Analyse eines Weihnachtssterns

Peter Gallin

Auf der Homepage der Didaktikerin Beate Leßmann habe ich eine interessante Anleitung zum Basteln eines Weihnachtssterns gefunden (Abb. 1), bei der ich mir die Frage gestellt habe, wie denn die je drei Einbuchtungen in den beiden gleichseitigen Dreiecken wohl zu konstruieren sind, damit beim Zusammenstecken der beiden Sternhälften ein möglichst bündiger Sitz gewährleistet ist.

Zur Analyse der Geometrie einer Sternhälfte schneiden wir zuerst nur ein gleichseitiges Dreieck aus und verzichten auf die drei Einbuchtungen. Das Dreieck wird längs der drei Höhen gefaltet, deren Länge wir auf 3 festsetzen. Dann wird der kurze Teil (Länge 1) jedes Falzes konkav, der lange Teil (Länge 2) dagegen konvex ausgebuchtet, so dass sich die Spitzen einer Sternhälfte herausbilden lassen. Unsere Sternhälfte hat damit im Zentrum eine dreiseitige Pyramide mit der Spitze H und den drei von H ausgehenden Kanten der Länge 1. Die Basispunkte der Pyramide nennen W, X, und Y. Ausserdem bezeichnen wir den im Bereich von $0°$ bis $60°$ frei wählbaren halben Winkel zwischen je zwei dieser Kanten mit α. Das Grunddreieck WXY der Pyramide ist dann ein gleichseitiges Dreieck mit der Kantenlänge $2\sin(\alpha)$.

