2A. Man kann zunächst ohne Bezug zum Beispiel Duffing-Gleichung folgendes vermerken.

Das Ausgangssystem (27), 2A, bzw. (36), 2A, i.e. $\dot{x} = \epsilon q(t, x)$ ist ein sogenanntes *nicht-autonomes* Dgl-System, denn die rechte Seite hängt nicht nur von der Variablen x ab, sondern überdies auch von der Variablen t . Im Gegensatz dazu ist das gemittelte System (29), 2A (bzw. (38), 2A), i.e. $\dot{\bar{x}} = \epsilon \bar{q}(\bar{x})$ *autonom*, weil die rechte Seite von \bar{x} abhängt, nicht jedoch von t , wobei bei dieser Unterscheidung x , bzw. \bar{x} und t als voneinander unabhängig angesehen werden.

Dieser Unterschied zwischen den beiden Systemen bedeutet, dass das ursprüngliche, nicht-autonome System *eine Dimension mehr*² aufweist. Vielleicht denken Sie: Auf eine Dimension mehr oder weniger kommt es doch wohl nicht an?! Das ist aber (leider!) nicht wahr. Das wird am Beispiel der Duffing-Gleichung überaus deutlich werden.

Blieben wir noch einen Moment im allgemeinen Kontext von Abschnitt 6, 2A oder Abschnitt 7, 2A. Für das gemittelte System (29), 2A, bzw. (38), 2A kann man, anstelle der Zeit t , als neue unabhängige Variable die “skalierte Zeit”

$$\tau = \epsilon t \quad (1)$$

einführen, wie das schon beim gemittelten System (30), 2A zur Duffing-Gleichung gemacht wurde. Dann geht (29), 2A bzw. (38), 2A über in

$$\bar{x}' = \bar{q}(\bar{x}) \quad (2)$$

Dabei bezeichnet der Akzent ' die Ableitung nach τ . Da ein gemitteltes System autonom ist, verschwindet bei Einführung von τ anstelle von t der kleine Parameter ϵ aus Akten und Traktanden, wie (2) zeigt. Das hat einen höchst willkommenen Effekt: Wenn man eine Lösung von (2) auf einem τ -Intervall $[0, L]$ kennt, bedeutet das, dass man die entsprechende Lösung³ von (29), 2A, bzw. (38), 2A für t auf dem “expandierenden”⁴ Zeitintervall $[0, \frac{L}{\epsilon}]$ kennt. Um (jedenfalls näherungsweise) etwas über die Lösungen von (2) zu erfahren bietet es sich an, (2) mit einem numerischen ODE-Solver zu untersuchen: Das ist, wie man sieht, sehr viel effizienter als numerische Verfahren auf die ursprüngliche Gleichung (27), 2A, bzw. (36), 2A anzuwenden: Die 2π -periodische Abhängigkeit der rechten Seite $q(t, x)$ von t zwingt zu einer (vergleichsweise) kleinen Schrittwahl bei der Anwendung von ODE-Solvern.

Nun zur *Duffing-Gleichung*. Sowohl die Duffing-Gleichung (33), 2A, als auch die zu ihr gehörige gemittelte Gleichung (30), 2A sind 2-dimensionale⁵ Systeme, denn es handelt sich jeweils um zwei (gekoppelte) Dgl 1. Ordnung. Aber (33), 2A ist, im Unterschied und Gegensatz zu (30), 2A, nicht-autonom.

Zwischen ebenen autonomen und ebenen nicht-autonomen Dgl-Systemen liegen Welten! Während man über das Verhalten der Lösungen von ebenen autonomen Dgl-Systemen recht gut Bescheid weiss (weil es

²Indem man zu (27), 2A bzw. (36), 2A die (triviale) Differentialgleichung $t' = 1$ hinzufügt, also (27), 2A bzw. (36), 2A durch das System

$$\begin{cases} t' &= & 1 \\ \dot{x} &= & \epsilon q(t, x) \end{cases}$$

ersetzt, macht man (27), 2A bzw. (36), 2A formal zu einem autonomen System, um den Preis, dass die Dimension um 1 grösser wird.

³Man erhält sie, indem man den Übergang von t nach τ rückgängig macht, also τ durch ϵt ersetzt.

⁴Man spricht von *expandierend* weil die Länge des Zeitintervalls $[0, \frac{L}{\epsilon}]$ mit *abnehmendem* ϵ *anwächst*.

⁵Man sagt auch *ebene* Dgl-Systeme.

vergleichsweise einfach ist), ist sehr viel weniger über das Verhalten der Lösungen von nicht-autonomen ebenen Dgl-Systemen bekannt. Aus gutem Grund: Dieses kann sehr komplex sein. Zum Beispiel ist sogenanntes "chaotisches Verhalten" möglich, und zwar selbst wenn die t -Abhängigkeit so einfach wie möglich, nämlich periodisch mit fester Periode, ist.

Ebenen autonomen Dgl-Systemen sind wir im Rahmen dieser Artikel-Reihe schon im Teil "Schwingungen II: Die Gleichung von van der Pol" begegnet (VSMP-Bulletin 129, p. 10-19). Ich bitte sich dort Teil 5 in Erinnerung zu rufen, insbesondere die Begriffe *Phasenebene*, *Phasenkurve* (auch *Orbit* oder *Lösungskurve* genannt), *Phasenportrait*, usw.

Einer der grossen Vorteile von ebenen autonomen Dgl-Systemen ist, dass die *Gleichgewichtslösungen* und die *periodischen Lösungen* typischerweise ihre gesamte Geometrie und Dynamik bestimmen. Im Phasenportrait erscheint eine periodische Lösung als *geschlossene Kurve*, weil die Phasenkurve einer periodischen Lösung eine geschlossene Kurve ist. Eine Gleichgewichtslösung erscheint im Phasenportrait als *Punkt*, weil die Phasenkurve einer Gleichgewichtslösung ein Punkt ist.

