Sehnenvieleck

Hans Walser, Gerlikonerstr. 29, 8500 Frauenfeld
hwalser@bluewin.ch, www.walser-h-m.ch/hans

1 Worum geht es?

In (Köchli 2016) wird eine elegante Konstruktion des Sehnenviereckes vorgestellt. Das wirft die Frage nach dem Sehnenvieleck mit beliebiger Eckenzahl auf. Wir besprechen eine MINT-Einschiebelösung mit DGS sowie eine räumliche Schere-und-Papier-Lösung.

2 Konstruktion

Zu gegebenen Seitenlängen $a_1,...,a_n$ soll das Sehnen-n-Eck konstruiert werden.

Wir zeichnen einen Kreis k mit dem Mittelpunkt $M(r,0)$ und dem beliebigen (genügend grossen) Radius r. Den Punkt A_0 setzen wir in den Ursprung und tragen davon ausgehend die gegebenen Seitenlängen sukzessive auf dem Kreis k ab. So erhalten wir einen Streckenzug $A_0...A_n$. Die Abbildung 1 zeigt die Situation für $n=7$.

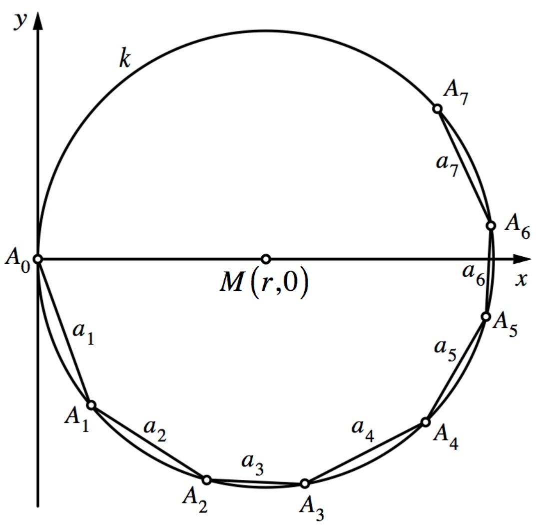

Abb. 1: Abtragen des Streckenzuges

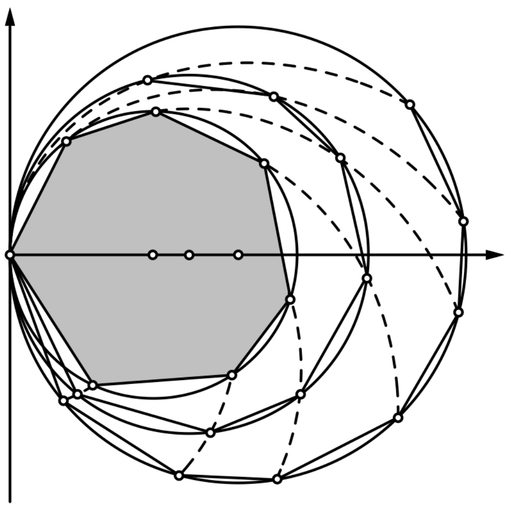

Abb. 2: Das Sehnensiebeneck

Nun verkleinern wir den Radius r. Der Punkt A_0 bleibt fest, der Punkt $M(r,0)$ verschiebt sich nach links. Der Kreis wird kleiner. Da wir die Seitenlängen $a_1,...,a_n$ nicht verändern, wird der Punkt A_n auf dem kleiner werdenden Kreis in Richtung von A_0 gestossen. Wir verkleinern den Radius r bis der Punkt A_n mit A_0 zusammenfällt. In der Abbildung 2 sind die Ausgangslage, eine Zwischenlage und die Endlage angegeben, ebenso gestrichelt die Bahnkurven der einzelnen Punkte.

3 Exaktheit

Für Zirkel-und-Lineal-Liebhaber gilt dieses Vorgehen nicht als „exakt“.

Dem ist zu widersprechen. Mit dem Verfahren „bis der Punkt A_n mit A_0 zusammenfällt“ entsteht in unserer Vorstellungswelt ein exaktes Sehnenvieleck. Dass dieses Zusammenfallen in der Praxis nicht exakt machbar ist, ändert nichts an der Stimmigkeit der Überlegung.

Das Zeichnen einer Geraden durch zwei gegebene Punkte mit einem angelegten Lineal (ebenfalls ein Einschiebeverfahren) ist ja auch nur in unserer Vorstellungswelt exakt.

Qualitativ besteht also kein Unterschied zwischen unserem DGS-Verfahren und einem klassischen Zirkel-und-Lineal-Verfahren.

Gleiche Meinung? Andere Meinung?

4 Umlaufszahl

Wir können „überdrehen" und nach dem ersten Zusammenfallen von A_n mit A_0 den Kreisradius r weiter verkleinern, bis die beiden Punkte ein zweites Mal zusammenfallen (Abb. 3). Es entsteht ein sternförmiges Sehnenvieleck mit der Umlaufszahl 2. — Und so weiter.

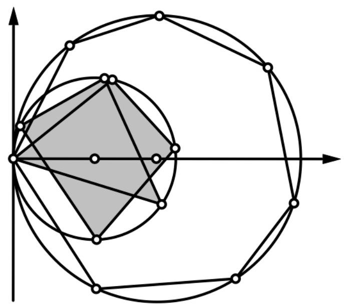

Abb. 3: Umlaufszahlen 1 und 2

5 Fragen

Es gibt keine Zirkel-und-Lineal-Konstruktion für das Sehnensiebeneck. Warum?

Gibt es ein Sehnenviereck mit der Umlaufszahl zwei?