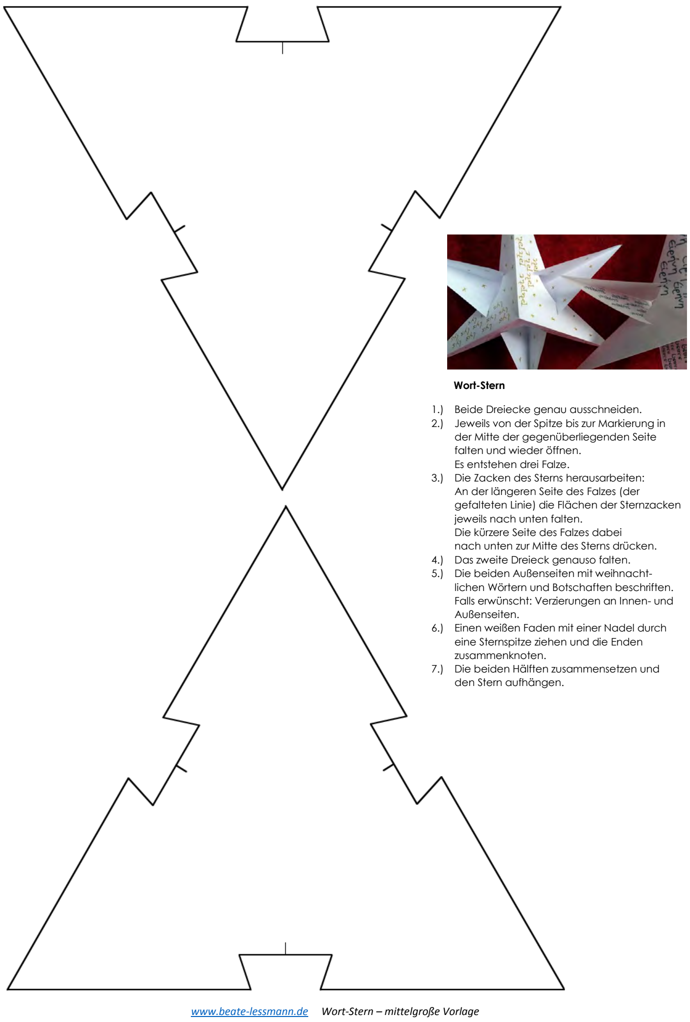

Abb. 1: Bastelanleitung

Stellt man die Pyramide auf den Tisch, so beobachtet man, dass die drei Spitzen sich vom Tisch auf eine bestimmte, noch unbekannte Höhe h über dem Tisch anheben. Bereits jetzt kann man sich an der Abb. 4 orientieren, in der die Pyramide auf der Grundrissebene steht und eine Sternspitze Z eingezeichnet ist. Wir verwenden dabei die traditionelle 2-Tafel-Projektion der Darstellenden Geometrie. Die Höhe h von Z über dem Tisch wollen wir nun konstruieren und in Abhängigkeit von α berechnen. Dazu verwenden wir zuerst eine andere Lage der Pyramide im Raum. Wir legen die Ebene HXY in die Grundrissebene und zwar so, dass XY zweitprojizierend, d. h. senkrecht zur Aufrissebene liegt (Abb. 2). Gemäss unserer Festlegung können wir die Längen 1 und die Winkel α im Grundriss eintragen. Die Kante HW ist aus Symmetriegründen eine zweite Hauptgerade. Zudem ist das Dreieck HWX kongruent zum Dreieck HYX. Damit kann das Dreieck HYX um HX so weit gedreht werden, bis der Punkt Y in der 1. Projektion die Winkelhalbierende von $\angle YHX$ trifft. D. h. man zeichnet zu $H'X'$ ein Lot durch Y', auf dem dann W' liegt. Den

Aufriss von W erhält man durch die Tatsache, dass die Länge 1 der Strecke HW im Aufriss in wahrer Grösse erscheint und somit W'' mit einem Kreisbogen mit Zentrum H'' gefunden wird. Zur Bestimmung der Sternspitze Z gehen wir analog vor. Das Dreieck HXZ ist ein halbes gleichseitiges Dreieck mit rechtem Winkel bei X. Damit liegt Z' auf einem Lot zu $H'X'$ durch X' und zudem auf der bereits eingeführten Winkelhalbierenden von $\angle YHX$. Für den Aufriss von Z verwenden wir die Tatsache, dass HZ die Länge 2 hat und auf einer zweiten Hauptgeraden liegt. So liefert wiederum ein Kreisbogen mit Zentrum H'' den Punkt Z''. Da die Grundebene der Pyramide eine zweitprojizierende Ebene ist, können wir sie durch Verbinden von W'' mit $X'' = Y''$ im Auftriss als Gerade darstellen. Durch die Lote zu $W''X''$ durch H'' resp. Z'' erhalten wir auf ihr die Punkte O'' resp. P''. Die Strecke $H''O''$ zeigt die Höhe der Pyramide an und die Strecke $Z''P''$ zeigt den gesuchten Abstand h der Sternspitze von der (hier projizierend erscheinenden) Tischfläche.

Nun folgt der rechnerische Teil: Wir berechnen die Koordinaten von W und Z, wobei wir H als Ursprung des Koordinatensystems annehmen: x-Achse nach vorne, y-Achse nach rechts und z-Achse nach oben. Wir kürzen wie folgt ab: $s = \sin(\alpha)$ und $c = \cos(\alpha)$ und der Mittelpunkt der Strecke XY sei M. Dann gilt: $|H'M'| = c$ und $|M'X'| = |M'Y'| = s$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $H'M'X'$ und $H'X'Z'$ folgt $c : 1 = 1 : |H'Z'|$ und somit $|H'Z'| = \frac{1}{c}$. Ferner ist W' der an M' gespiegelte Punkt Z'. Also ist $|W'M'| = \frac{1}{c} - c$. Somit folgt $|H'W'| = c - (\frac{1}{c} - c) = 2c - \frac{1}{c} = \frac{2c^2-1}{c}$. Die negative z-Koordinate z_W von W erhalten wir über Pythagoras im Aufriss:

$$z_W = -\sqrt{1 - \left(\frac{2c^2 - 1}{c}\right)^2} = -\frac{1}{c}\sqrt{c^2 - 4c^4 + 4c^2 - 1}$$