Für das gemittelte System (30), 2A zur Duffing-Gleichung (32), 2A bzw. (33), 2A kann man unter der Voraussetzung

$$\delta > 0 \quad (3)$$

periodische Lösungen und damit *geschlossene Kurven* im Phasenportrait mit Hilfe des *Satzes von Gauss* über (ebene) Vektorfelder *ausschliessen*.

Zur Erinnerung: Der Term $-2\epsilon\delta\dot{y}$ in der Duffing-Gleichung (32), 2A sorgt unter der Bedingung (3) (und weil grundsätzlich $\epsilon > 0$ vorausgesetzt wird) für das Vorhandensein von *Dämpfung* im Duffing-schen Schwinger und somit, wie die obige Bemerkung zeigt, dafür, dass im gemittelten System (30), 2A keine periodischen Lösungen auftreten.

2

Also sind die *Gleichgewichtslösungen* von (30), 2A von ausschlaggebender Bedeutung. Die Gleichgewichtslösungen von (30), 2A sind, siehe Abschnitt 7, 2A, die *Nullstellen* der rechten Seite von (30), 2A, also Zahlenpaare X_1, X_2 , die das (algebraische) Gleichungssystem

$$\begin{cases} -\delta X_1 + \nu X_2 - \kappa (X_1^2 + X_2^2) X_2 & = 0 \\ -\nu X_1 - \delta X_2 + \kappa (X_1^2 + X_2^2) X_1 - 1 & = 0 \end{cases} \quad (4)$$

erfüllen. Etwas Umformung liefert folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \nu &= \kappa A \pm \sqrt{\frac{1}{A} - \delta^2} =: \nu_{\pm}(A) \quad \text{mit } A \in (0, \frac{1}{\delta^2}) \\ X_1 &= -\nu A + \kappa A^2 \\ X_2 &= -\delta A \end{aligned} \quad (5)$$

mit der Abkürzung

$$A = X_1^2 + X_2^2 \quad (6)$$

Ableiten der Funktionen $\nu_{\pm}(A)$ nach A liefert:

$$\nu'_{\pm}(A) = \kappa \mp \frac{1}{2A^2 \sqrt{\frac{1}{A} - \delta^2}} \quad \text{mit } A \in (0, \frac{1}{\delta^2}) \quad (7)$$

Um etwas Konkretes vor Augen zu haben, schlage ich vor vorauszusetzen, dass

$$\kappa > 0 \tag{8}$$

gilt. Was bedeutet das?

Aus der Duffing-Gleichung (32), 2A liest man die einwirkende *Rückstellkraft* (pro Masseneinheit) ab⁶

$$(1 - \epsilon 2\nu)y + \epsilon \frac{8}{3} \kappa y^3 \tag{9}$$

Dabei wurde (31), 2A (also $\kappa = -(3/8)\gamma$) berücksichtigt. Nun kann man die Bedingung (8) interpretieren. Bei positivem κ ist die als Feder interpretierte Rückstellkraft (9) *superlinear*. Das heisst: Im Vergleich zur, durch den linearen Term in (9) gegebenen, linearen (“Hookeschen”) Feder ist die durch (9) definierte nichtlineare Feder etwas *härter*⁷.

Wie sich zeigen wird hat die Nichtlinearität $\epsilon \frac{8}{3} \kappa y^3$ bedeutenden Einfluss auf das Schwingungsverhalten des Duffing-Schwingers.

Zurück zu den *Gleichgewichtslösungen*, i.e. zum algebraischen Gleichungssystem (4) und damit zu den Formeln (5) und vorallem zu den Funktionen $\nu_{\pm}(A)$. Aus (7) folgt:

$$\nu_{-}(A) \text{ ist auf } (0, \frac{1}{\delta^2}) \text{ monoton wachsend} \tag{10}$$

Zur Analyse des Graphs von $\nu_{+}(A)$ untersucht man, ob $\nu_{+}'(A)$ Nullstellen hat. Wegen

$$\nu_{+}'(A) = 0 \iff \kappa^2 = \frac{1}{4A^3 - 4\delta^2 A^4}$$

betrachtet man den Graph der *Hilfsfunktion*

$$\frac{1}{4A^3 - 4\delta^2 A^4} \quad \text{für } A \in (0, \frac{1}{\delta^2})$$

Er hat bei $A = 0$ und $A = \frac{1}{\delta^2}$ je einen Pol; überdies ist er

$$\begin{aligned} &\text{in } (0, \frac{3}{4\delta^2}) \text{ monoton fallend} \\ &\text{in } (\frac{3}{4\delta^2}, \frac{1}{\delta^2}) \text{ monoton wachsend} \end{aligned}$$

und sein Tiefpunkt ist durch

$$(\frac{3}{4\delta^2}, \frac{64}{27} \delta^6)$$

gegeben. Das hat folgende Konsequenzen für $\nu_{+}(A)$, man beachte (7):

$$\begin{aligned} \kappa^2 < \frac{64}{27} \delta^6 &\implies \nu_{+}(A) \text{ ist auf } (0, \frac{1}{\delta^2}) \text{ monoton fallend} \\ \kappa^2 > \frac{64}{27} \delta^6 &\implies \nu_{+}'(A) \text{ hat in } (0, \frac{1}{\delta^2}) \text{ zwei Nullstellen } A_1, A_2 \end{aligned} \tag{11}$$

Somit gilt unter der Voraussetzung $\kappa^2 > \frac{64}{27} \delta^6$, man beachte wieder (7):

$$\nu_{+}(A) \text{ ist } \begin{cases} \text{monoton fallend auf } (0, A_1) \\ \text{monoton wachsend auf } (A_1, A_2) \\ \text{monoton fallend auf } (A_2, \frac{1}{\delta^2}) \end{cases} \tag{12}$$

⁶Siehe auch Fussnote 1.