Wann ist bezüglich Umlaufszahl die Zitrone ausgepresst?

Macht es Sinn, von der Umlaufszahl $\frac{1}{2}$ zu reden?

Bei gerader Eckenzahl ist die alternierende Winkelsumme null. Beweis? Ist dies kennzeichnend für ein Sehnenvieleck gerader Eckenzahl?

Isoperimetrisches Problem: Zu gegebenen Seitenlängen hat das Sehnenvieleck den grössten Flächeninhalt. Beweis?

Was kann über die Bahnkurven (Abb. 2) gesagt werden?

Wie lässt sich der Umkreisradius r eines Sehnenvieleckes rechnerisch (CAS) aus den Seitenlängen bestimmen?

6 Schere und Papier

In der Grundfigur der Abbildung 1 markieren wir die sieben gleichschenkligen Dreiecke $A_{i-1}A_iM$, $i \in \{1,...,7\}$, und fügen am Schluss eine Kopie des ersten Dreiecks als Verbindungslasche an (Abb. 4).

Wir schneiden aus, ritzen die gestrichelten Linien leicht mit einer Nadel, falten zur Pyramide und verheften die äussersten Dreiecke (Büroklammer oder Klebestift). Dann legen wir das Modell auf eine ebene Unterlage und drücken mit dem Finger sanft auf die Spitze, bis alle Bodenkanten aufliegen.

Diese bilden nun das Sehnensiebeneck (Abb. 5).

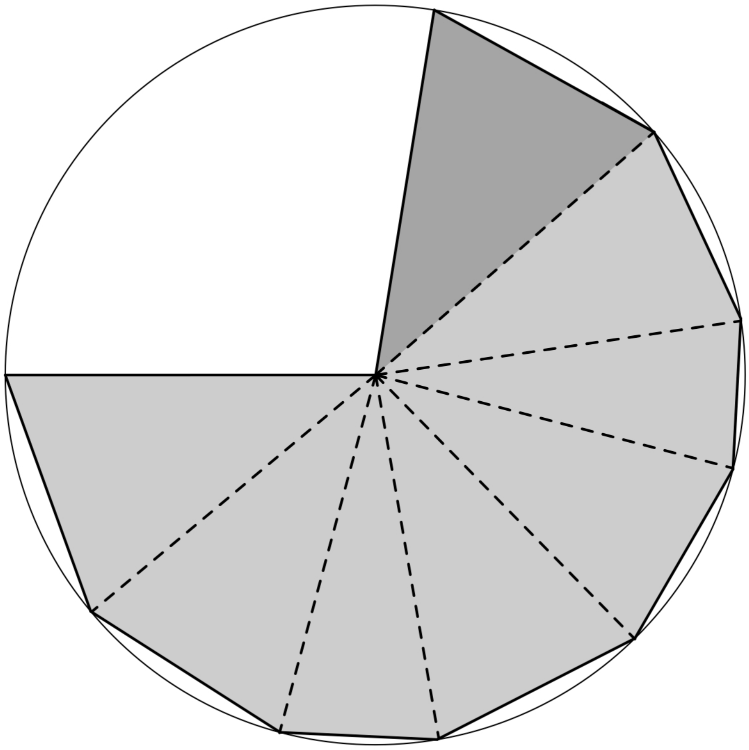

Abb. 4: Schnittmuster

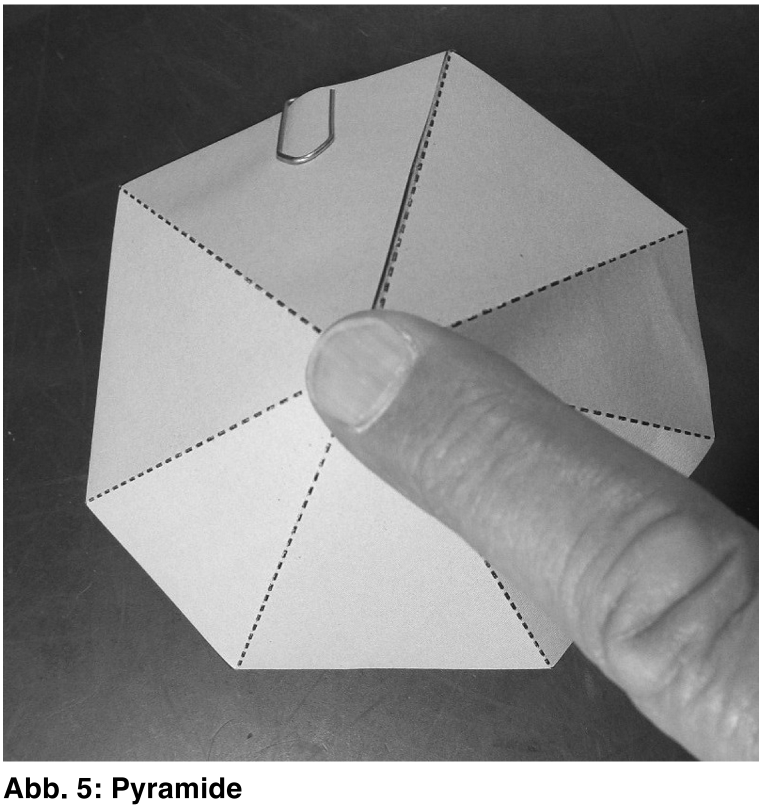

Abb. 5: Pyramide

Literatur

Köchli, Willi (2016): Einfache Konstruktion des Sehnenviereckes. VSMP-Bulletin, 131, Mai 2016, S. 22-23.