Durch Verwenden von $s^2 = 1 - c^2$ ergibt sich:

$$z_W = -\frac{1}{c}\sqrt{4c^2(1-c^2) - (1-c^2)} = -\frac{s}{c}\sqrt{4c^2 - 1}$$

Ebenfalls über Pythagoras im Aufriss erhalten wir $z_Z = \sqrt{4 - (\frac{1}{c})^2}$. Die Gerade $W''X''$ hat die Gleichung $z = \frac{-z_W}{|W'M'|}(y - |H''X''|)$. Das heisst:

$$z = (y - c) \cdot \frac{\frac{s}{c}\sqrt{4c^2 - 1}}{\frac{1}{c} - c}$$

oder nach Multiplikation mit dem Nenner:

$$z \cdot (1 - c^2) = (y - c) \cdot s\sqrt{4c^2 - 1}$$

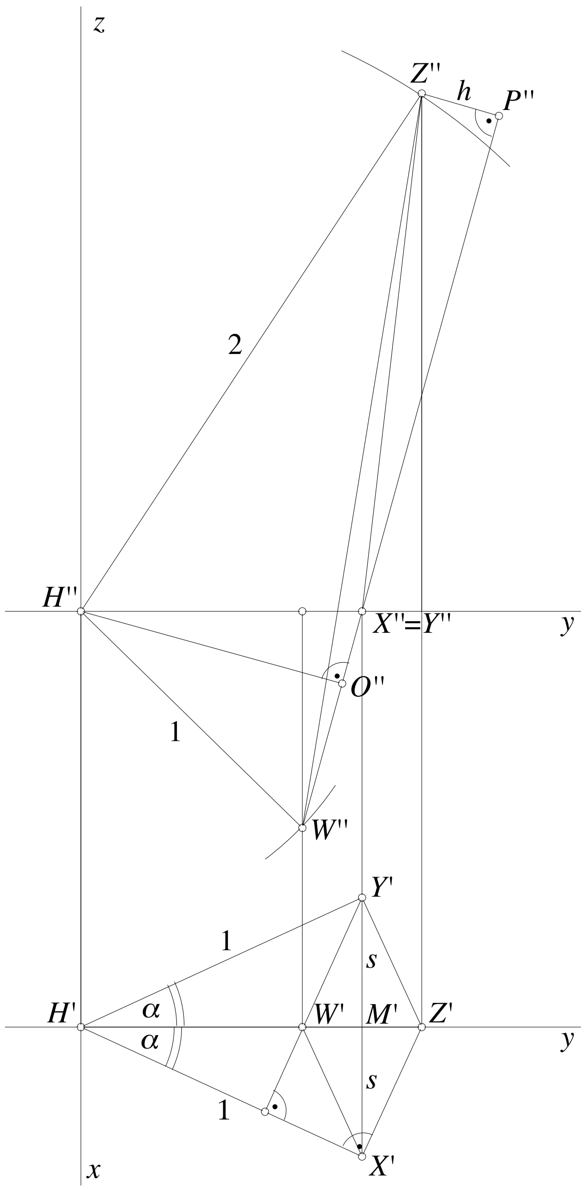

Abb. 2: Konstruktion der Spitzenhöhe h

Die Gleichung der Geraden $W''X''$ kann noch durch s dividiert werden: $z \cdot s = (y - c) \cdot \sqrt{4c^2 - 1}$. Mit der Vereinfachung $\sqrt{s^2 + 4c^2 - 1} = c\sqrt{3}$ ergibt sich die Hessesche Normalform:

$$-y \cdot \sqrt{\frac{4c^2 - 1}{3c^2}} + z \cdot \frac{s}{c\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{4c^2 - 1}{3}} = 0$$