⁷Die nichtlineare Feder erfordert eine etwas grössere Kraft, um eine gewisse Auslenkung y zu erreichen als die lineare Feder.

Das *Kriterium* in (11) setzt den Parameter κ für die *Nichtlinearität* in der *Rückstellkraft* zum Parameter δ der *Dämpfung* in Beziehung: Massgebend dafür, welcher der beiden Fälle in (11) vorliegt ist, ob κ unterhalb oder oberhalb eines gewissen *Schwellwerts* κ_{krit} liegt, der wegen $\kappa_{krit} := \frac{8}{3\sqrt{3}} \delta^3$ durch die Stärke δ der Dämpfung definiert ist.

Abbildung 1 a), b) illustriert den *ersten Fall* in (11) und zwar im Extremfall $\kappa = 0$, also wenn die Nichtlinearität “ausgeschaltet” und die Rückstellkraft linear ist.

Abbildung 1 b) entsteht aus Abbildung 1 a) durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden durch den ersten und dritten Quadranten in Abbildung 1 a). Man spricht beim Bild 1 b) vom

Bifurkationsdiagramm

Um die Gleichgewichtslösungen des gemittelten Systems (30), 2A zu bestimmen, muss man gemäss (5) die Grösse A (im Prinzip) aus den beiden Gleichungen

$$\nu_{\pm}(A) = \nu, \quad A \in (0, \frac{1}{\delta^2}) \tag{13}$$

ermitteln (um dann X_1, X_2 aus den beiden weiteren Gleichungen von (5) zu bestimmen). Dabei ist das Bifurkationsdiagramm nützlich: Es verschafft Überblick, wie sich zeigen wird.

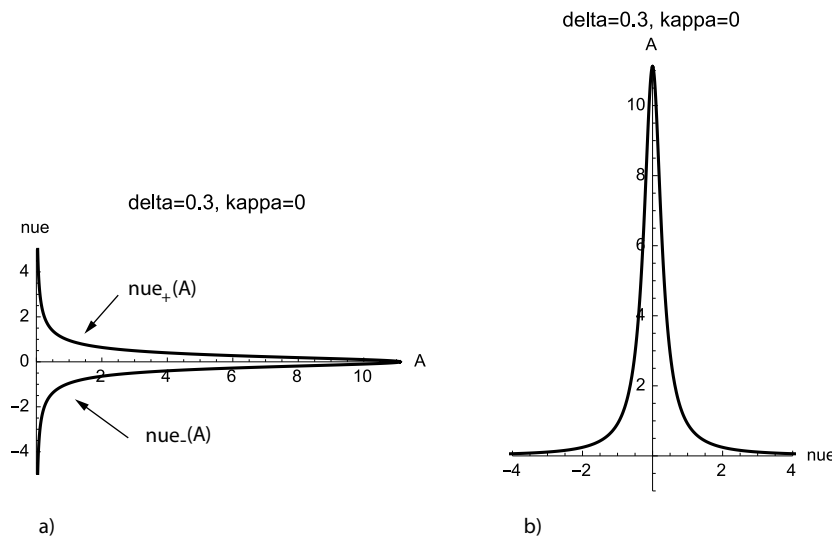


Abbildung 1: a): Die Graphen der Funktionen $\nu_{\pm}(\cdot)$ b): Das Bifurkationsdiagramm der Duffing-Gleichung im Fall verschwindender Nichtlinearität

3

Die Vorstellung ist, dass die Parameter, also δ, γ (bzw. $\kappa = -(3/8)\gamma$) und ν gewählt sind. Allerdings ist es *interessant* die Rolle von δ, κ und diejenige von ν zu unterscheiden: δ, κ denke man sich *fest* gewählt. Hingegen sollen *unterschiedliche Werte* für ν ins Auge gefasst werden.

Warum das? Was ist die Bedeutung?

Die äussere Anregung des Duffing-Schwingers (32), 2A, also der Term $\epsilon 2 \cos(t)$ ist periodisch mit Periode 2π . (32), 2A ist, für ϵ positiv und klein, ein gestörter harmonischer Oszillator. Der ungestörte harmonische Oszillator hat die Gleichung

$$\ddot{y} + y = 0 \tag{14}$$

und damit die Lösungen $y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$. Alle Lösungen von (14) sind periodisch und zwar *ebenfalls* mit Periode 2π .

Statt in der Form (32), 2A kann man die Duffing-Gleichung auch wie folgt schreiben

$$\ddot{y} + (1 - \epsilon 2\nu)y = \epsilon [-2\delta \dot{y} + \gamma y^3 + 2 \cos(t)] \quad (15)$$

In der Darstellung (15) sind die beiden linearen Terme in y also zusammengefasst. In dieser Darstellung sieht man, dass der *eigentlich* zu Grunde liegende harmonische Oszillator nicht durch die Gleichung (14) gegeben ist, sondern durch

$$\ddot{y} + (1 - \epsilon 2\nu)y = 0 \quad (16)$$

Die Lösungen von (16) lauten nun aber

$$y(t) = c_1 \cos(\sqrt{1 - \epsilon 2\nu}t) + c_2 \sin(\sqrt{1 - \epsilon 2\nu}t)$$

und haben die Periode

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1 - \epsilon 2\nu}} \quad (17)$$

(17) ist nur für $\nu = 0$ gleich 2π . Die *Pointe*: Der “ ν -Term” in der Duffing-Gleichung (32), 2A (oder (15)) erlaubt *die Wirkung einer (kleinen) Verstimmung zwischen der Frequenz der äusseren Anregung und der sogenannten Eigenfrequenz des Schwingers* zu untersuchen. Es wird sich zeigen, dass das Verhalten der Lösungen der Duffing-Gleichung in interessanter Weise vom Parameter ν abhängt.