Durch Einsetzen der Koordinaten $y = 0$ und $z = 0$ von H'' ihr liest man die Höhe $|H''O''| = |HO|$ der Pyramide als $\sqrt{\frac{4c^2-1}{3}} = \sqrt{\frac{3-4s^2}{3}}$ ab. Setzen wir dagegen die Koordinaten von Z'', also $y = \frac{1}{c}$ und $z = \sqrt{4 - \frac{1}{c^2}}$ ein, so ergibt sich auf der rechten Seite der Hesseschen Normalform anstelle von 0 die Höhe h von Z über der Tischfläche, also die Länge $|Z''P''|$:

$$h = -\frac{1}{c} \cdot \sqrt{\frac{4c^2 - 1}{3c^2}} + \sqrt{4 - \frac{1}{c^2}} \cdot \frac{s}{c\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{4c^2 - 1}{3}} = \sqrt{\frac{4c^2 - 1}{3}} \left(-\frac{1}{c^2} + \frac{s}{c^2} + 1 \right) = \frac{s(1-s)}{c^2} \sqrt{\frac{4c^2 - 1}{3}}$$

Die graphische Darstellung (Abb. 3) dieser Spitzenhöhe h über dem Tisch als Funktion von s verleitet uns dazu, jenen Weihnachtsstern auszuzeichnen, bei dem diese Höhe am grössten ist. Wir zeichnen also im Bereich $0 < \alpha < 60°$ d.h. für $0 < s < \frac{\sqrt{3}}{2}$ den Graphen der Funktion

$$h(s) = \frac{s(1-s)}{c^2} \sqrt{\frac{4c^2 - 1}{3}} = \frac{s(1-s)}{1 - s^2} \sqrt{\frac{3 - 4s^2}{3}} = \frac{s}{1 + s} \sqrt{\frac{3 - 4s^2}{3}} \quad .$$

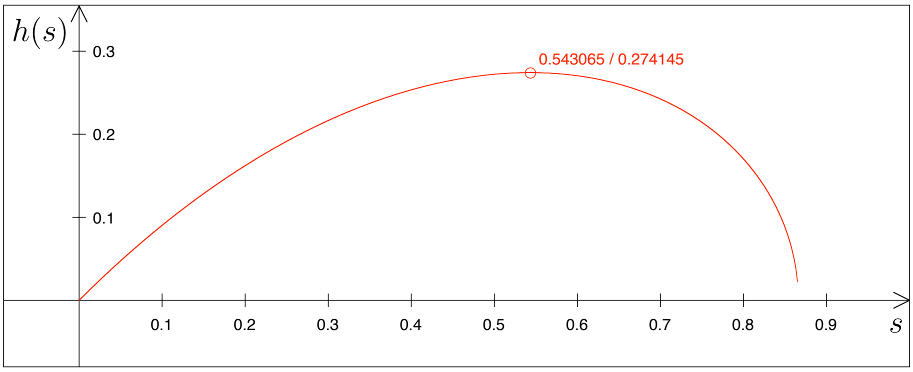

Abb. 3: Höhe der Sternspitze über dem Tisch

Das Nullsetzen der Ableitung $h'(s)$ liefert eine Gleichung dritten Grades. Wir lösen sie nur numerisch und erhalten den Näherungswert $s_0 = 0.543065$ also $\alpha_0 = 32.8925°$. Die maximale Höhe beträgt $h_0 = 0.274145$.

In einem letzten Schritt wollen wir die ursprüngliche Fragestellung behandeln: Wie müssen die Einbuchtungen im gleichseitigen Dreieck ausgeschnitten werden, damit der gute Sitz der beiden Sternhälften gewährleistet ist? Offenbar muss der kurze Schnitt der Einbuchtung einen bestimmten Winkel γ $(< 90°)$ gegenüber der Dreiecksseite einnehmen, so dass er auf der Schnittgeraden der beiden beteiligten Ebenen der Sternhälften liegt.

Wieder verwenden wir die 2-Tafel-Projektion der Darstellenden Geometrie und wählen jetzt die Grundrissebene als Tischfläche, auf der die dreiseitige Pyramide steht (Abb. 4). Das Zentrum O

des Grunddreiecks liege im Ursprung, die Spitze H hat dann die Koordinaten $H(0,0,\sqrt{\frac{3-4s^2}{3}})$. Das Grunddreieck XYW soll die Kante YW in zweiter Hauptlage haben. Die Koordinaten der drei Grundpunkte der Pyramide lauten dann: $X(\frac{2s}{\sqrt{3}},0,0)$, $Y(-\frac{s}{\sqrt{3}},s,0)$ und $W(-\frac{s}{\sqrt{3}},-s,0)$. Schliesslich können wir dank der Masse in Abb. 2 auch die Spitze Z einzeichnen: $Z(\frac{|OP|}{2},\frac{|OP|}{2}\sqrt{3},h)$.

Offenbar müssen wir noch $|OP|$ berechnen. Dies kann im Aufriss von Abb. 2 mit Pythagoras ausgeführt werden:

$$|OP| = \sqrt{4-(|HO|-h)^2}$$

Setzen wir die oben berechneten Werte ein, erhalten wir $|OP| =$

$$= \sqrt{4-\left(\sqrt{\frac{3-4s^2}{3}}-\frac{s}{1+s}\sqrt{\frac{3-4s^2}{3}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{4-\frac{3-4s^2}{3}\left(1-\frac{s}{1+s}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{4-\frac{3-4s^2}{3(1+s)^2}} = \frac{\sqrt{9+24s+16s^2}}{\sqrt{3}(1+s)} =$$

$$|OP| = \frac{3+4s}{\sqrt{3}(1+s)}$$

Damit sind alle wesentlichen Punkte der oberen Sternhälfte bekannt. Nun fügen wir die untere Sternhälfte dazu mit dem Ziel die angesprochene Schnittgerade in den Griff zu bekommen. Dazu spiegeln wir die obere Sternhälfte an der Grundrissebene und drehen das Spiegelbild noch mit 60° um die z-Achse. Es ergeben sich so die Punkte $\overline{H}(0,0,-\sqrt{\frac{3-4s^2}{3}})$, $\overline{X}(\frac{s}{\sqrt{3}},s,0)$, $\overline{Y}(-\frac{2s}{\sqrt{3}},0,0)$, $\overline{W}(\frac{s}{\sqrt{3}},-s,0)$ und $\overline{Z}(-\frac{|OP|}{2},\frac{|OP|}{2}\sqrt{3},-h)$.