4

Doch zurück zu den Gleichungen (13)

$$\nu_{\pm}(A) = \nu, \quad A \in (0, \frac{1}{\delta^2}) \quad (18)$$

Im Fall von Abbildung 1 (also wenn $\delta = 0.3$ und $\kappa = 0$ gesetzt ist) liest man aus dem Bifurkationsdiagramm in Teil b) ab, dass (13), bzw. (18) für *jede Wahl* von ν *genau eine Lösung* hat, die durch

$$A = \frac{1}{\nu^2 + \delta^2} \quad (19)$$

gegeben ist, wie eine leichte Rechnung ergibt. Offenbar ist A für $\nu = 0$ maximal und gleich $\frac{1}{\delta^2}$.

(Bemerkung: Modulo Modifikationen in den Bezeichnungen und Normierungen entspricht dieses Szenarium demjenigen in “*Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing, Teil 1*”, erschienen im VSMP-Bulletin 130, p. 24-31, siehe dort Abbildung 3. Wenn also der Parameter κ der Nichtlinearität unterhalb des Schwellwerts κ_{krit} liegt, macht sich die Nichtlinearität jedenfalls *qualitativ nicht* bemerkbar.)

Viel interessanter ist der *zweite Fall* in (11), wenn κ oberhalb von κ_{krit} liegt, wenn also

$$\kappa^2 > \frac{64}{27}\delta^6 \quad (20)$$

gilt, mit anderen Worten: wenn die *Nichtlinearität* der Rückstellkraft *mehr Einfluss* hat (gemessen an der Wirkung der Dämpfung).

Abbildung 2 illustriert dieses Szenarium und zwar bei der Wahl $\delta = 0.3$ und $\kappa = 1$. Dann gilt nämlich

$$\kappa^2 = 1 > \frac{64}{27}\delta^6 = 0.001728$$

Abbildung 2 a) zeigt die Graphen von $\nu_-(A)$ und $\nu_+(A)$ im Überblick. Abbildung 2 b) ist ein Zoom von dem Bereich, in dem die beiden Graphen zusammen kommen und zeigt, dass dort nicht etwa eine "Spitze" vorliegt, dass dieser Übergang vielmehr vollkommen glatt verläuft.

Die beiden Abbildungen illustrieren die Aussagen in (11) und (12). Insbesondere sieht man, dass der Graph von $\nu_+(A)$ links vom Punkt $P_1 = (A_1, \nu_+(A_1))$ monoton fallend, zwischen P_1 und $P_2 = (A_2, \nu_+(A_2))$ monoton wachsend, und dann nochmals auf einem, allerdings sehr kleinen, Stück monoton fallend ist.

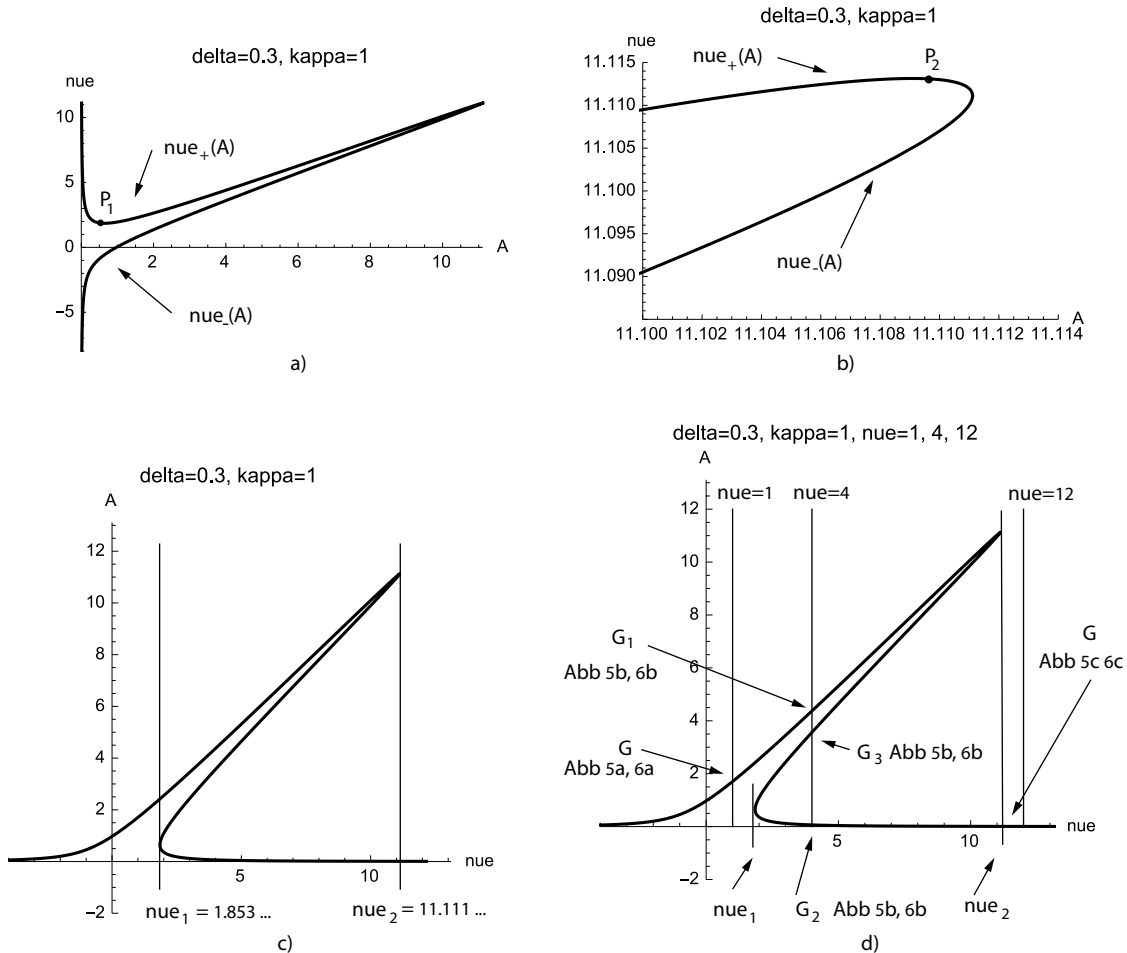


Abbildung 2: a): Die Graphen der Funktionen $\nu_{\pm}(\cdot)$ b): Zoom des Diagramms aus a) c): Bifurkationsdiagramm der Duffing-Gleichung im Fall $\kappa^2 > \frac{64}{27}\delta^6$ d): Wie c) mit zusätzlichen Angaben