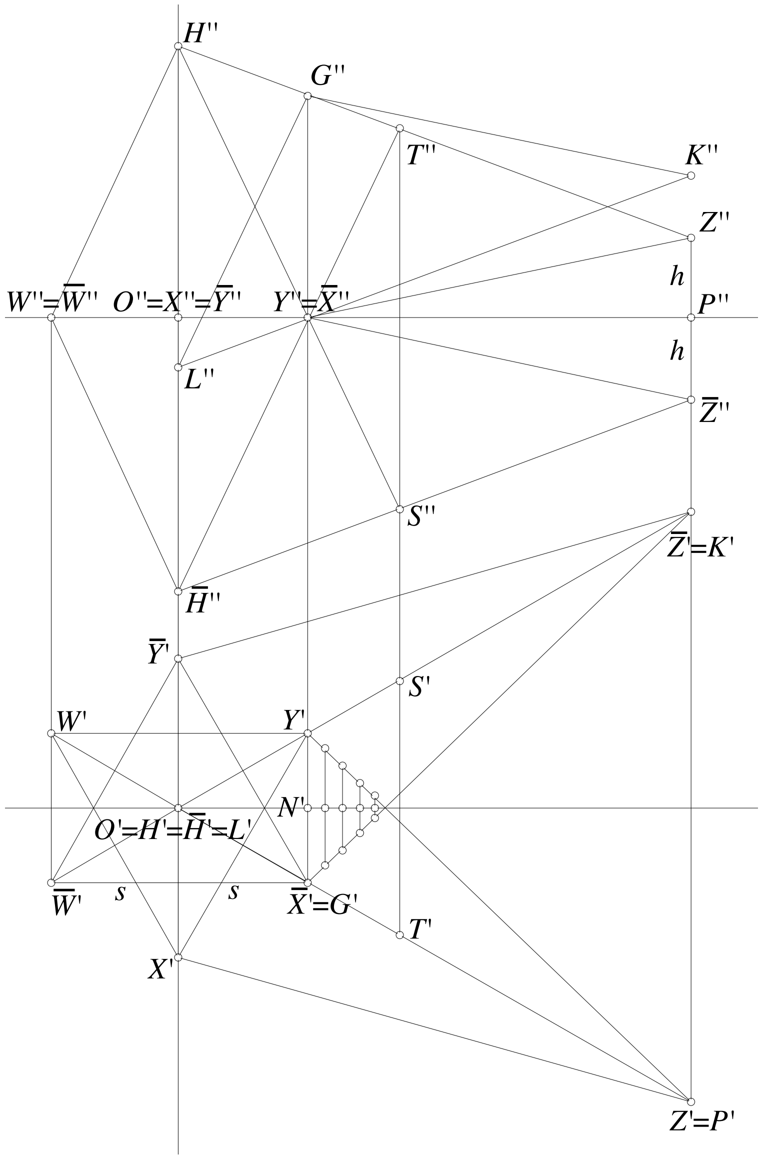

Abb. 4: Konstruktion der Schnittgeraden ST

Nun könnte man mit den Mitteln der Vektorgeometrie und beispielsweise mit Hilfe der Software *Mathematica* aus den gegebenen sechs Punkten die Richtung der Schnittgeraden der Ebenen HYZ und $\overline{H}\,\overline{X}\,\overline{Z}$ berechnen, um so den Winkel γ zwischen ihr und der Kante YZ zu erhalten. Das ist der Winkel, mit dem die kurzen Schnitte der Einbuchtungen in Abb. 1 zu führen wären. Wir wollen aber noch etwas länger bei der Geometrie bleiben und die Schnittgerade genauer untersuchen, denn so ergibt sich schliesslich eine Konstruktion für die unklaren Einbuchtungen.

Zuerst stellen wir fest, dass die Schnittgerade der Ebenen HYZ und $\overline{H}\,\overline{X}\,\overline{Z}$ wegen der Symmetrie in Grund- und Aufriss in Abb. 4 eine dritte Hauptgerade sein muss, ihre Risse also parallel zur z-Achse liegen. Die Gerade HY schneidet nämlich die Gerade $\overline{H}\,\overline{Z}$ im Punkt S und die Gerade $\overline{H}\,\overline{X}$ schneidet die Gerade HZ in T. Die Punkte S und T definieren die Schnittgerade und haben dieselbe y-Koordinate. Anstatt diese Schnittgerade zu betrachten, verschieben wir nun die untere Sternhälfte in Richtung der z-Achse nach oben und zwar so weit, bis die verschobene Kante $\overline{H}\,\overline{Z}$ durch den Punkt Y geht. Dann schneidet aber die verschobene Kante $\overline{X}\,\overline{Z}$ die Kante HZ im Punkt G. Die verschobene Ebene wird durch die drei Punkte G, K und L in Abb. 4 aufgespannt. Bei diesem Verschiebeprozess verschiebt sich die Schnittgerade parallel und geht als Schnittgerade der Ebenen HYZ und LGK durch die Punkte G (auf HZ) und Y (auf LK). Nun geht es also nur noch darum, im Dreieck GYZ den Winkel γ bei Y zu bestimmen. Dazu fehlt uns die z-Koordinate z_G von G.

Die Gleichung der Geraden $H''Z''$ in der yz-Ebene von Abb. 4 lautet:

$$z = -\frac{|HO| - h}{\frac{|OP|\sqrt{3}}{2}} \cdot y + |HO|$$

Drückt man alles durch s aus und setzt zudem $y = s$ (die y-Koordinate von G), so erhält man nach kurzer Rechnung:

$$z_G = \frac{\sqrt{3 - 4s^2}\ (3 + 2s)}{\sqrt{3}\ (3 + 4s)}$$

Somit hat G folgende Koordinaten $G(\frac{s}{\sqrt{3}}, s, z_G)$. Erst jetzt setzen wir *Mathematica* ein und berechnen die Quadrate der drei Seitenlängen des Dreiecks GYZ in Abhängigkeit von s:

$$|GY|^2 = \left(\frac{2s}{\sqrt{3}}\right)^2 + (z_G)^2 = \frac{16s^5 + 32s^4 + 20s^3 + 16s^2 + 21s + 9}{3 + 4s}$$

$$|GZ|^2 = \left(\frac{|OP|}{2} - \frac{s}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{|OP|\sqrt{3}}{2} - s\right)^2 + (z_G - h)^2 = \frac{4(3 + 2s - 2s^2)^2}{(3 + 4s)^2}$$

$$|YZ|^2 = 3$$

Der gesuchte Schnittwinkel γ ergibt sich über den Cosinussatz:

$$\gamma(s) = \arccos\left(\frac{|GY|^2 + |YZ|^2 - |GZ|^2}{2|GY||YZ|}\right) = \arccos\left(\frac{2\sqrt{3}s(s+1)}{\sqrt{9 + 12s + 4s^2 + 16s^3 + 16s^4}}\right)$$

Damit kennt man den Zusammenhang von dem halben Winkel α zwischen zwei Seitenkanten der dreiseitigen Pyramide $HWXY$ und dem Winkel γ, mit dem man die Einbuchtungen von der Papierkante her einschneiden soll. Insbesondere für unseren Fall mit maximaler Spitzenhöhe h_0 ergibt sich $\gamma_0 = 50.2982°$. Die Extremwerte für $\alpha = 0°$ $(s = 0)$ resp. für $\alpha = 60°$ $(s = \frac{\sqrt{3}}{2})$ ergeben entartete Sterne, bei denen die beiden Flächen der Sternspitzen total zusammengedrückt werden resp. die beiden Sternhälften total flach bleiben. Für diese Fälle liefert die Formel erwartungsgemäss die Winkel $\gamma = 90°$ resp. $\gamma = 30°$. Dazwischen fällt die Funktion $\gamma(s)$ monoton.

Unklar bleibt noch, wie breit die Einbuchtung sein soll. Dazu wollen wir zurückkehren zu unserer Schnittgeraden GY, welche in der Situation zum Zug kommt, wenn die untere Sternhälfte maximal nach oben geschoben ist. Dann können wir im Dreieck LGK von G her längs der Strecke GY bis zu deren Mittelpunkt N und im Dreieck HYZ von Y her längs der Strecke GY von Y bis N einschneiden. So können die beiden Hälften maximal ineinander geschoben werden. Die Endpunkte der beiden Schnitte liegen also je beim Punkt N.

Verschiebt man nun die untere Sternhälfte in Richtung z-Achse langsam nach unten, so verschiebt sich der immer kürzer werdende Schnitt langsam nach rechts, wobei das Ende jedes Schnittes immer auf der Verbindung von H mit N liegen muss. Mehrere dieser Schnitte sind in Abb. 4 im Grundriss parallel zu $G'Y'$ eingetragen. Zum Schluss übertragen wir diese Erkenntnis in den Ausschnittbogen von Abb. 1 und erhalten so die Abb. 5. Wir starten nun nicht mit der Wahl α resp. s, sondern wählen den Winkel γ im Bereich von 90° bis 30° frei. Somit kann man zuerst von der Mitte einer Seite des gleichseitigen Papierdreiecks mit einer Richtung innerhalb dieser Grenzen bis zur Mittelparallelen zu HZ des Dreiecks HYZ, also bis zum Punkt N, einschneiden. Diesen Schnitt spiegelt man an HY nach links und anschliessend durch weitere Spiegelungen auch auf die anderen Seiten des Dreiecks. Zwei solche Papiermodelle lassen sich dann nach dem Falten der Spitzen so zusammenstecken, dass man keine Lücke zwischen beiden Sternhälften mehr sieht. Da $\gamma(s)$ umkehrbar ist, stellen sich s und damit α automatisch ein. Will man die Sternhälften nicht so stark zueinander bewegen, kann dieser ursprüngliche Schnitt nach rechts parallel verschoben und gleichzeitig so verkürzt werden, dass sein Ende auf der Verbindung von H mit N liegt. Da nun die Schnitte genau ineinander greifen, muss man die Einbuchtungen gar nicht mehr der Länge nach ausschneiden. Sie sind hier bloss eingezeichnet, um den Zusammenhang mit Abb. 1 herzustellen.