Das Bifurkationsdiagramm in Abbildung 2 c) und d) ist durch Spiegelung der Graphen in Abbildung 2 a) an der dortigen Winkelhalbierenden durch den ersten und dritten Quadranten entstanden. Ihm entnimmt man folgende interessante Information über die Lösungen der Gleichungen (18), (19), bzw.

$$\nu_{\pm}(A) = \nu, \quad A \in \left(0, \frac{1}{\delta^2}\right) \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \nu < \nu_1 &\implies (21) \text{ hat 1 Lösung} &\implies (30), 2A \text{ hat 1 Gleichgewichtslösung} \\ \nu_1 < \nu < \nu_2 &\implies (21) \text{ hat 3 Lösungen} &\implies (30), 2A \text{ hat 3 Gleichgewichtslösungen} \\ \nu_2 < \nu &\implies (21) \text{ hat 1 Lösung} &\implies (30), 2A \text{ hat 1 Gleichgewichtslösung} \end{aligned} \tag{22}$$

Es sei weiterhin $\delta = 0.3$, $\kappa = 1$ gesetzt. Für ν wähle ich nacheinander, siehe Abbildung 2 d):

$$\nu = 1, \quad \nu = 4, \quad \nu = 12 \tag{23}$$

Die zugehörigen Gleichgewichte lassen sich mit Hilfe der Formeln (5) unschwer berechnen. Man findet:

Für $\nu = 1$:

$$A = 1.704 \dots \quad X_1 = 1.201 \dots \quad X_2 = -0.511 \dots \quad (24)$$

Darstellung siehe Abbildung 3 a)

Für $\nu = 4$:

$$\begin{aligned} A = 0.0641 \dots \quad X_1 = -0.252 \dots \quad X_2 = -0.0192 \dots \\ A = 3.563 \dots \quad X_1 = -1.555 \dots \quad X_2 = -1.069 \dots \\ A = 4.372 \dots \quad X_1 = 1.628 \dots \quad X_2 = -1.311 \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Darstellung siehe Abbildung 3 b)

Für $\nu = 12$:

$$A = 0.0069 \dots \quad X_1 = -0.0833 \dots \quad X_2 = -0.000208 \dots \quad (26)$$

Darstellung siehe Abbildung 3 c)

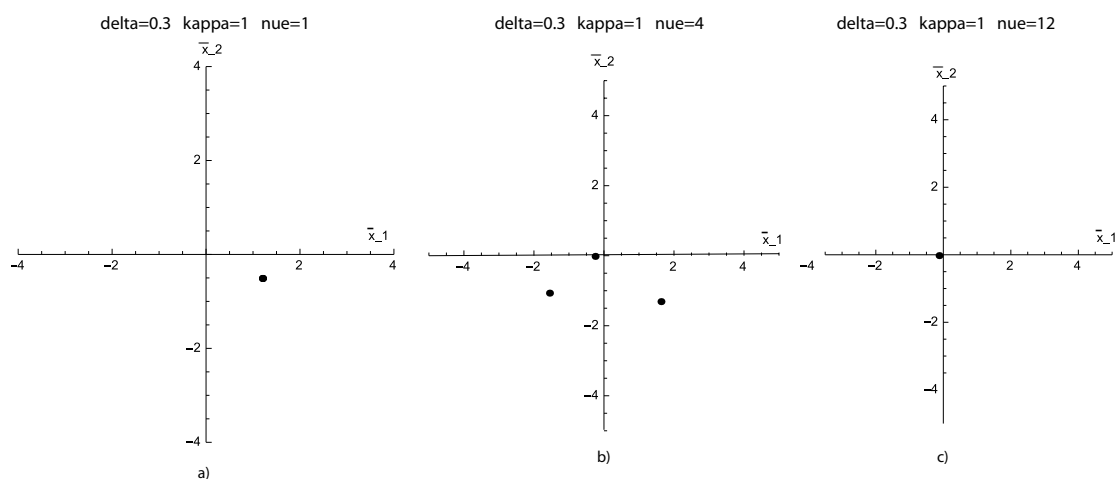


Abbildung 3: Lage der Gleichgewichtspunkte des gemittelten Systems (30), 2A in der \bar{x}_1 - \bar{x}_2 -Ebene für drei verschiedene ν -Werte, wobei $\kappa > \kappa_{krit}$ gilt

5

Wenn man die Gleichgewichte eines (ebenen) autonomen Dgl-Systems bestimmt hat, möchte man als nächstes etwas über das Verhalten der Lösungskurven in deren Nähe erfahren. Dafür gibt es ein probates und systematisches Vorgehen. Das Stichwort heisst

Linearisierung

Ausgehend von einem ebenen autonomen System, das ich hier wie folgt schreiben will

$$\begin{cases} \bar{x}_1' = f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \bar{x}_2' = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{cases} \quad (27)$$

und einer ihrer Gleichgewichtslösungen⁸ X_1, X_2 , führt man die Translation

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = X_1 + z_1 \\ \bar{x}_2 = X_2 + z_2 \end{cases} \quad (28)$$

⁸Es gilt also $f_1(X_1, X_2) = 0, f_2(X_1, X_2) = 0$.

durch. Die Umrechnung von den (alten) Variablen \bar{x}_1, \bar{x}_2 auf die (neuen) Variablen z_1, z_2 ist einfach: Da X_1, X_2 Zahlen, also für die Ableitung nach der unabhängigen Variablen, hier mit τ bezeichnet, Konstanten sind, folgt $\bar{x}_1' = (X_1 + z_1)' = z_1'$, etc. und somit

$$\begin{cases} z_1' &= f_1(X_1 + z_1, X_2 + z_2) \\ z_2' &= f_2(X_1 + z_1, X_2 + z_2) \end{cases} \quad (29)$$

Wenn man sich auf eine *kleine Umgebung* des Gleichgewichts (X_1, X_2) einschränkt, sind z_1, z_2 *kleine* Größen. Deshalb entwickelt man $f_1(X_1 + z_1, X_2 + z_2)$ und $f_2(X_1 + z_1, X_2 + z_2)$ gemäss der Taylor-Formel (für zwei Variable) nach z_1, z_2 :

$$f_1(X_1 + z_1, X_2 + z_2) = f_1(X_1, X_2) + \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}_1}(X_1, X_2)z_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}_2}(X_1, X_2)z_2 + \dots \quad (30)$$

und mutatis mutandis für $f_2(X_1 + z_1, X_2 + z_2)$. Berücksichtigt man, dass nach Voraussetzung X_1, X_2 eine Gleichgewichtslösung von (27) ist, siehe dazu Fussnote 8, und bricht in der Entwicklung (30) nach den linearen Termen ab, erhält man das *um das Gleichgewicht (X_1, X_2) linearisierte System*:

$$\begin{cases} z_1' &= A_{11}z_1 + A_{12}z_2 \\ z_2' &= A_{21}z_1 + A_{22}z_2 \end{cases} \quad (31)$$

mit

$$A_{ij} := \frac{\partial f_i}{\partial \bar{x}_j}(X_1, X_2) \quad (32)$$

In der *Differenzialgleichungslehre* beweist man, dass die Lösungskurven von (31) in der Nähe des Nullpunkts (der Gleichgewicht für das Dgl-System (31) ist) und die Lösungskurven von (27) in der Nähe des Gleichgewichts (X_1, X_2) "ganz analog verlaufen", man sagt: *qualitativ gleich* sind, falls folgende Voraussetzung erfüllt ist:

$$\text{Die Matrix } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \text{ ist } \textit{hyperbolisch} \quad (33)$$

Eine Matrix wird *hyperbolisch* genannt, wenn *keiner* ihrer *Eigenwerte* auf der *imaginären Achse* liegt. Anders formuliert: Keiner ihrer Eigenwerte hat Realteil 0.

Es bezeichne A eine (reelle) 2×2 -Matrix und λ_1, λ_2 ihre Eigenwerte. Dann ist

$$P_2(\lambda) := (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - s\lambda + d \text{ mit } s = \lambda_1 + \lambda_2, d = \lambda_1\lambda_2 \quad (34)$$

das *charakteristische Polynom* von A . Mit s, d ausgedrückt sind die Eigenwerte durch

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(s \pm \sqrt{s^2 - 4d}) \quad (35)$$

gegeben. Wie die Phasenportraits eines ebenen linearen Dgl-Systems mit konstanten Koeffizienten, also eines Dgl-System des Typs (31) von s (der Spur der Matrix A) und d (der Determinante von A) abhängen, zeigt das Diagramm in Abbildung 4.

In unserem Beispiel, siehe (24)-(26), findet man folgende Eigenwerte und die angegebene Interpretation für das jeweilige (lokale) Phasenportrait:

Für $\nu = 1$:

$$\lambda_{1,2} = -0.3 \pm 1.702 \dots \cdot i \implies \text{einlaufende Spirale} \quad (36)$$

Für $\nu = 4$:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -0.3 \pm 3.871 \dots \cdot i && \implies \text{einlaufende Spirale} \\ \lambda_1 &= -2.0090 \dots, \lambda_2 = 1.4090 \dots && \implies \text{Sattelpunkt} \\ \lambda_{1,2} &= -0.3 \pm 1.842 \dots \cdot i && \implies \text{einlaufende Spirale} \end{aligned} \quad (37)$$

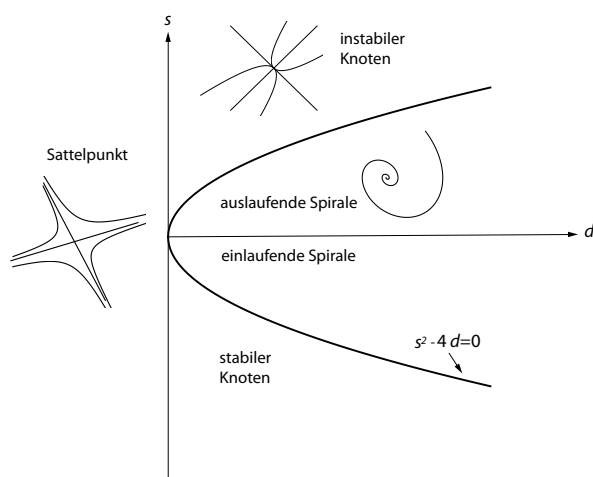


Abbildung 4: Phasenportrait eines ebenen linearen Systems mit konstanten Koeffizienten in Abhängigkeit von Spur s und Determinante d des charakteristischen Polynoms der Koeffizientenmatrix, siehe (31)-(35)

Für $\nu = 12$:

$$\lambda_{1,2} = -0.3 \pm 11.986 \dots \cdot i \implies \text{einlaufende Spirale} \quad (38)$$

In den Abbildungen 5 a)-c) sind die *lokalen* Phasenportraits zum Dgl-System (30), 2A, angedeutet.