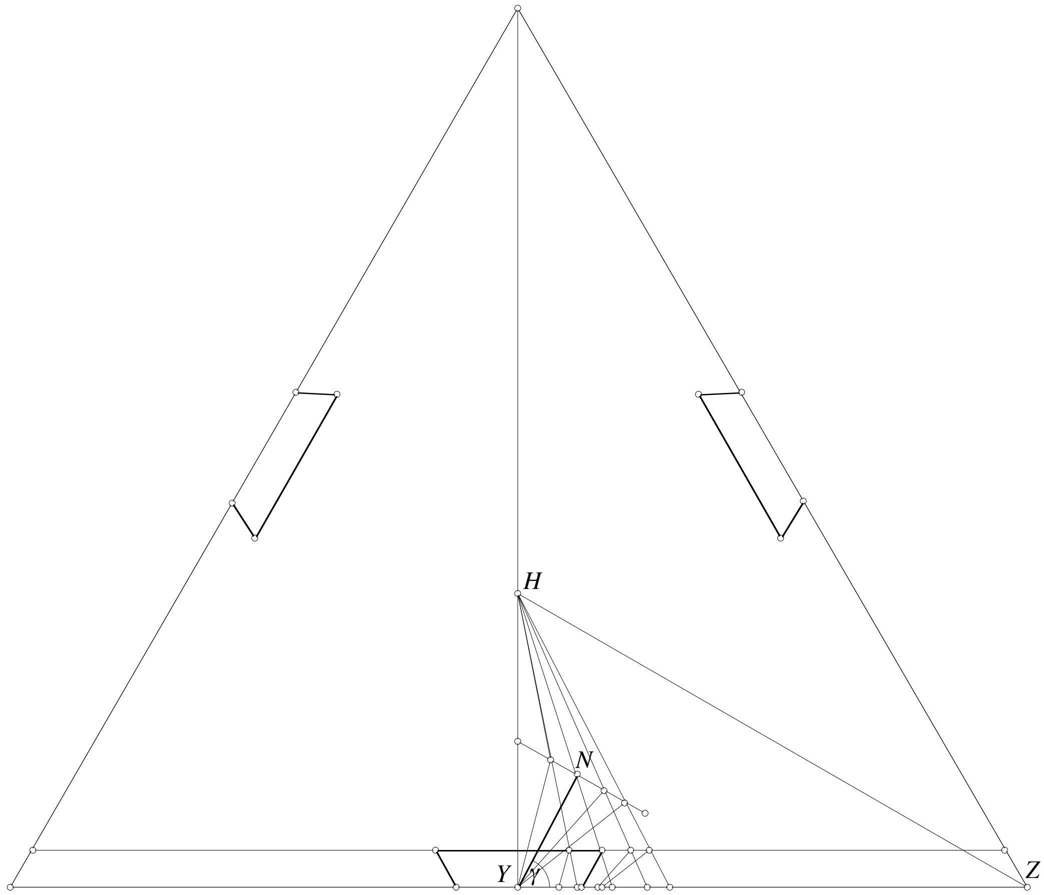

Abb. 5: Exakte Schnitte