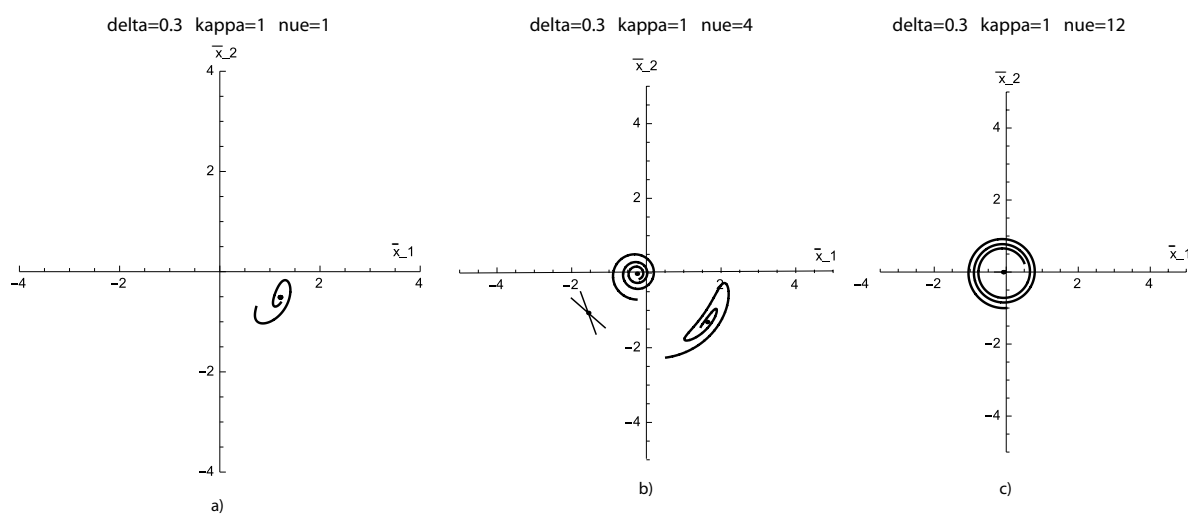


Abbildung 5: Wie Abbildung 3, zusätzlich angedeutet lokales Phasenportrait in der Nähe der jeweiligen Gleichgewichtspunkte

6

Einer der grossen Vorteile eines ebenen (also zweidimensionalen) autonomen Dgl-Systems ist, dass man sich mit Hilfe eines *numerischen ODE-Solvers* meist recht leicht ein (*zuverlässiges*) *Bild des globalen Phasenportrait* machen kann. In der Regel genügt die (approximative) Bestimmung einiger weniger, geeignet ausgewählter Phasenkurven.

Die Resultate für unser Beispiel ($\delta = 0.3, \kappa = 1, \nu = 1, 4, 12$) zeigen die Abbildungen 6 a)-c).

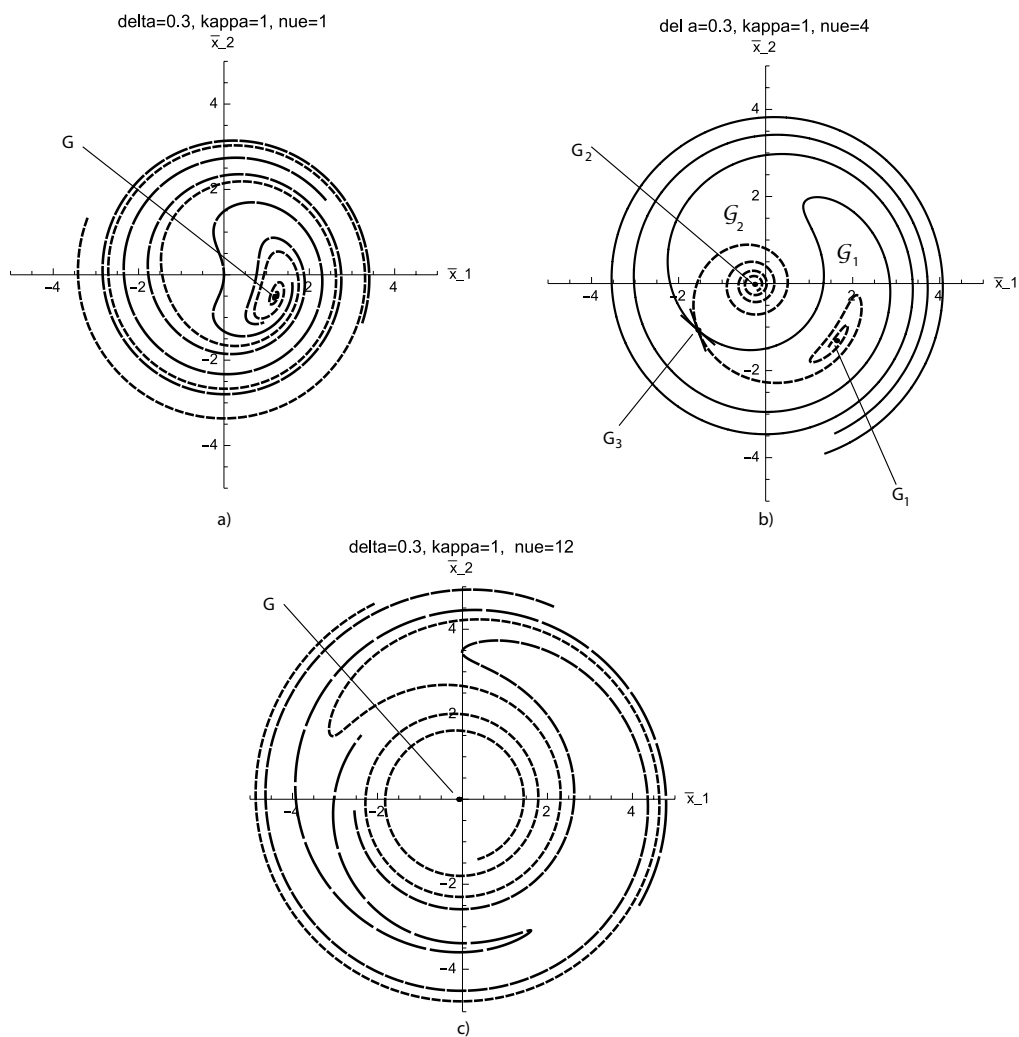


Abbildung 6: Wie die Abbildungen 3 und 5, zusätzlich grössere Ausschnitte von ausgewählten Phasenkurven, sodass das jeweilige (mutmassliche) globale Phasenportrait erkennbar ist

In den beiden Fällen mit nur je einem Gleichgewicht (also für $\nu = 1$ und $\nu = 12$, Abbildungen 6 a), 6 c)) streben offenbar alle Lösungen für $\tau \rightarrow \infty$ gegen die jeweilige Gleichgewichtslösung, die Gleichgewichtslösung ist dann ein “globaler Attraktor”, wie man sagt.

Im Fall $\nu = 4$ mit drei Gleichgewichten zeigt sich folgendes Bild. Es gibt zwei Lösungen, die für $\tau \rightarrow \infty$ (ausgezogen gezeichnet) und zwei Lösungen, die für $\tau \rightarrow -\infty$ (gestrichelt gezeichnet) gegen das *Sattelpunkt-Gleichgewicht*⁹ G_3 streben. Die zwei Lösungskurven, die zu den beiden Lösungen gehören die für $\tau \rightarrow \infty$ gegen G_3 streben unterteilen die \bar{x}_1 - \bar{x}_2 -Ebene in zwei Gebiete \mathcal{G}_1 , \mathcal{G}_2 . Diese Gebiete liegen spiralförmig ineinander und enthalten je eines der beiden anderen der drei Gleichgewichte: \mathcal{G}_1 enthält das Gleichgewicht G_1 , \mathcal{G}_2 enthält G_2 . Phasenkurven mit Anfangs- (Start-)punkt im einen der beiden Gebiete laufen (vorwärts, also im Sinne zunehmender τ -Werte) in Richtung des entsprechenden Gleichgewichts und spiralen auf dieses zu. Damit haben wir vollen Überblick über das qualitative Verhalten der Lösungen des gemittelten Systems (30), 2A (im betrachteten Fall, der allerdings typisch ist) gewonnen. Was folgt für die Duffing-Gleichung (32), 2A?

⁹Für seine Koordinaten siehe die mittlere der Angaben in (25), sowie die mittlere der Aussagen in (37).

7

Wie man sich erinnert (siehe Abschnitt 7, 2A) *generieren nicht-ausgeartete Gleichgewichte des gemittelten Systems* (30), 2A (und um solche handelt es sich bei (24)-(26), wie aus (36)-(38) folgt)

2 π -periodische Lösungen der Duffing-Gleichung (33), 2A

Das gilt insbesondere für alle Gleichgewichte vom Typ “einlaufende Spirale”, siehe (36)-(38) im Verein mit (24) - (26).

Überdies kann man für das Verhalten der übrigen Lösungen der Duffing-Gleichung (33), 2A folgendes beweisen (man vergleiche mit Abschnitt 7, 2A):

$\nu = 1$ oder $\nu = 12$

Für jede Lösung gilt: Sie strebt für $t \rightarrow \infty$ gegen die 2π -periodische Lösung, sofern $\epsilon > 0$, genügend klein gewählt ist.

$\nu = 4$

Für jede Lösung mit Anfangspunkt in \mathcal{G}_1 bzw. \mathcal{G}_2 gilt *mutatis mutandis* dasselbe, das heisst sie strebt für $t \rightarrow \infty$ gegen die vom entsprechenden Gleichgewicht G_1 bzw. G_2 generierte 2π -periodische Lösung, vorausgesetzt $\epsilon > 0$ ist genügend klein gewählt.

Das sind Aussagen mit Geltungsbereich über das (unendlich lange) Zeitintervall $[0, \infty)$. Jedoch hängt es von der jeweils betrachteten Lösung ab, wie klein ϵ (mindestens) gewählt werden muss. In dieser Hinsicht erfüllen diese Aussagen die Wunschvorstellungen aus Abschnitt 3, 2A nicht.

Wählt man hingegen in \mathcal{G}_1 bzw. in \mathcal{G}_2 *kompakte* Teilmengen \mathcal{K}_1 bzw. \mathcal{K}_2 , so existiert ein $\epsilon_0 > 0$, sodass für *alle* $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ und *jede* Lösung mit Anfangspunkt in \mathcal{K}_1 bzw. \mathcal{K}_2 gilt: Sie strebt für $t \rightarrow \infty$ gegen die entsprechende 2π -periodische Lösung der Duffing-Gleichung. Mit anderen Worten: *Man weiss, wie sich sehr viele Lösungen der Duffing-Gleichung langfristig verhalten.*

8

Im letzten (kurzen) Teil dieser Reihe über Schwingungen, *Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 2C*, werden wir einer berühmten Frage nachgehen: Wie “reagiert” die Duffing-Gleichung, wenn man die Verstimmung ν zwischen Eigenfrequenz des Schwingers und der Frequenz der äusseren Anregung *adiabatisch*, das heisst (theoretisch: unendlich) langsam *verändert*? Es passiert etwas Unerwartetes: René Thom nannte es eine Katastrophe ...

Literatur

- [1] G. Duffing: *Erzwungene Schwingungen bei veränderlichen Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*, 1918.
- [2] U. Kirchgraber: *Schwingungen I oder wenn der Vater mit dem Sohn*, VSMP-Bulletin Nr. 128, Mai 2015, p. 24-30, *Schwingungen II: Die Gleichung von van der Pol*, VSMP-Bulletin Nr. 129, September 2015, p. 10-19, *Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 1*, VSMP-Bulletin Nr. 130, Januar 2016, p. 24-31.
- [3] M. Lieberherr: *Duffing-Oszillator*, VSMP-Bulletin Nr. 119, Juni 2012, p. 30-32.